

کپسول ریاضی کیادرس

ویژه جمع بندی کنکور

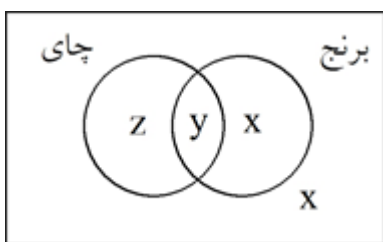
بنام
خالق زیبایی



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اشتراک دو بازه باید تهی باشد یا یک عضو مشترک داشته باشد تا متناهی گردد.

$$\frac{5}{m+2} \leq \frac{4}{m+1} \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} 5m+5 \leq 4m+4 \Rightarrow m \leq -1 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 1, 2, 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} x+y &= 200 \\ \left. \begin{aligned} y+z &= 370 \\ 2x+y+z &= 500 \end{aligned} \right\} &\rightarrow 2x = 130 \Rightarrow x = 65 \\ &\Rightarrow y = 200 - 65 = 135 \\ &\Rightarrow z = 370 - 135 = 235 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{2}a + 2b + \frac{3}{2}c + a + \left(-\frac{1}{2}b\right) = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c = \frac{3}{2}(a+b+c) = 27$$

$$\left(\frac{2-n}{2}, \frac{n+2}{n}\right) = \left(\frac{2}{2} - \frac{n}{2}, 1 + \frac{2}{n}\right)$$

به ازای تمام مقادیر n ، عدد یک در این بازه قرار دارد پس باید عدد صحیح دیگری در بازه نباشد.

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{2}{n} \leq 2 &\Rightarrow \frac{2}{n} \leq 1 \Rightarrow n \geq 2 \\ 0 \leq \frac{2}{2} - \frac{n}{2} &\Rightarrow \frac{2}{2} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n \leq 2 \end{aligned} \right\} n = 2$$

پس فقط به ازای $n = 2$ ، این اتفاق می‌افتد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a_2 = \sqrt{a_1} \Rightarrow a_1 r^1 = \sqrt{a_1 r^2} \Rightarrow a_1^2 r^2 = a_1 r^2 \Rightarrow a_1 r = 1 \quad (1)$$

$$a_3 = a_1 r^2 = 27 \Rightarrow \frac{a_1 r^2}{a_1 r} = r^2 = 27 \Rightarrow r = 3 \xrightarrow{(1)} a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_1, a_1 + d &\Rightarrow \text{دنباله حسابی اول} \\ \Rightarrow a_1 + 4, a_1 + d + 4 &\Rightarrow \text{دنباله حسابی دوم} \\ \Rightarrow \text{اختلاف جمله } n &= (a_1 + 4) - a_1 = 4 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$n(A \cup B) = 57 \quad n(A \cap B) = 12x \quad n(A - B) = 4x \quad n(B - A) = 3x$$

$$12x + 4x + 3x = 57 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

$$n(A) = 16x = 16 \times 3 = 48$$



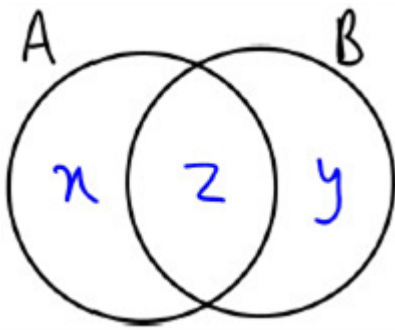


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸

$$\text{فرض: } d = 1 \Rightarrow 6(a+1)^2 = 5(a+2)a + 3(a+1)a \Rightarrow 6a^2 + 12a + 6 = 8a^2 + 13a$$

$$\Rightarrow 2a^2 + a = 6 \begin{cases} a = -2 \Rightarrow a_f = a + 3 = 1 \checkmark \\ a = 1/5 \Rightarrow a_f = a + 3 = 4/5 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹



$$n(B - A) = y = 3$$

$$\begin{cases} (x+z) - (z+y) = 14 \\ (x+y+z) - z = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 14 \\ x+y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 3 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰

$$\begin{cases} a_5 = 8 \\ a_{11} = 5 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{52}{5}, d = \frac{-3}{5} \Rightarrow a_{16} = \frac{52}{5} + 15\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{7}{5} = 1/4$$

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}, a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱

$$n(A) \begin{cases} \text{عدد دیگر و } 12 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21 \\ \text{عدد زوج دیگر و } 22 \Rightarrow \binom{3}{2} = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 24$$

$$\Rightarrow \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{k+5} \binom{n}{k} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{k+5} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{n}{k+5} \Rightarrow n = k+5 \Rightarrow n+k = 2k+5 \Rightarrow 7 \Rightarrow \text{عدد فرد بزرگتر از ۷}$$





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳

یک رقمی $\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد کل} = 5 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = 1 \end{array} \right.$

دو رقمی $\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 = 20 \\ \text{تعداد} = 4 \Rightarrow \{12, 24, 32, 52\} = \text{مضرب } 4 \end{array} \right.$

سه رقمی $\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 4 = 12 \end{array} \right.$

$\downarrow$ انتخاب ۳ $\downarrow$ {12, 24, 32, 52}

چهار رقمی $\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{هزارگان}} \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 2 \times 4 = 24 \end{array} \right.$

$\downarrow$ انتخاب ۳ $\downarrow$ انتخاب ۲ $\downarrow$ {12, 24, 32, 52}

پنج رقمی $\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{ده هزارگان}} \boxed{\text{هزارگان}} \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24 \end{array} \right.$

$\downarrow$ انتخاب ۳ $\downarrow$ انتخاب ۲ $\downarrow$ انتخاب ۱ $\downarrow$ {12, 24, 32, 52}

$$P(A) = \frac{24 + 24 + 12 + 4 + 1}{120 + 120 + 60 + 20 + 5} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$n(S) = 36$$

A ← حالت‌هایی که اعداد دو تاس متوالی باشند.

B ← حالت‌هایی که اعداد دو تاس برابر باشند:

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{10}{36} - \frac{6}{36} + 0 = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$A' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$n(A') = 6 \Rightarrow n(A) = 30$$

$$P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶

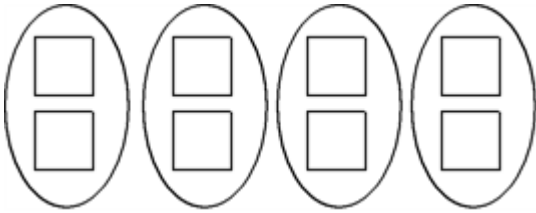
$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ \boxed{\text{کتاب ریاضی}} & \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right) \times 4! + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) \times 2! \times 3! + 5! = 360 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$





۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وزیر اول ۸ انتخاب دارد که در هر کدام از ۴ صندلی ۲ ردیف بنشیند. وقتی وزیر اول ردیفی را انتخاب کند وزیر بعدی در همان ردیف ۳ جای خالی دارد و وزیر روی ۲ جای خالی و وزیر چهارم اجباراً یک انتخاب دارد.



$$8 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

۱۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو نفر موردنظر را به صورت یک بسته درنظر می‌گیریم که این دو نفر درون بسته می‌توانند جای خود را با یکدیگر عوض کنند.

$$\frac{2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

تعداد جایگشت‌ها برابر است با: $4! \times 2! = 48$

۱۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a + b + c + d = 12 \Rightarrow \frac{a + b + c + d + 5}{5} = \frac{17}{5} = 3/4$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - 9 = 1/5 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 25}{5} - (3/4)^2 = 1/84$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{نکته:}$$

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$18, 23, 23, a, a$$

$$\frac{18 + 23 + 23 + a + a}{5} = 26 \Rightarrow a = 33$$

$$\frac{42 + (2 \times 33 + 1)}{2} = \frac{109}{2} = 54/5$$

$$\sigma^2 = \frac{7^2 - 1}{12} \times 2^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4$$

۲۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} 2\sigma = 8 \Rightarrow \sigma = 4 \\ \sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4 \end{array} \right\} \rightarrow 8$$

نکته: واریانس n جمله متوالی یک دنباله حسابی با قدرنسبت d برابر است با: $\frac{n^2 - 1}{12} \cdot d^2$





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۲

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \text{ یکسان} \\ CV \text{ حداقل} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} \text{ حداکثر} \Rightarrow 94, 96, 98 : \bar{x} = 96 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{2^2 + 0^2 + 2^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow CV_{\min} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{96} = \frac{\sqrt{2}}{48\sqrt{3}} = \frac{1}{24\sqrt{6}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. همه اعداد را در ۲۵ ضرب می‌کنیم. ۲۳

$$\begin{aligned} \bar{X} &= 27 + \frac{-2+0+3+2+2}{5} = 28 \\ \sigma_x^2 &= \frac{9+1+4+1+1}{5} = \frac{16}{5} \Rightarrow \sigma_x = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow CV = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{28} = \frac{1}{7\sqrt{5}} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۴

$$x = \text{احتمال قبولی دوست} \quad -\frac{2}{3}x = \text{احتمال قبولی نیلوفر}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} &= x \left(1 - \frac{2}{3}x \right) \Rightarrow \frac{3}{8}x^2 - x + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow 16x^2 - 24x + 9 = 0 \\ \Rightarrow (4x - 3)^2 &= 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{احتمال قبول نشدن هر دو} = (1-x) \left(1 - \frac{2}{3}x \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۵

دسته ۵ (۱, ۲, ۳), (۴, ۵, ..., ۱۲), (۱۳, ..., ۳۹), (۴۰, ..., ۱۲۰), (۱۲۱, ..., ۳۶۳)

$$\bar{x} = \frac{121 + 363}{4} = \frac{484}{4} = 121$$

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

نکته: اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ جملات یک دنباله حسابی باشند، میانگین آن‌ها برابر است با:

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$P = 0.6 \times 0.6 + 0.4 \times 0.4 = 0.36 + 0.16 = 0.52$$

$$P = 0.8 \times 0.5 = 0.4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$\text{درصد} = 0.4 \times 100 = 40$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون همه داده‌ها ۲ واحد اضافه شده پس میانگین و میانه هم ۲ واحد اضافه می‌شود. ۲۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$\sigma^2 = \frac{1+1+\dots+1+0}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.85}{0.9} = \frac{17}{18}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم x تعداد مهره‌های سبز باشد: ۳۱

$$1 - \frac{\binom{x}{2}}{\binom{x+5}{2}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\binom{x}{2}}{\binom{x+5}{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x+5)(x+4)} = \frac{1}{6} \Rightarrow (x+5)(x+4) = 6x(x-1)$$

$$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{اختلاف} = 5 - 4 = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۲

یک رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = 1 \end{cases}$

دو رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 = 20 \\ \text{مضرب } 4 = \{12, 24, 32, 52\} \Rightarrow \text{تعداد} = 4 \end{cases}$

سه رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 4 = 12 \end{cases}$

انتخاب ۳ {12, 24, 32, 52}

چهار رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{هزارگان}} \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 2 \times 4 = 24 \end{cases}$

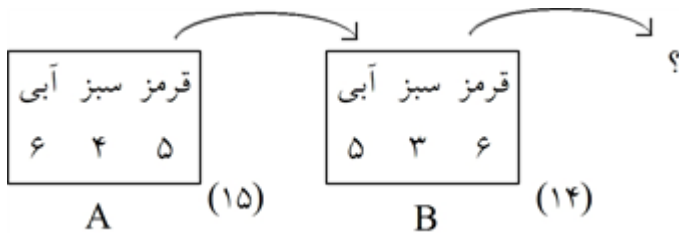
انتخاب ۳ انتخاب ۲ {12, 24, 32, 52}

پنج رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{ده هزارگان}} \boxed{\text{هزارگان}} \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24 \end{cases}$

انتخاب ۳ انتخاب ۲ انتخاب ۱ {12, 24, 32, 52}

$$P(A) = \frac{24 + 24 + 12 + 4 + 1}{120 + 120 + 60 + 20 + 5} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۳



$$P(B) = \frac{6}{15} \times \frac{6}{15} + \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{81}{225} = 0.36$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$\begin{cases} \text{بررسی رقیب اصلی: } A \\ \text{قهرمانی: } B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{1}{5} \\ P(B) = \frac{1}{3} \\ P(B|A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{6 + 10 - 2}{30} = \frac{14}{30}$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۵

$$P(\text{عدد سوم} = 10) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{15} \Rightarrow n = 15$$

۱۰ = تعداد مضارب غیر ۳ $\Rightarrow$ ۵ = تعداد $\Rightarrow \{3, 6, 9, 12, 15\}$ = مضارب ۳ $\Rightarrow 1, 2, 3, \dots, 15$: اعداد

$$P = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$P = \frac{16}{45} \times \frac{4}{16} + \frac{15}{45} \times \frac{6}{15} + \frac{14}{45} \times \frac{5}{14} = \frac{4+6+5}{45} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۷

تعداد رو	تاس
۳	۱
×	۲
×	۳
×	۴
×	۵
×	۶

$$\Rightarrow P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$0/4 \times 0/25 + 0/35 \times 0/3 + 0/25 \times 0/35 = 0/1 + 0/105 + 0/0875 = 0/2925$$

$$P = 0/08 \times 0/5 = 0/04$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$\text{درصد} = 0/04 \times 100 = 4$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/85}{0/9} = \frac{17}{18}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اضلاع دو مثلث مشابه، متناسبند پس: ۴۱

$$\text{حالت اول: } \frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{15}{4} = 3/75, x = \frac{28}{3} \approx 9/3$$

غیرقابل قبول، زیرا مقادیر $9/3$ و 5 و 4 تشکیل مثلث نمی‌دهند.

$$\text{حالت دوم: } \frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{4}{7} \Rightarrow y = \frac{35}{4} = 8/75, x = \frac{12}{7} \approx 1/7$$

$$\text{حالت سوم: } \frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{28}{5} = 5/6, x = \frac{15}{7} \approx 2/1$$

$$\text{حالت چهارم: } \frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{12}{5} = 2/4, x = \frac{35}{3} \approx 11/6$$

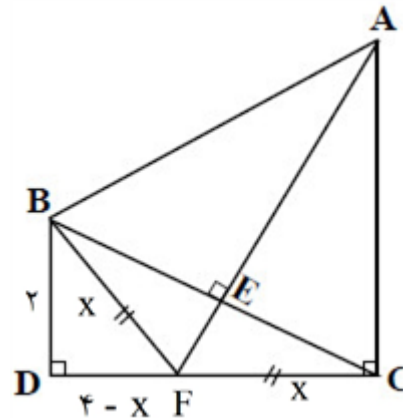
غیرقابل قبول زیرا مقادیر 4 و 5 و $11/6$ تشکیل مثلث نمی‌دهند.

بنابراین بیشترین مقدار y برابر $\frac{35}{4}$ و کمترین آن برابر $\frac{28}{5}$ است.

$$\text{اختلاف} = \frac{35}{4} - \frac{28}{5} = 8/75 - 5/6 = 3/15$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نظر می‌گیریم $BF = FC = x$ پس $DF = DC - FC = ۴ - x$ اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌نویسیم.



$$\begin{aligned} BDF: x^{\Upsilon} &= (\mathfrak{F} - x)^{\Upsilon} + \Upsilon^{\Upsilon} \Rightarrow x^{\Upsilon} = \mathfrak{I} \mathfrak{F} + x^{\Upsilon} - \mathfrak{A} x + \mathfrak{F} \\ &\Rightarrow x = \frac{\Upsilon^{\bullet}}{\mathfrak{A}} = \frac{\Delta}{\Upsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{BDC} : \text{BC}^{\text{r}} &= \text{BD}^{\text{r}} + \text{DC}^{\text{r}} = \text{r}^{\text{r}} + \text{r}^{\text{r}} = \text{r}. \\ &\Rightarrow \text{BC} = \text{r}\sqrt{\delta} \end{aligned}$$

با توجه به شکل FE عمود منصف BC است پس $\frac{BC}{2} = \sqrt{\delta}$. بنابراین: $BE = EC = \frac{BC}{2}$

$$FEC^{\Delta} : FE^{\Upsilon} = FC^{\Upsilon} - EC^{\Upsilon} = \left(\frac{\Delta}{\Upsilon} \right)^{\Upsilon} - (\sqrt{\Delta})^{\Upsilon} = \frac{\Upsilon \Delta}{\Upsilon} - \Delta = \frac{\Delta}{\Upsilon} \Rightarrow FE = \frac{\sqrt{\Delta}}{\Upsilon}$$

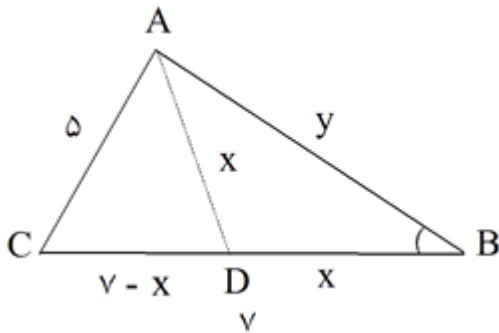
از طرفی بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می‌نویسیم.

$$AFC^{\Delta} : FC^{\gamma} = FE \times AF \Rightarrow \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^{\gamma} = \frac{\sqrt{\delta}}{\gamma} \times AF \Rightarrow AF = \frac{\frac{\gamma \delta}{\gamma}}{\frac{\sqrt{\delta}}{\gamma}} = \frac{\gamma \delta}{\gamma \sqrt{\delta}} = \frac{\delta \sqrt{\delta}}{\gamma}$$

$$AE = AF - FE = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{r\sqrt{\Delta}}{2} = r\sqrt{\Delta}$$

پس:

$$S_{\text{ABE}} = \frac{1}{r} \text{AE} \times \text{BE} = \frac{1}{r} (r\sqrt{\delta})(\sqrt{\delta}) = \delta$$



$$\triangle ACD \sim \triangle ABC$$

$$\frac{y-x}{\Delta} = \frac{\Delta}{y} \Rightarrow y^2 - yx = \Delta^2 \Rightarrow y^2 = yx + \Delta^2 \Rightarrow x = \frac{y^2 - \Delta^2}{y}$$

$$\frac{\Delta}{y-x} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\Delta}{\frac{y}{\frac{y}{x}}} = \frac{y}{\frac{y}{x}} \Rightarrow y = \frac{y^2}{\Delta} \Rightarrow y = y/x$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نیمساز A را رسم می‌کنیم.





۴۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در متوازی‌الاضلاع دو ضلع روبه‌رو مساویند پس $FC = ۸$.

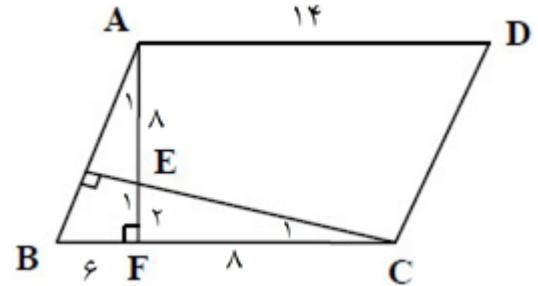
در ضمن دو مثلث قائم الزاویه AEH و CEF دارای دو زاویه متقابل به رأس مساویند (یعنی $\widehat{E}$) پس $\widehat{A} = \widehat{C}$ در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{F} = \widehat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(ذ)} \triangle ABF \sim \triangle EFC$$

$$\Rightarrow \frac{FC}{AF} = \frac{EF}{BF} \xrightarrow{EF=x} \frac{8}{8+x} = \frac{x}{6} \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4$$

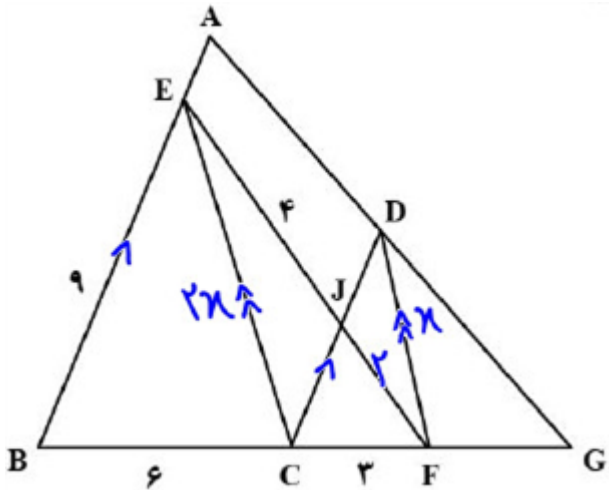
$$AF = 8 + x = 8 + 4 = 12$$

بنابراین:



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

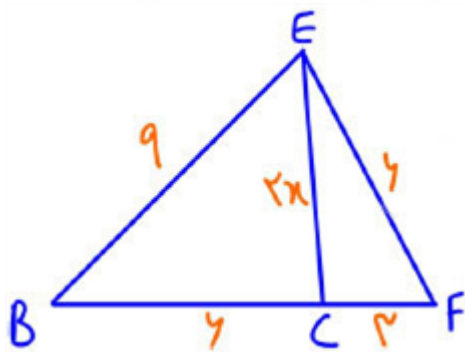
۴۵



$$\triangle BCE \sim \triangle CDF \left(k = \frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow DF = \frac{1}{3} CE$$

$$\Rightarrow FJ = \frac{EJ}{3} = 2$$



$$\Rightarrow \frac{6 \times 6^2 + 3 \times 9^2}{6+3} = (2x)^2 + 3 \times 6 \Rightarrow 24 + 27 = 4x^2 + 18$$

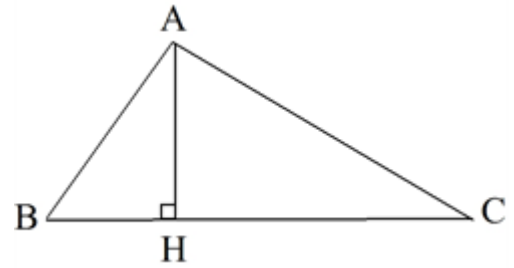
$$\Rightarrow 4x^2 = 33 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{33}}{2}$$





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال اگر AH ارتفاع وارد بر قاعده مثلث ABC باشد، آنگاه $AH = ۲ + ۳ BC$.

۴۶

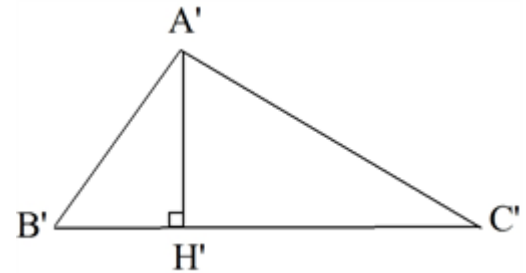


از طرف دیگر در مثلث جدید $A'B'C'$ بنابر فرض $A'H' = AH + ۴$ و $B'C' = BC + ۴$ است داریم:

$$S_{A'B'C'} = ۴ / ۵ S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{۲} A'H' \times B'C' = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{۲} AH \times BC \right)$$

$$۲ A'H' \times B'C' = ۴ AH \times BC \Rightarrow ۲(AH + ۴)(BC + ۴)$$

$$= ۴(۲ + ۳ BC)(BC) \Rightarrow ۲(۴ + ۳ BC)(BC + ۴)$$



$$= ۴(۲ + ۳ BC)BC \xrightarrow{+۲} ۲(۲ + BC)(BC + ۴) = ۲(۲ + ۳ BC)BC$$

$$\Rightarrow ۴BC + ۱۶ + ۲BC^2 + ۸BC = ۶BC + ۴BC^2 \Rightarrow ۲BC^2 - ۶BC - ۱۶ = ۰$$

معادله درجه دوم حاصل را با دستور b' حل می‌کنیم.

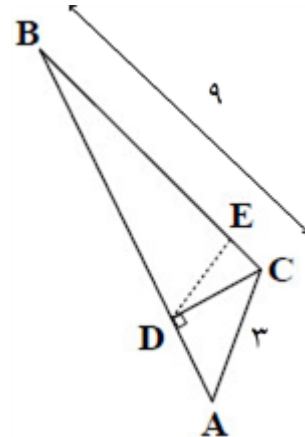
$$BC = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ + ۱۱۲}}{۲} = \frac{۳ \pm \sqrt{۱۲۱}}{۲} = \frac{۳ \pm ۱۱}{۲} \Rightarrow BC = ۲ \Rightarrow AH = ۸$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{۲} \times AH \times BC = \frac{1}{۲} (۸)(۲) = ۸$$

بنابراین:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.

۴۷



$$\triangle ABC : AB^2 = BC^2 + AC^2 = ۹^2 + ۳^2 = ۹۰ \Rightarrow AB = ۳\sqrt{۱۰}$$

$$\triangle ABC : BC^2 = BD \times BA \Rightarrow ۹^2 = BD \times ۳\sqrt{۱۰} \Rightarrow BD = \frac{۲۷}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\triangle BDC : BD^2 = BE \times BC \Rightarrow \left(\frac{۲۷}{\sqrt{۱۰}} \right)^2 = BE \times ۹ \Rightarrow BE = \frac{۲۷ \times ۲۷}{۱۰ \times ۹}$$

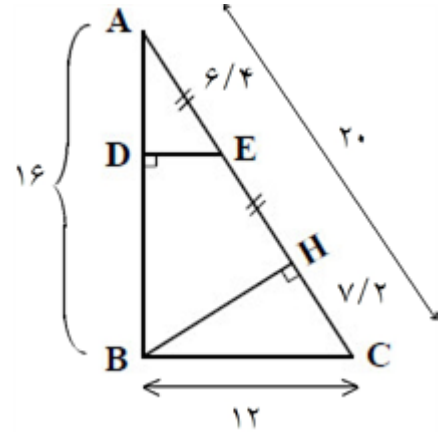
$$\Rightarrow BE = \frac{۸۱}{۱۰} = ۸/۱$$





۴۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} AB &= 4 \times 4 = 16 \\ BC &= 4 \times 3 = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC = 4 \times 5 = 20$$

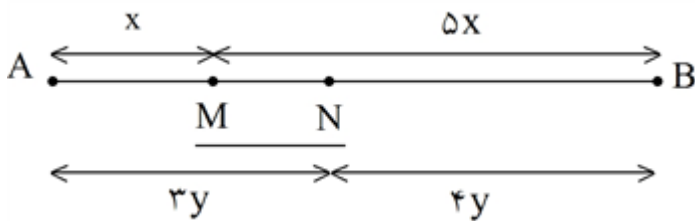
$$\Rightarrow AH = 20 - 7/2 = 12/8 \Rightarrow AE = \frac{12/8}{2} = 6/4$$

$$12^2 = HC \times 20 \Rightarrow HC = 7/2$$

$$\Rightarrow \frac{6/4}{20} = \frac{DE}{12} \Rightarrow DE = 3/84$$

۴۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

طول پاره خط $x = y$

$$3y - x = 22 \Rightarrow 3y - \frac{y}{6} = 22 \Rightarrow \frac{11y}{6} = 2 \times 11$$

$$\Rightarrow y = 12 \Rightarrow \text{طول پاره خط} = 6 \times 12 = 84 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 8 + 4 = 12$$

M و N به A نزدیکتر هستند.



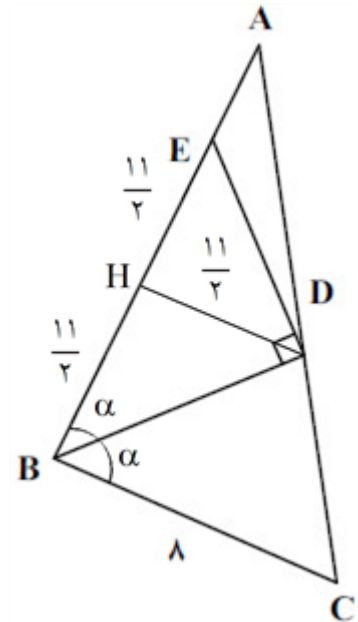


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال ارتفاع DH در مثلث قائم‌الزاویه BDE با ضلع BC موازی است پس BC هم بر AB عمود است پس $\alpha = 45^\circ$. در نتیجه مثلث BDE قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. بنابراین DH میانه هم هست یعنی $BH = EH = \frac{11}{2}$ و طول میانه DH نصف وتر BE است پس $DH = \frac{11}{2}$.

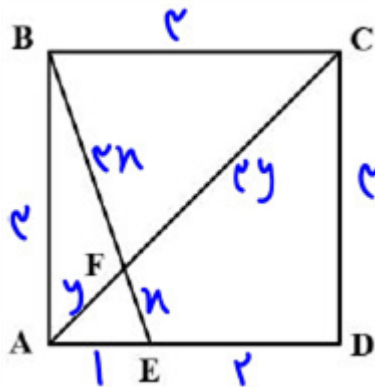
$$DH \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BC} \xrightarrow{AE=x} \frac{x + \frac{11}{2}}{x + 11} = \frac{\frac{11}{2}}{8}$$

$$\xrightarrow{\times} \frac{2x + 11}{x + 11} = \frac{11}{8} \Rightarrow 16x + 88 = 11x + 121$$

$$\Rightarrow 5x = 33 \Rightarrow x = 6\frac{3}{5}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

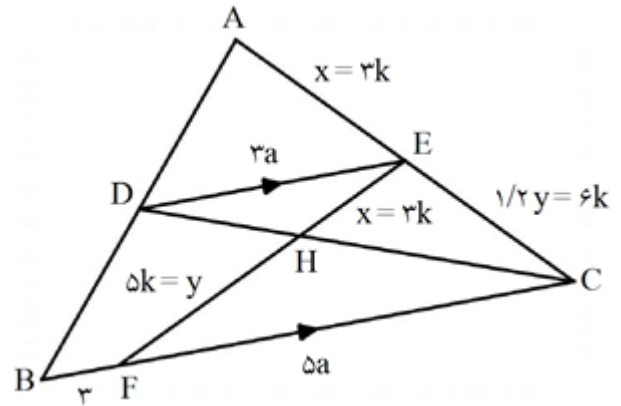


$$\frac{x}{y} = \frac{2x}{2y} = \frac{BE}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$





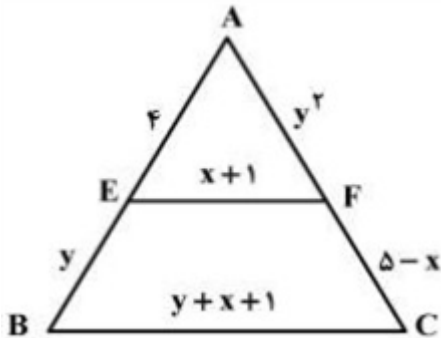
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۲



$$\begin{aligned} x &= 3k \\ y &= 5k \end{aligned}$$

$$\frac{3a}{3+5a} = \frac{3k}{8k} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{3}{8} = 0.375 \Rightarrow BC = 3 + 5(0.375) = 4.875$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی تالس می‌نویسیم: ۵۳



$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{x+1}{5-x} \Rightarrow y^2 = 20 - 4x(1)$$

$$\begin{aligned} EF \parallel BC &\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{4}{4+y} = \frac{x+1}{y+x+1} \\ 4y + 4x + 4 &= 4x + 4 + xy + y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4y = y(x+1) \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$$y^2 = 20 - 12 \Rightarrow y^2 = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$y - 2x = 2 - 6 = -4$$

بنابراین:

حال از تساوی ۱ نتیجه می‌گیریم.

پس گزینه‌ی ۱ درست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۴

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{x}{15} \Rightarrow x(x+1) = 30 \Rightarrow x = 5$$

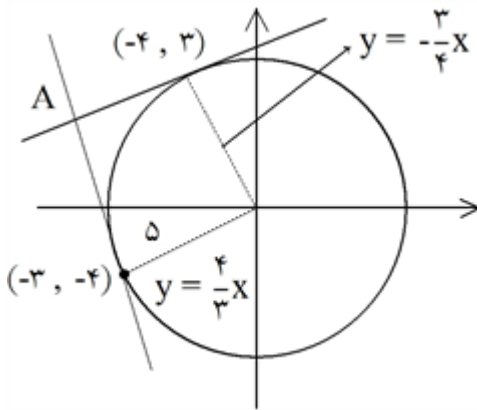
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دو مثلث ارتفاع برابر دارند پس نسبت مساحت‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است: ۵۵

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{BC}{DE} = \frac{12}{5} = 2.4$$





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۶



$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 25$$

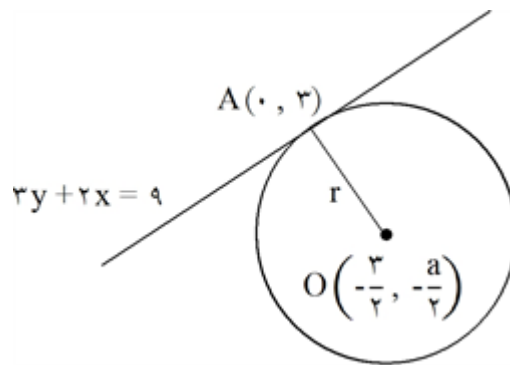
$$x = -4, y = 3$$

$$x_A = -4, y_A = 3 \Rightarrow x_A y_A = 12$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۷

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$2y + a = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{2}$$

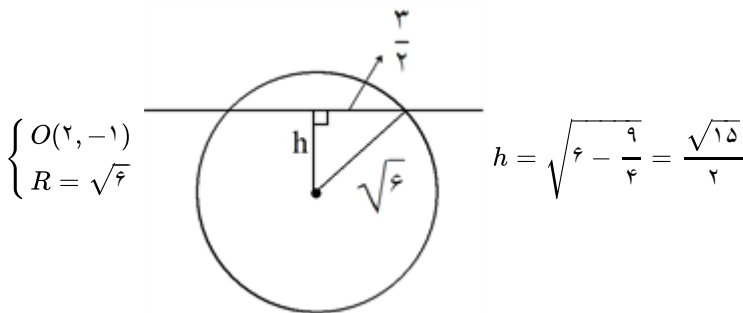


$$2y + 2x = 9 \Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{2}{2}$$

خطوط OA و $2y + 2x = 9$ بر هم عمودند.

$$\text{شیب خط OA} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{a}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{3}{2} + a \Rightarrow a = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۸



$$\frac{|-2 + 2 - a|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow |a| = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{تفاضل} = 5\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۹

$$2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{در معادله دایره جایگذاری نقطه } \left(-1, \frac{5}{2}\right): 1 + \frac{25}{4} + 3 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{25}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \text{کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{-\left(-\frac{7}{4}\right)} = \sqrt{7}$$





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۰

$$c = 12, 2b = 18 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = 15$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = 0.8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادلات دایره‌ها را در یک دستگاه بنویسیم، با حذف x^2 و y^2 از دستگاه هر آنچه بماند معادله وتر مشترک است. ۶۱

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y - 2x = 0 \Rightarrow x = y$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۲

$$f(x) = 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{f(\alpha) - 0}{\alpha - 0} = f'(\alpha) \Rightarrow 8\alpha^{\frac{5}{2}} + 6\alpha^{\frac{1}{2}} = 20\alpha^{\frac{3}{2}} + 3\alpha^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 3\alpha^{\frac{1}{2}} = 12\alpha^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 1 = 4\alpha^2 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{شیب خط} = f'(\alpha) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 20 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۳

$$f(x) = \sqrt{ax-1} \Rightarrow \text{شیب خط مماس } f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax-1}}$$

$$m = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = 2\sqrt{ax-1} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = x + 4 \Rightarrow x + 4 = 3\sqrt{ax-1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x + 4 = 3\left(\frac{3a}{2}\right) = \frac{9a}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{5}a - 4$$

$$2 \Rightarrow \frac{4}{5}a - 4 + 4 = 3\sqrt{a(\frac{4}{5}a - 4) - 1} \Rightarrow 9a^2 - 16a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$f(5) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

راه دوم:

$$\begin{matrix} B(-1, 1) \\ C(2, 2) \end{matrix} \Rightarrow \text{معادله خط مماس: } y = \frac{x+4}{3}$$

پس اگر خط مماس را با تابع قطع دهیم باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x+4}{3} = \sqrt{ax-1} \Rightarrow x+4 = 3\sqrt{ax-1} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 9ax - 9$$

$$x^2 + (8-9a)x + 25 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \begin{cases} 8-9a = 10 \Rightarrow a = -\frac{2}{9} \\ 8-9a = -10 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۴

$$\frac{f(-1) - f(0)}{-1} = \frac{8(-a+1) - 1}{-1} = -11 \Rightarrow -8a + 7 = 11 \Rightarrow -8a = 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(x^2+1)^2(2x)(ax+1) + a(x^2+1)^2 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 8$$





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۵

$$\Leftrightarrow \left(1, \frac{2+m}{4}\right) \text{ نقطه موردنظر}$$

$$y'(1) = \frac{(2+m)(4) - (2+m)}{16} = \frac{2(2+m)}{16} = \frac{2}{4} \Rightarrow m = 2$$

$$y = \frac{2}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} + \frac{n}{4} = \frac{2+m}{4} \Rightarrow m - n = 1 \xrightarrow{m=2} n = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$(\text{fog})'\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = g'\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) f'\left(g\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$g'(x) = \frac{-1}{2} (2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \Rightarrow g'\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{16}} = -\frac{32}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}$$

$$f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\Rightarrow (\text{fog})'\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -8\sqrt{2} \times f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = -512\sqrt{2}$$

که حاصل چهار برابر $-128\sqrt{2}$ است.

$$\frac{-512\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۷

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } ak^2 + bk + c = 2ak + b$$

$$\text{شرط مشتق پذیری: } 2ak + b = 2a \Rightarrow b = 2a - 2ak$$

$$a = b + c \Rightarrow c = -a + 2ak \Rightarrow ak^2 + (2a - 2ak)k + c - 2a = 0$$

$$k^2 + 2k - 2k^2 - 2 + 2k = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 2 \text{ max}$$

$$2y - x = 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۸

$$\frac{ax - 1}{2x + 1} = \frac{1}{2}(x + 5) \Rightarrow (2x + 1)(x + 5) = 2(ax - 1) \Rightarrow 2x^2 + 11x + 5 = 2ax - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x(11 - 2a) + 7 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = (11 - 2a)^2 - (12) = 0 \Rightarrow (11 - 2a) = \pm 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11 - 2a = 12 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{نقطه تماس: } A\left(-2, \frac{3}{2}\right) \in \text{ناحیه دوم} \\ 11 - 2a = -12 \Rightarrow a = 11 \Rightarrow A(2, 1) \in \text{ناحیه اول} \end{cases}$$

$$y = -ax + 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۹

$$f(4) = -4a + 2 \xrightarrow{+} -5a + 2 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{5} = 0.6 \Rightarrow f'(4) = -a = -0.6$$

$$f'(4) = -a$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۰

$$g'(-\sqrt[3]{x})f'(g(-\sqrt[3]{x})) \Rightarrow (fog)'(-\sqrt[3]{x})$$

$$D_g = (-\infty, \cdot) : g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} \xrightarrow{g^{-1}} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}}} = \sqrt[3]{x} = x$$

$$\Rightarrow (fog)'(x) = 1$$

$$f(-1) = 5, f'(-1) = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۱

$$g(x) = \sqrt[3]{x}f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x) + \sqrt[3]{x}f'(x) \Rightarrow g'(-1) = \frac{1}{3}f(-1) - f'(-1)$$

$$= \frac{1}{3}(5) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۲

$$\left. \begin{aligned} f(2) = 0 &\Rightarrow 1 + 2a - b = 0 \Rightarrow 2a - b = -1 \\ f'(x) = 3x^2 + a &\Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow a = -12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -11 \Rightarrow b - a = -2$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\left(1 - \frac{a}{3}\right) - (1 - a)}{2} = \frac{1}{3}a$$

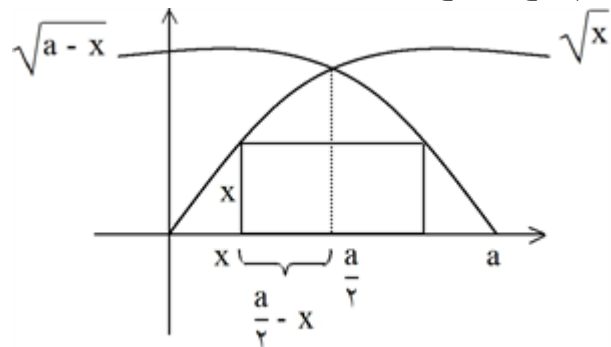
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۳

$$f'(x) = \frac{a}{x^3} \Rightarrow \frac{a}{x^3} = \frac{a}{3} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^3 &= 3 \\ 1 &< x < 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۴

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{x \left(\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\Delta x + 9}} \right)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\Delta x + 9}} \right)^2 = \frac{1}{27}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۵



$$S = \left(\frac{a}{2} - x\right)\sqrt{x} \quad \text{نصف مساحت مستطیل}$$

$$S' = \frac{a}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{a}{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

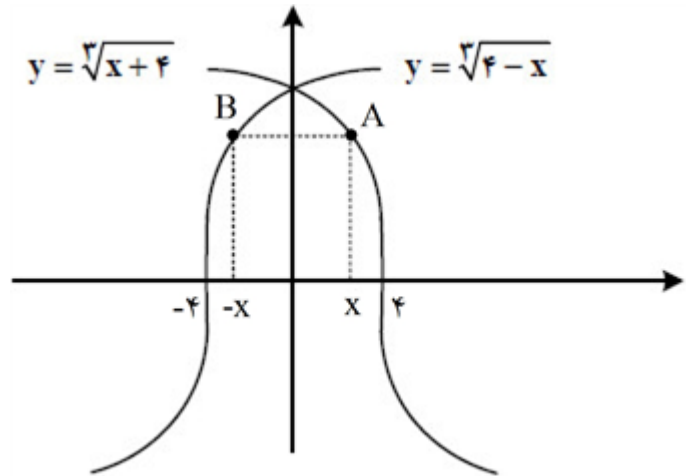
$$x = \frac{a}{4} \Rightarrow s\left(\frac{a}{4}\right) = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right)\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \Rightarrow a = 4$$





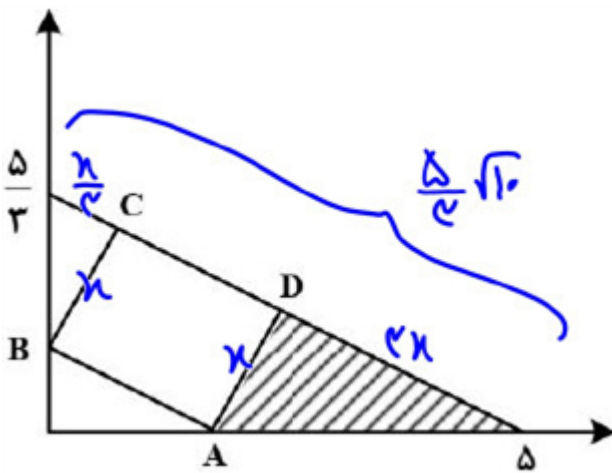
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۶



$$S = x\sqrt{4-x} = \sqrt{x^2(4-x)} \Rightarrow S' = \sqrt{\frac{12x^2 - 4x^3}{x^2(4-x)^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

$$S_{\text{Max}} = S(3) = 3\sqrt{4-3} = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۷



$$S = x\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{10} - \frac{x}{2} - 2x\right) = \frac{1}{2}x(\delta\sqrt{10} - 5x)$$

$$= \frac{1}{2}x\left(\frac{\sqrt{10}}{2} - x\right)$$

حداکثر S در $x = \frac{\sqrt{10}}{4}$ رخ می‌دهد. پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{1}{2}x \times 2x = \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{\log x}{\log a} + \frac{r \log r}{\log x^2} = \frac{a}{\frac{r \log r}{\log x}} + \frac{b}{\frac{r \log r}{\log x}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۸

$$ab = \frac{r}{2} \xrightarrow{a, b > 0} a = b = \sqrt{\frac{r}{2}} = \frac{\sqrt{r}}{2} \Rightarrow \min\{a+b\} = \frac{\sqrt{r}}{2} + \frac{\sqrt{r}}{2} = \sqrt{r}$$



$$D_f = \left[\cdot, \frac{a}{\sqrt{2}} \right]$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۹

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{a-\sqrt{2}x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{2}x} = \sqrt{2}\sqrt{x} \Rightarrow a - \sqrt{2}x = 2x \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{a} \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\cdot) = \sqrt{a} \\ f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}} \rightarrow \min \end{array} \right\} \max. \min = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1\sqrt{2}}}a = \sqrt{1\sqrt{2}} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}ax + b = 0, y'(\cdot) = 0 \Rightarrow b = 0, f(\cdot) = \sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

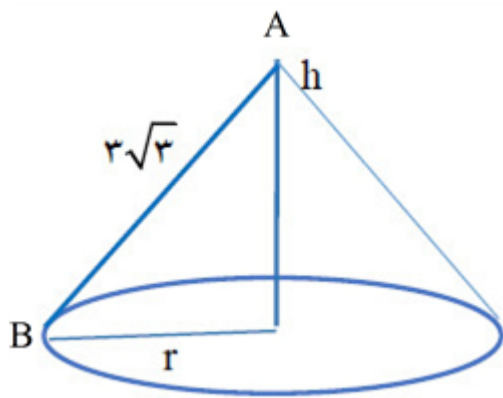
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۰

$$x(\sqrt{2}x + \sqrt{2}a) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-\sqrt{2}a^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}a^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow a^{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\sqrt{2} \Rightarrow a = -\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-\sqrt{2}a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۱



$$r^{\sqrt{2}} + h^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\sqrt{r})^{\sqrt{2}} \Rightarrow r^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{2} - h^{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi r^{\sqrt{2}}h = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi(\sqrt{2}\sqrt{2} - h^{\sqrt{2}})h = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\sqrt{2}h - h^{\sqrt{2}})$$

$$V' = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}h^{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow h = \sqrt{2}$$





۸۲

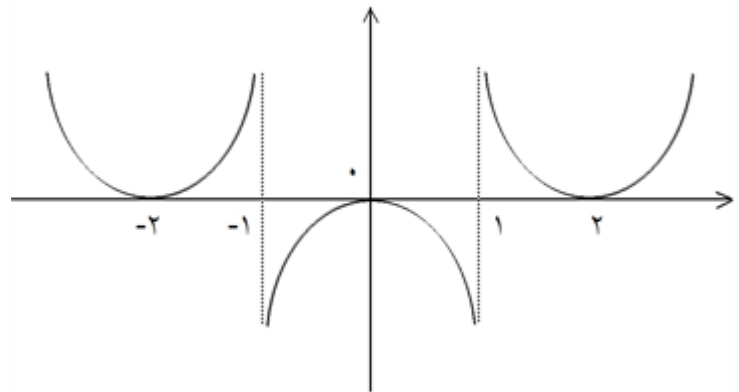
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $x = 0$ ریشه زوج تکرار تابع است پس یک نقطه اکسترمم نسبی است. نقاط $x = \pm 2$ ، نقاط گوشه تابع با توجه به همواره مثبت بودن تابع در اطراف آن‌ها نیز نقاط اکسترمم تابع می‌باشد. مشتق تابع نیز فقط ریشه $x = 0$ را دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4| = +\infty$$

بنابراین نمودار تقریبی به صورت زیر است:



با توجه به شکل تابع سه نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۸۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا محل برخورد $y = x^\alpha$ و نیمساز ربع اول و سوم را حساب می‌کنیم.

$$y = x^\alpha \Rightarrow x^\alpha - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

بنابراین نقطه A دارای طولی بین صفر و یک است. ($0 < \alpha < 1$)

$$A(\alpha, \alpha^\alpha) \Rightarrow A'(\alpha^\alpha, \alpha)$$

$$AA' = \sqrt{(\alpha^\alpha - \alpha)^\alpha + (\alpha - \alpha^\alpha)^\alpha} = \sqrt{\alpha} |\alpha - \alpha^\alpha|$$

چون $0 < \alpha < 1$ است بنابراین درون قدرمطلق مثبت است.

$$AA' = \sqrt{\alpha} \alpha - \sqrt{\alpha} \alpha^\alpha$$

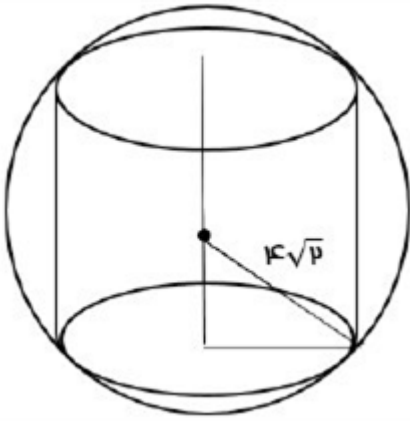
کافی است در معادله درجه ۲ ایجاد شده رأس سهمی را حساب کنیم.

$$\alpha_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{\alpha}}{-2\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2} \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \frac{\sqrt{\alpha}}{4} = \frac{\sqrt{\alpha}}{4}$$





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۴



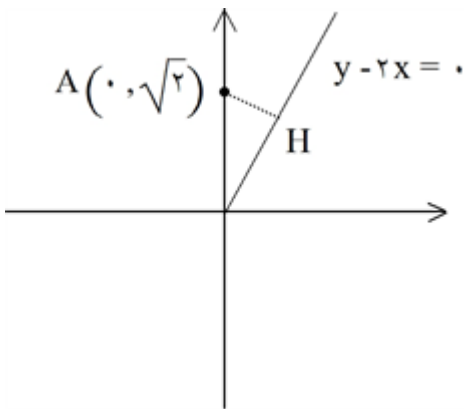
$$S = 2\pi rh = 2\pi \sqrt{r^2} \sqrt{\frac{h^2}{4}}$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2, \quad 2r^2 = R^2, \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{h^2}{4}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{4}$$

$$S_{\max} = 6\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۵



$$y - 2x = 0 \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۶

$$f(x) = (x - 1)|x| = \begin{cases} x(x - 1) & x \geq 0 \\ x(1 - x) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 0 \\ 1 - 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a + b = \frac{1}{2} \leftarrow a = 0, b = \frac{1}{2}$$

تابع f در بازه $(0, \frac{1}{2})$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۷

$$|AB| = |f_1(x) - f_2(x)| = |x^2 + 2x + 4| = x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow |AB|_{\min} = 3$$

$$f(x) = x^3 - 12x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۸

x	-2	2
f'	+	-
	↗	↘
	max	min
	نسبی	نسبی

$$f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$$





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x = a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

۸۹

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 1^2(m-4) = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

ریشه صورت و مخرج $x = a \Rightarrow a = -1$

$$\text{صورت: } \frac{\sqrt{3}(x+1)^2}{|x^2+1|} = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1|(x^2-x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \text{صورت} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \text{صورت} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{مخرج: } x = a = -1: \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۹۰

$$x = 1 \text{ در راستی پیوستگی: } \left\{ \begin{array}{l} f(1) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{-a(x-1)} = \frac{3}{-a} \end{array} \right\} \frac{3}{-a} = 1 \Rightarrow a = -3$$

$$x = 5 \text{ در چپ پیوستگی: } \left\{ \begin{array}{l} f(5) = b(5 - [-5]) = 10b \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \frac{|2 \cdot 5 + 5 - 2|}{3(1-5)} = \frac{18}{-12} = -\frac{3}{2} \end{array} \right\} 10b = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow ab = -\frac{9}{40}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $1 - x^2$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $1 - x^2$ منفی باشد، حاصل y برابر ۱- و اگر $1 - x^2$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

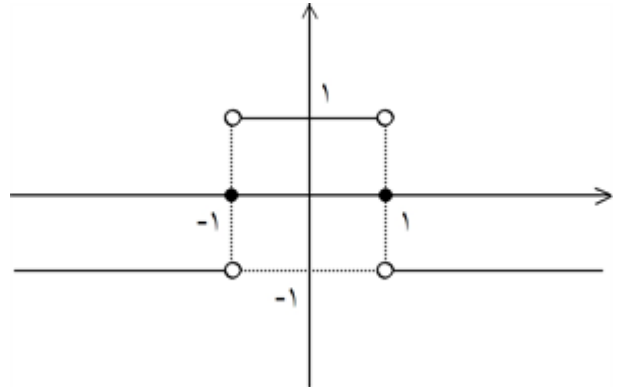
۹۱

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow g(f(x)) = 1 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ 1 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow g(f(x)) = -1 \end{array} \right.$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه و $(g \circ f)(x)$ برابر است با:

$$(g \circ f)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x = \pm 1 \\ -1 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{array} \right.$$

یا رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



در شکل مشخص است که تابع در $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۹۲

$$f((-2)^+) = 2 \left[2^- \right] + a \left[0^+ \right] = 2 \Rightarrow 4 - a = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$f((-2)^-) = 2 \left[2^+ \right] + a \left[0^- \right] = 4 - a$$

$$f(2a) = 0 \Rightarrow x^2 + mx + n = (x-a)(x-2a)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۹۳

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (2a - x) = 2 \Rightarrow a = 2 \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow m = -2a = -4 \\ \rightarrow n = 2a^2 = 8 \end{array} \right.$$

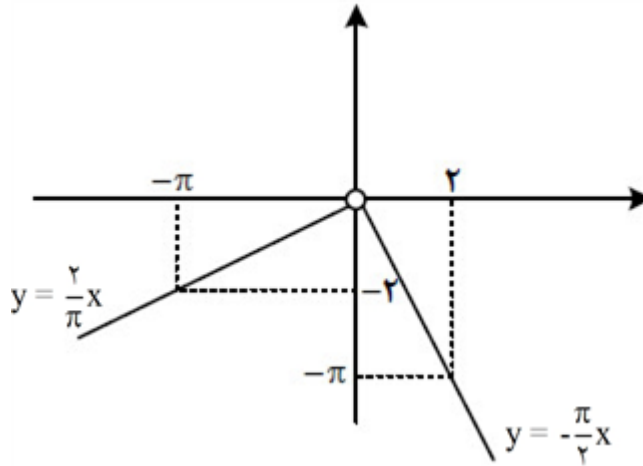




گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{|f(x)|}{\sin x} = \frac{\left|\frac{\pi}{2} \times -\frac{\pi}{2}\right|}{-1} = -1$$



$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۵

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^+} (f-g)(x) = 5$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1^-} (f-g)(x) = 3$$

$$1, 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g)(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (f-g)(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5/2$$

$$2, 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (f+g)(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} (f-g)(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5/2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۶

$$f(x) = b[x(x-a)] - 2a \xrightarrow{R \text{ پیوسته}} b = 0 \Rightarrow \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۷

$$\text{ریشه} = 1 \Rightarrow 5 - a + b = 0 \Rightarrow a - b = 5$$

$$\text{ریشه صورت } f = 1 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\left[\frac{b-2a}{3} \right] = \left[\frac{-3-4}{3} \right] = -3$$

تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x = 1$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x = 1$ صفر شود، در غیر این صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $\sin x$ اگر x در همسایگی چپ $\frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل از $\frac{1}{3}$ کمتر است. ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x] - 1 = \left[1^- \right] - 1 = -1$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1 \cdot x + 1}{12 + 6\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)(x+1)}{6(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)((\sqrt{x})^2 + 2^2)}{6(2+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2)}{6(2+\sqrt{x})} = \frac{-6(12)}{6} = -12 \end{aligned}$$

روش دوم: هوییتال

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} = \frac{-6}{6\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{-6}{\frac{1}{2}} = -12$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۰

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= a \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1+x^2}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{-(x+2)} = -12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -12$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۱

$$f(x) = 1x^2 - x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)} f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} [f(x)] = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع باید در $x = a$ هم پیوسته باشد پس:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{a-1}{a-1} = \begin{cases} 1 & a \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{1a} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{1} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-1} & x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \text{امکان ندارد} & a = 1 \Rightarrow \frac{1}{1a} = 0 \end{cases}$$

در $x = 1$ ناپیوسته می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۳

$$\begin{aligned} f(x) &= a[x] + b[x] + b \Rightarrow f(x) = (a+b)[x] + b \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow a = -b \\ \Rightarrow f(x) &= b \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -1 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۴

$$\begin{aligned} a \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} &= 0 \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} \\ \text{مخرج کسر} &= g(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x \Rightarrow \text{نزولی است} \frac{\pi}{3} > x > \frac{\pi}{3} \Rightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

پس مخرج کسر منفی است.

$$\Rightarrow \text{صورت} > 0 : \sqrt{3} \frac{\pi}{3} + b > 0 \Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{3}} = -1/\dots$$

-1 حداقل صحیح b





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۵

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow (-1)^+ : \frac{1-k[(-1)^+]}{\cdot} = -\infty \rightarrow \frac{1+k}{\cdot} = -\infty \rightarrow 1+k > 0 \Rightarrow k > -1 \\ x \rightarrow (-1)^- : \frac{1-k[(-1)^-]}{\cdot} = -\infty \rightarrow \frac{1+k}{\cdot} = -\infty \rightarrow 1+k < 0 \Rightarrow k < -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

نقطه در ناحیه سوم قرار دارد. $\left. \begin{aligned} \cos(k\pi) < 0 \\ k\pi < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 < k < -\frac{1}{\pi} \Rightarrow -\pi < k\pi < -\frac{\pi}{\pi} \Rightarrow$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۶

$$x \rightarrow (-2\pi)^+ : \frac{4-2k}{\cdot} = +\infty \Rightarrow k < 2$$

$$x \rightarrow (-2\pi)^- : \frac{4-2k}{\cdot} = +\infty \Rightarrow \frac{4}{2} < k$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2} < k < 2 \Rightarrow -2 < -k < -\frac{4}{2} \Rightarrow [-k] = -2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۷

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a+2[-x]}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a-2}{1-2x} = -\infty \Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < \frac{1}{a} - 1 < -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{a} - x = \left(\frac{1}{a} - 1 \right) x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{x}{a} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (-1) = -1$$

فرض $a = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{x}{a} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{x}{4} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[-\frac{3x}{4} \right] = \left[-\frac{3}{8} \right] = -\frac{3}{8}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۸

$$^{\wedge}a - b = 0 \Rightarrow b = ^{\wedge}a \Rightarrow a = \frac{b}{^{\wedge}a}$$

$$\lim_{x \rightarrow ^{\wedge}} \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}-2}{\frac{x}{^{\wedge}}-1} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2}{2+2} = \lim_{x \rightarrow ^{\wedge}} \frac{\sqrt{x}-2}{\frac{x}{^{\wedge}}-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{4+4+4} = \lim_{x \rightarrow ^{\wedge}} \frac{x-4}{6x-4^{\wedge}} = \frac{1}{6}$$

تذکر: سؤال با قاعده هوییتال نیز قابل حل است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۹

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-2x|}{\frac{2}{3}x} = \frac{-2x}{\frac{2}{3}x} = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4-1) \times \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-1} = 4 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = 2(x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید $\sqrt{x}$ را در کل رادیکال‌ها ضرب کنیم. ۱۱۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}+1} - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}} = \sqrt{1+1} - \sqrt{0-0} = \sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۲

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 4b-a=4 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b=8 \Rightarrow b=\frac{8}{5} \Rightarrow a=4-\frac{8}{5}=\frac{12}{5} \Rightarrow b-a=-\frac{4}{5}$$





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۳

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow r = f(-2) = -32 + 24 - 2a + 5 = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1/2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱۴

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = \frac{f(x)}{0^+} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \text{عدد منفی}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 1 = 1 \quad (\text{گزینه ۲})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{3x}{\pi} \right] - 3 = 2 - 3 = -1 \quad (\text{گزینه ۴})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{2x}{\pi} \right] - 1 = 0 \quad (\text{گزینه ۱})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 3 = 3 \quad (\text{گزینه ۳})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 4 + 2x)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۶

$$4 \times 2/5 - c = 0 \Rightarrow c = 1.6 \Rightarrow \frac{2x^2 + ax + b}{4x - 1.6} = \frac{(2x - 5) \left(x - \frac{b}{5} \right)}{2(2x - 5)}$$

$$x \geq 1 : y = \frac{1}{x} \left(x - \frac{b}{5} \right) \xrightarrow{\text{در } x=1 \text{ منقطع}} -1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{5} \right) \Rightarrow 1 - \frac{b}{5} = -2 \Rightarrow b = 15$$

$$x < 1 : y = 4 - 5x$$

$$2x^2 + ax + 15 = (2x - 5)(x - 3) = 2x^2 - 11x + 15 \Rightarrow a = -11$$

$$\Rightarrow a + b = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱۷

$$f \text{ همانی} \Rightarrow f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{1}{x-a} \Rightarrow |g(x)| - 2 = \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\left| \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - a} \right| = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_2 - a_1 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

توجه: چون تابع f همانی است پس اختلاف جوابهای $f(x+a) = 3$ همان اختلاف دو مقداری است که برای a به دست آمده است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید ۷۲ بر $y^2 - 1$ بخشپذیر باشد، پس: ۱۱۸

$$y^2 = 0, 4, 9, 25 \Rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5$$

۳ عضو باید حذف شود. $f = \{(-72, 0), (24, \pm 2), (9, \pm 3), (3, \pm 5)\}$





$$2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۹

$$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow 2x^2 - 4 < 2x \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

$$x \geq \sqrt{2} \cap -1 < x < 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < 2 \quad (1)$$

$$x < \sqrt{2} \Rightarrow -2x^2 + 4 < 2x \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1$$

$$x < \sqrt{2} \cap ((-\infty, -2) \cup (1, +\infty)) = 1 < x < \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} = (1, 2) \Rightarrow b - a = 2 - 1 = 1$$

$$k + 2(3 + x) = 3 + 2x \Rightarrow k = -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $g(x) = k$ ۱۲۰

$$\frac{f(-1)}{g(4)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۱

$$3 - \sqrt{2(x+1)} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} \sqrt{2x+2} - 3 \xrightarrow{+\delta} \sqrt{2x+2} + 2$$

$$\sqrt{2x+2} + 2 = \frac{9}{2} \Rightarrow 2x+2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$1 - 3n^2 = -2n \Rightarrow 3n^2 - 2n - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲۲

$$n = 1 \Rightarrow f = \{(7, -2), (1, -1), (2, 1), (7, -2), (1, 2)\} \times$$

$$n = -\frac{1}{3} \Rightarrow f = \left\{ \left(7, \frac{2}{3} \right), (1, -1), \left(2, -\frac{1}{3} \right), \left(7, \frac{2}{3} \right), (-3, 2) \right\} \Rightarrow f(2) = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + 2a & -1 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + 5 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۳

$$x = 1 \Rightarrow 2 + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 3$$

$$f(a) = f(3) = 27 + 5 = 32$$

$$a = 0, b = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع ثابت نباید x داشته باشد، پس: ۱۲۴

$$f + g = 5 \Rightarrow b + c = 5 \xrightarrow{b=1} c = 4$$

چون:

$$4(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۵

$$4x - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow x = 1$$

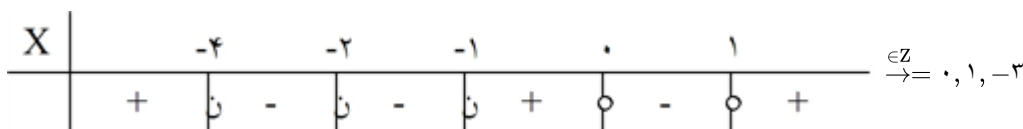
$$\text{نقطه تلاقی } (1, 3) \quad OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲۶

$$-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(2+x)} \leq 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 1$$

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = -2, 0, 1 \Rightarrow x = -4, -2, -1$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۷

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1 \Rightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{-a}{\gamma a} + 1 = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha', \beta' = -2, \frac{3}{\gamma} \Rightarrow \alpha, \beta = -\frac{3}{\gamma}, 2 \Rightarrow \frac{b}{\gamma} = \alpha\beta = -3 \Rightarrow b = -6$$

$$\left[\frac{ab}{\gamma} \right] = \left[-\frac{6}{\gamma} \right] = -2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۸

$$y = \frac{x-3}{\gamma} \Rightarrow x-3 = \gamma y \Rightarrow x = \gamma y + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \gamma x + 3 \xrightarrow{-6} g(x) = \gamma x - 3$$

$$\begin{cases} y = \frac{x-3}{\gamma} \\ y = \gamma x - 3 \end{cases} \Rightarrow \gamma x - 3 = \frac{x-3}{\gamma} \Rightarrow A: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۹

$$12 \Rightarrow x \rightarrow x - 12 \text{ واحد در جهت مثبت محور } x \text{ ها}$$

$$2 \Rightarrow y \rightarrow y + 2 \text{ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}$$

$$\sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \underbrace{x-12 \geq 0}_{\text{دامنه جواب}} \Rightarrow x \geq 12$$

$$\sqrt{x-12} = \sqrt{x} - 2 \Rightarrow \cancel{x} - 12 = \cancel{x} - 4\sqrt{x} + 4 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$x = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$A(16, 4), B(0, 0) \Rightarrow AB = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{2^4 + 2^4} = \sqrt{2^4(2^2 + 1)} = 4\sqrt{17}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۰

$$\left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{3}{\delta}\right) \in f^{-1} \Rightarrow \left(-\frac{3}{\delta}, -\frac{1}{\lambda}\right) \in f \Rightarrow \frac{-\frac{3}{\delta}}{a + \frac{\gamma}{\delta}a} = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow -\frac{3}{\lambda a} = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{6-2x}{2x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{3} < x \leq 2 \Rightarrow -1 < 3x \leq 6$$

$$[3x] = -1, 0, 1, \dots, 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2|[3x]| - 1) = -1 \Rightarrow \text{گزینه ۳ نادرست است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2|[3x]| - 1) = 1 \Rightarrow \text{گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند.}$$

بنابراین با حذف گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴، گزینه‌ی ۲ درست است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۳

$$\frac{3^x(1+3+9+27+81+243)}{2^x\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + 1 + 2 + 4 + 8\right)} = 52 \Rightarrow \frac{3^x(3^6-1)}{2^x\left(\frac{63}{\gamma}\right)} = \frac{3^x(1)}{2^x\left(\frac{63}{\gamma}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{3^x \times 28}{2^x \times 63} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \Rightarrow x = 2$$





$$\text{Log } \sqrt[4]{2} = 2/8, \text{Log } \sqrt[5]{2} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۴

$$\text{Log } \frac{10}{14} = \frac{\text{Log } \sqrt[5]{2} + \text{Log } \sqrt[4]{2}}{\text{Log } \sqrt[4]{2} + \text{Log } \sqrt[4]{2}} = \frac{2+1}{2/8+1} = \frac{3}{3/8} = \frac{15}{19}$$

$$f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \quad (1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۵

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + c \times 3^{a+b} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow c \times 3^a = -\frac{1}{3} \xrightarrow{(2)} 1 + c \times 3^a \times 3^b = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} \times 3^b = 0 \Rightarrow 3^{b-1} = 1$$

$$\Rightarrow b-1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(-1) = 1 + c \times 3^{a-b} = 1 + c \times 3^a \times 3^{-1} = 1 - \frac{1}{3} \times 3^{-1} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۶

$$\text{Log } \sqrt[3]{2} \cong 0/3 \Rightarrow \text{Log } \sqrt[5]{2} = 1 - \text{Log } \sqrt[3]{2} \cong 0/3$$

$$\text{Log } \sqrt[3]{2} \cong 0/3 \Rightarrow \text{Log } \sqrt[6]{2} = \text{Log } \sqrt[3]{2} + \text{Log } \sqrt[3]{2} \cong 0/3$$

$$x^{\sqrt[3]{2}} (\text{Log } \sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2} x (\text{Log } \sqrt[6]{2}) - \text{Log } \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[6]{2}} = 0 \Rightarrow (\text{Log } \sqrt[5]{2} + \text{Log } \sqrt[6]{2}) x^{\sqrt[3]{2}} + (\sqrt[3]{2} \text{Log } \sqrt[6]{2}) x + (\text{Log } \sqrt[6]{2} - \text{Log } \sqrt[5]{2})$$

$$= 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} x = -1, \frac{\text{Log } \sqrt[5]{2} - \text{Log } \sqrt[6]{2}}{\text{Log } \sqrt[5]{2} + \text{Log } \sqrt[6]{2}} \cong 0 \xrightarrow{\text{تفاضل}} \cong |-1 - 0| = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۷

$$b = -8, c = 9, \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta^{\sqrt[3]{2}} + \alpha^{\sqrt[3]{2}}\beta = \alpha\beta^{\sqrt[3]{2}} \cdot \alpha^{\sqrt[3]{2}}\beta^{\frac{2+\alpha\beta}{\sqrt[3]{2}}} \xrightarrow{\alpha+\beta} \alpha + \beta = \alpha^{\sqrt[3]{2}}\beta^{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow S = P^{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-c^{\sqrt[3]{2}}}{b} = \frac{-1^{\sqrt[3]{2}}}{-8} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Log } \frac{a}{\sqrt[3]{2}} = \text{Log } \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2$$

تذکر:

بهرتر بود در صورت سؤال عنوان می‌شد: «اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای که ریشه‌های آن $\alpha^{\sqrt[3]{2}}\beta$ و $\alpha\beta^{\sqrt[3]{2}}$ است، برابر باشند» که ابهام سؤال کمتر می‌شد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۸

$$8^{-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}n} > \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-2m-\sqrt[3]{2}n} + 2^{-\sqrt[3]{2}m-2n} > 2^{-7} \Rightarrow 2^{(2-\sqrt[3]{2}m-\sqrt[3]{2}n)} > 2^{-7}$$

$$\Rightarrow 2^{-2m-\sqrt[3]{2}n} > 2^{-7} \Rightarrow -2m - \sqrt[3]{2}n > -7 \Rightarrow m+n < 4 \Rightarrow (m, n) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$\text{Max}(m^{\sqrt[3]{2}} + n^{\sqrt[3]{2}}) = 2^{\sqrt[3]{2}} + 1^{\sqrt[3]{2}} = 8 + 1 = 9$$

$$\text{Log } \frac{m}{n} = a \Rightarrow \frac{\text{Log } m}{\text{Log } n} = a$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۹

$$b = \text{Log } \frac{m^{\sqrt[3]{2}}n}{mn} = \frac{\sqrt[3]{2} \text{Log } m + \text{Log } n}{\text{Log } m + \text{Log } n} = \frac{\sqrt[3]{2}a + 1}{a + 1} = 1 + \frac{a}{a+1} = 1/0 \dots \Rightarrow [b] = 1$$

تذکر: برای حل تستی، می‌توانیم $m = n$ در نظر بگیریم و به راحتی به جواب برسیم.





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۰

$$\begin{aligned} \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} = m &\Rightarrow \frac{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}}{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}} = m \Rightarrow \frac{\frac{1}{\lambda} \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} + 1}{\frac{1}{\lambda}} = m \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda m - 1}{\lambda} \\ \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} &= \frac{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}}{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} + 1}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\frac{\lambda m - 1}{\lambda} + 1}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda m + \lambda - 1}{\lambda} = \frac{\lambda m + \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} (m + 1) \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۱

$$\text{Log}_x^y - \frac{1}{A} \text{Log}_y^x = 1$$

باید Log_x^y را برابر A و Log_y^x را برابر $\frac{1}{A}$ قرار دهیم:

$$A - \frac{1}{A} = 1 \Rightarrow A^2 - 1 = A \Rightarrow A^2 - A - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \Rightarrow \text{Log}_x^y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \\ A = 2 \Rightarrow \text{Log}_x^y = 2 \Rightarrow y = x^2 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۲

$$\begin{aligned} (0, -2) \in f &\Rightarrow -2 = -4 + 2^b \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \in f &\Rightarrow 0 = -4 + 2^{-\frac{1}{3}a+1} \Rightarrow 2^{-\frac{1}{3}a+1} = 4 \Rightarrow -\frac{a}{3} + 1 = 2 \Rightarrow a = -3 \\ f\left(-\frac{5}{3}\right) &= -4 + 2^{-\frac{5}{3}(-3)+1} = -4 + 2^6 = -4 + 64 = 60 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۳

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2 \Rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \\ \Rightarrow t &= 2 \pm \sqrt{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{3}) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{t=2^x} \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} < 0 \text{ غ ق} \end{cases} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۴

$$\begin{aligned} \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} &= \frac{1}{\lambda} \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} = 0/\lambda \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} = 1/\lambda \\ \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} &= \frac{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}}{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} + \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}}{\text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \text{Log}_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{1/\lambda + 1}{1/\lambda + 1} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1} = \frac{1}{\lambda + 1} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۵

$$\begin{aligned} 2^{|x|} &= 2^{-2x^2+2x} \Rightarrow -2x^2 + 2x = |x| \Rightarrow -x^2 + x = |x| \\ x \geq 0 &\Rightarrow -x^2 + x = x \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark \\ x < 0 &\Rightarrow -x^2 + x = -x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \quad \times \end{aligned}$$





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به علت وجود $\text{Log } x$ باید $x > 0$ پس برای اینکه زیر رادیکال منفی نشود، باید:

$$\text{Log } x > 0 \Rightarrow \text{Log } x > \text{Log } 1 \Rightarrow x < 1 \overset{\cap}{\rightarrow} 0 < x < 1$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌شود.

$$\left. \begin{aligned} (0, 0) &\Rightarrow a + b = 0 \\ (-1, -1) &\Rightarrow a + 2b = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, b = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f \text{ همانی} \Rightarrow f(x) = x$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x-a} \Rightarrow |g(x)| - 2 = \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \frac{1}{\left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right|} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_2 - a_1 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

توجه: چون تابع f همانی است پس اختلاف جواب‌های $f(x+a) = 3$ همان اختلاف دو مقداری است که برای a به دست آمده است.

$$R_1 = \left[\frac{13}{2}, +\infty \right) \quad \text{ضابطه اول}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{ضابطه دوم: } -x^2 + 2mx + 2 = -(x-m)^2 + m^2 + 2$$

باید رأس سهمی $(x=m)$ داخل بازه $x > -\frac{3}{2}$ نباشد، پس:

$$m \leq -\frac{3}{2} \xrightarrow{m^2+2 \leq \frac{17}{2}} m = -2 \Rightarrow y_2 = -(x+2)^2 + 6$$

$$f^{-1}(-19) \Rightarrow -(x+2)^2 + 6 = -19 \Rightarrow (x+2)^2 = 25 \xrightarrow{x > -\frac{3}{2}} x = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(2+x)} \leq 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 1$$

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = -2, 0, 1 \Rightarrow x = -4, -2, -1$$

X	-4	-2	-1	0	1	
	+	-	-	+	-	$\xrightarrow{\in \mathbb{Z}} 0, 1, -3$





۱۵۱

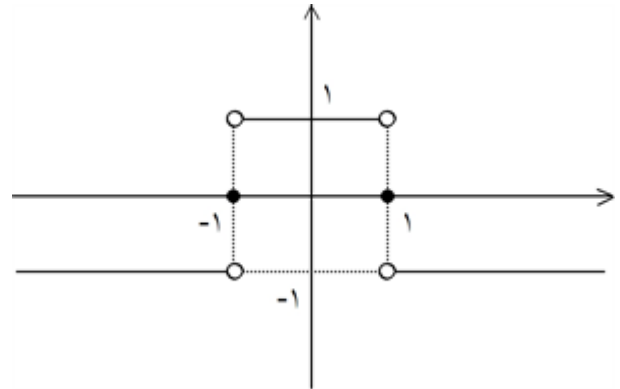
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(gof)(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $1 - x^2$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $1 - x^2$ منفی باشد، حاصل y برابر -۱ و اگر $1 - x^2 = 0$ برابر صفر است.

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow g(f(x)) = 1 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ 1 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow g(f(x)) = -1 \end{cases}$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه و $(gof)(x)$ برابر است با:

$$(gof)(x) = \begin{cases} 1 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x = \pm 1 \\ -1 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

یا رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



در شکل مشخص است که تابع در $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است.

۱۵۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f(x) = \sqrt[2]{|\sin x|}$ را $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم:

$$y = \sqrt[2]{\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|} \Rightarrow y = \sqrt[2]{|-\cos x|} \Rightarrow y = \sqrt[2]{|\cos x|}$$

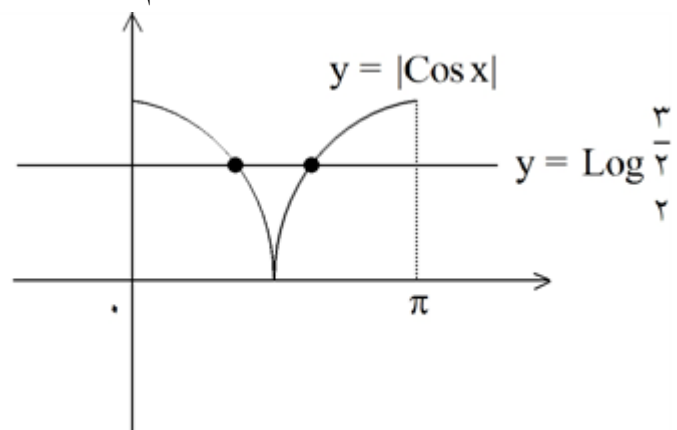
سپس $\frac{3}{4}$ در جهت محور y های منفی منتقل می‌کنیم.

$$y = \sqrt[2]{|\cos x|} - \frac{3}{4}$$

برای یافتن محل تلاقی با محور طول‌ها برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt[2]{|\cos x|} - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \sqrt[2]{|\cos x|} = \frac{3}{4} \Rightarrow |\cos x| = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

چون $\frac{3}{4} < 1$ است و $\log \frac{3}{4} = 1$ بنابراین $0 < \log \frac{3}{4} < 1$ است.



دو نمودار در بازه $[0, \pi]$ دو نقطه تلاقی دارند بنابراین معادله دو جواب دارد.





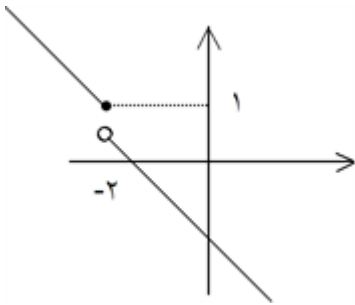
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۳

$$y\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5} \Rightarrow -\sqrt{a + \frac{9}{25}b} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sqrt{25a + 9b} = 4$$

$$y\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} \Rightarrow -\sqrt{a + \frac{16}{25}b} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sqrt{25a + 16b} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25a + 9b = 16 \\ 25a + 16b = 9 \end{cases} \Rightarrow 7b = -7 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۴



$$m \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (\Delta m - mx) = \Delta m + 2m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{4}$$

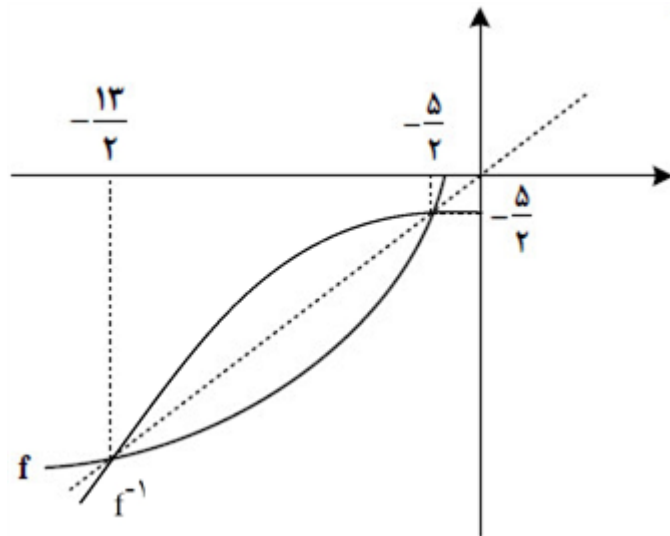
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. f تابع یک به یک است. ۱۵۵

$$g(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow x\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = 2$$

$$\text{اختلاف} = 2 - 1 = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۶



$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \xrightarrow{f^{-1}(x) < 0} x - f^{-1}(x) < 0$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) > x \Rightarrow x \in \left(-\frac{12}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -6, -5, -4, -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۷

$$f(x) = (x-1)|x| = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 0 \\ x(1-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 0 \\ 1-2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a+b = \frac{1}{4} \leftarrow a=0, b=\frac{1}{4}$$

تابع f در بازه $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ اکیداً نزولی است. بنابراین:





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۸

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left[-\frac{5}{3}\right] - \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$f\left(-\frac{7}{3}\right) = 2\left[-\frac{7}{3}\right] - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{gof}\left(-\frac{5}{3}\right) = g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{5}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{5}{3} + f\left(-\frac{5}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{5}{3} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3}\right]\right) = f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۹

$$^{\wedge}a - b = 0 \Rightarrow b = ^{\wedge}a \Rightarrow a = \frac{b}{^{\wedge}}$$

$$\lim_{x \rightarrow ^{\wedge}} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2}{\frac{x}{^{\wedge}} - 1} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}} + 2}{2 + 2} = \lim_{x \rightarrow ^{\wedge}} \frac{\sqrt{x} - 2}{\frac{x}{^{\wedge}} - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{4 + 4 + 4} = \lim_{x \rightarrow ^{\wedge}} \frac{x - 8}{6x - 48} = \frac{1}{6}$$

تذکر: سؤال با قاعده هوییتال نیز قابل حل است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است. ۱۶۰

$$f(f(x)) < f(x^{\diamond}) \Rightarrow f(x) < x^{\diamond} \Rightarrow (x + \text{Log } x)^{\diamond} < x^{\diamond} \Rightarrow x + \text{Log } x < x$$

$$\Rightarrow \text{Log } x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۱

$$\left. \begin{aligned} f \Rightarrow m = n = 0 \Rightarrow f(x) = -k \\ (m, n-1) = (0, k) \Rightarrow k = n-1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۲

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$g(g(1)) = g(4) = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۳

$$g(2x) = 5x^2 + 11 \Rightarrow g(x) = \frac{5x^2}{4} + 11$$

مینیمم آن ۱۱ است و اگر ۷ واحد هم به سمت راست برود باز همان است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قرینه $y = 2 + \sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y = x$ تابع وارون آن است. ۱۶۴

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} y^2 - 4y + 4 = x-1$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد در جهت } x \text{ مثبت}} y = (x-2-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد در جهت } y \text{ منفی}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 2$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = (4-4)^2 - 2 = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۵

$$10 > 3 > 2 > -5 \Rightarrow -10 \leq m-2 \leq 2m+3 \leq 4-m \Rightarrow \begin{cases} -8 \leq m \\ -5 \leq m \\ m \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -5 \leq m \leq \frac{1}{3} \xrightarrow{Z} m = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۶

$$g(f(\cdot)) = f(\cdot) \Rightarrow 3 - f(\cdot) = f(\cdot) \Rightarrow f(\cdot) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{4} = 2.25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۷

$$a - 4 = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$(3, -1) \in f^{-1} \Rightarrow (-1, 3) \in f \Rightarrow 3 = 1 + \sqrt{b+3} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a - b = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۸

$$3 - \sqrt{2(x+1)} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} \sqrt{2x+2} - 3 \xrightarrow{+5} \sqrt{2x+2} + 2$$

$$\sqrt{2x+2} + 2 = \frac{7}{4} \Rightarrow 2x+2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶۹

$$K = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 5 = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0$$

$$a \text{ حاصلضرب مقادیر } = -\frac{6}{2} = -3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۰

$$\left. \begin{aligned} \log^{-1}(a) = -3 \Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = a = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۱

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} \xrightarrow{x=3} f(3) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4} = 3 \Rightarrow a = 4$$

تذکر: در اصل سؤال، شرط $x \geq 0$ نبود که در این صورت تابع وارون‌پذیر نمی‌باشد و منظور طراح، بخشی از تابع است که وارون‌پذیر است. در کل داریم:

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x + 4\sqrt{x}, x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x - 4\sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۲

$$f^{-1}(-1) = -2 \Rightarrow f(-2) = -1 \Rightarrow -8 + 2 + 1 \neq -1$$

گزینه ۱:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{8}$$

گزینه ۲:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اکیداً نزولی یعنی: ۱۷۳

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < 3 \Rightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow \text{مجموع} = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷۴

$$4(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

$$4x - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{نقطه تلاقی } (1, 3) \quad OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$





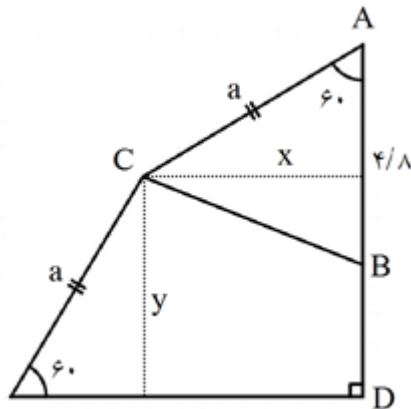
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۵

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\frac{\sqrt{3}\pi}{4} < x < \pi} \sin x + \cos x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۶



$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 60^\circ \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times a = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 6$$

$$\begin{cases} x = a \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \\ y = a \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow[\text{قطر}]{\text{مربع}} CD = 3\sqrt{3} \sqrt{2} = 3\sqrt{6}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۷

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}) (\sqrt{3}) \sin A - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A = 30^\circ$$

$$\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۸

$$\frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} - \frac{1}{|\cos \alpha|} = \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \quad (1)$$

$$\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha < 0 \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ ناحیه سوم

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۹

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۰

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

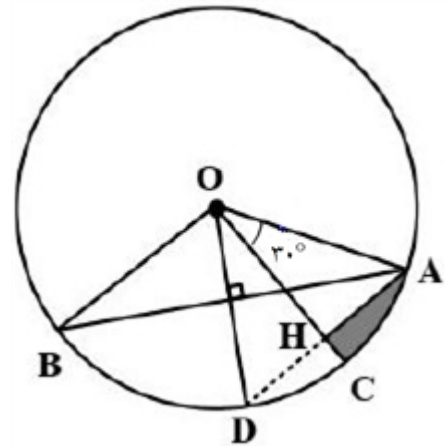
$$\Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\frac{\sqrt{3}\pi}{4} < x < \pi} \sin x + \cos x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$



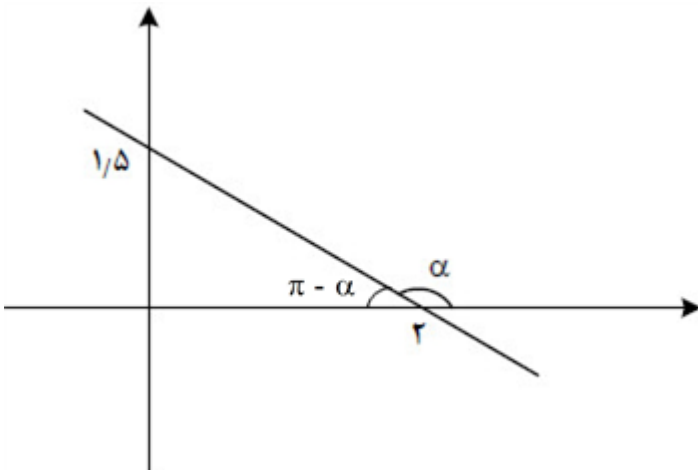


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸۱



$$\left. \begin{aligned} |OA| = 1, |OH| = \frac{\sqrt{r}}{r}, |AH| = \frac{1}{r} \\ |\widehat{AC}| = \frac{2\pi}{r}, |HC| = 1 - \frac{\sqrt{r}}{r}, |AH| = \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \sqrt{r} - \frac{\pi}{r}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۲



$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha = \frac{1/5}{2} = \frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -\frac{r}{r}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{r} - \alpha\right) = \cotg \alpha = -\frac{r}{r}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۳

$$\frac{r \cos(180^\circ + 68^\circ) - 2 \sin(90^\circ + 68^\circ)}{\sin(270^\circ - 68^\circ) - \cos(360^\circ - 68^\circ)} = \frac{-r \cos 68^\circ - 2 \cos 68^\circ}{-\cos 68^\circ - \cos 68^\circ} = \frac{5}{2} = 2/5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۴

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{r} + x\right) \Rightarrow y = a + b \cos(x)$$

با توجه به نمودار تابع که عرض از مبدأ آن می نیمم است بنابراین باید ضریب کسینوس منفی باشد ($b < 0$) در نتیجه به ازای $x = \pi$ باید نمودار ماکزیمم شود یعنی نقطه ماکزیمم با عرض ۳ دارای طول π است و تابع از نقاط $A(\pi, 3)$ و $B\left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$ می گذرد.

$$A(\pi, 3) \Rightarrow a + b \cos(\pi) = 3 \Rightarrow a - b = 3$$

$$B\left(\frac{5\pi}{3}, 0\right) \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{r} = 0$$

بنابراین $a = 1, b = -2$ می باشد.



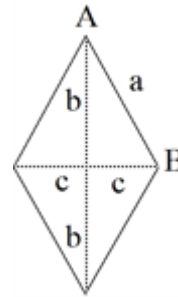


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۵

$$\begin{aligned} \underbrace{\operatorname{tg} 30^\circ}_{2\pi - \frac{\pi}{3}} &= -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}, \quad \underbrace{\operatorname{tg} 48^\circ}_{3\pi - \frac{\pi}{3}} = -\operatorname{tg} 6^\circ = -\sqrt{3} \\ \underbrace{\cos 21^\circ}_{2\pi + \frac{\pi}{6}} &= -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \underbrace{\sin 14^\circ}_{5\pi - \frac{\pi}{3}} = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \left(-\sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0. \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸۶

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{b \times c} \Rightarrow a^2 = bc \\ a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - bc = 0 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{b}{c}\right) + 1 = 0 \\ \Rightarrow \frac{b}{c} &= 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) &= \frac{\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2}}{1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} \\ \tan \frac{A}{2} = \frac{c}{b} &= 1 + \sqrt{3} \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{b}{c} = 1 - \sqrt{3} \\ \Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) &= \frac{(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})}{1 + 1} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{b} = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow b = 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸۷

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a + c &= 1 \\ 1 + c &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 3 \\ c &= -3 \end{aligned} \\ ab &= 15 \end{aligned}$$





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مرکز روی BC قرار دارد، پس $\hat{A} = 90^\circ$.

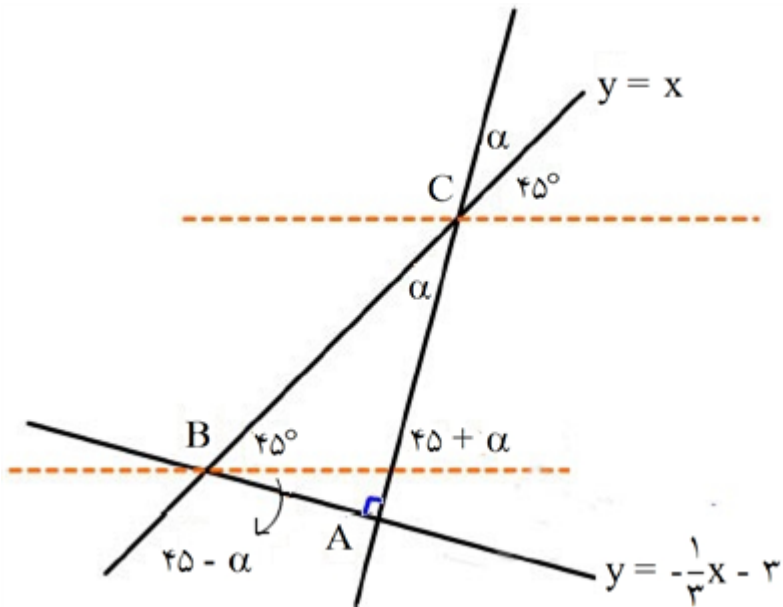
$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = r \Rightarrow \operatorname{tg}(90^\circ + 2\alpha)$$

$$\frac{r \times r}{1 - r^2} = -\frac{r}{r} \Rightarrow -\operatorname{Cotg} 2\alpha = -\frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{r}{r}$$

$$\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\hat{B} - \hat{C}) = \operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{r}{r}$$





در صورت سؤال مطرح شده رأس مثلث متساوی الساقین کدام است.

فرض کنیم در این جا $AB = AC = ۶$ باشد. در این صورت ارتفاع AH میانه هم هست پس $BH = CH$.

در مثلث های قائم الزاویه ABH و BCH چون $\widehat{B} = ۷۵^\circ$ پس $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = ۱۵^\circ$ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = ۱۵^\circ \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = ۹۰^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز)} \triangle ABH \sim \triangle OCH \Rightarrow \frac{OH}{BH} = \frac{OC}{AB} \quad (۱)$$

$$\sin \alpha = \frac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲} \Rightarrow \sin ۱۵^\circ = \frac{۱ - \cos ۳۰^\circ}{۲} \Rightarrow \sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\cos \alpha = \frac{۱ + \cos ۲\alpha}{۲} \Rightarrow \cos ۱۵^\circ = \frac{۱ + \cos ۳۰^\circ}{۲} \Rightarrow \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\tan ۱۵^\circ = \frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}} \times \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

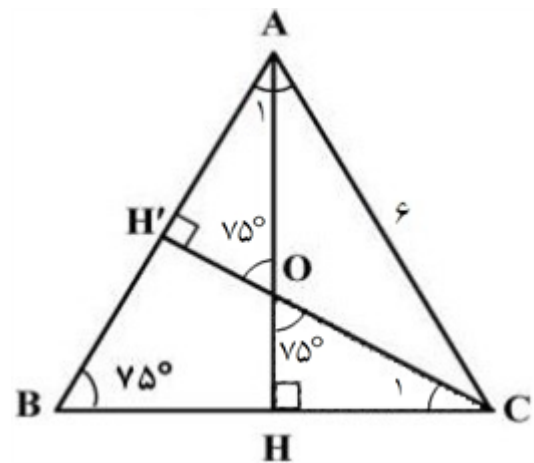
$$\triangle OHC : \tan \widehat{C}_1 = \frac{OH}{CH} \xrightarrow{\widehat{C}_1 = ۱۵^\circ} \tan ۱۵^\circ = \frac{OH}{CH} \xrightarrow{CH=BH} \tan ۱۵^\circ = \frac{OH}{BH} \quad (۲)$$

$$۱, ۲ \Rightarrow \frac{OC}{AB} = \tan ۱۵^\circ \xrightarrow{AB=۶} OC = ۶ \tan ۱۵^\circ \Rightarrow OC = ۶(۲ - \sqrt{۳})$$

در مثلث قائم الزاویه OHC چون یک زاویه ی حاده ۱۵° است پس ارتفاع وارد بر OC مساوی $\frac{۱}{۴}$ آن است.

$$S_{OHC} = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۴} OC \right) (OC) = \frac{۱}{۸} OC^2 = \frac{۱}{۸} (۶(۲ - \sqrt{۳}))^2 = \frac{۹}{۲} (۷ - ۴\sqrt{۳})$$

$$= \frac{۹(۷ - ۴\sqrt{۳})(۷ + ۴\sqrt{۳})}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})} = \frac{۹}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})}$$





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۰

$$\sin^3 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \Rightarrow \sin^3 \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{1 - \cos^2 \frac{\pi}{12}}{2} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} \sin^4 x \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{1}{8} \sin^2 2x} \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{1}{4} \sin^2 x} \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{1}{2} \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{16(\sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x \cos^2 x \cos^2 x)}{\sin^2 2x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{16} \sin^4(2x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{16} \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} (2 + \sqrt{2}) = \frac{2 + \sqrt{2}}{8}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹۱

$$\cos^2 x = \sin^2 x = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad k \in \{0, 1, 2\} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ندارد} \end{cases}$$

پس این معادله در فاصله $[0, \pi]$ دارای سه جواب $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ است.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2} - 1$$

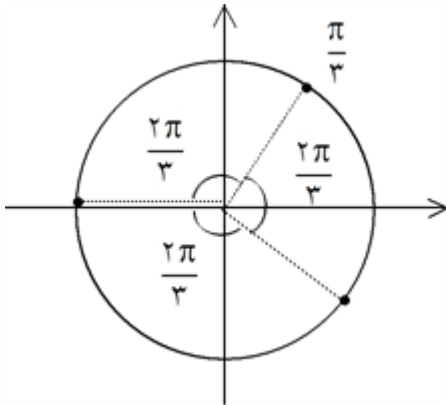
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹۲

$$A = -1 + \tan \frac{\pi}{4} = -1 + \tan \frac{\pi}{4} = -1 + (\sqrt{2} - 1) = -\sqrt{2}$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹۳



$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \cos x = -\cos x$$

$$\cos x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$\Rightarrow x = (k + \frac{1}{2})\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x = -\cos x \Rightarrow \cos x = \cos(\pi - x)$$

راه دوم:

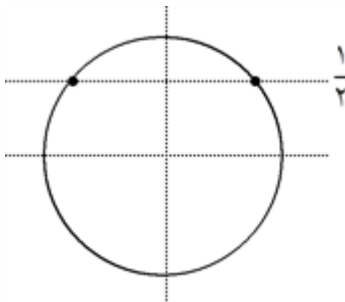
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow x = 2k\pi - \pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۴

$$\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{\text{کسر مورد نظر}} A = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \Rightarrow A < 0$$

$$A = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۵

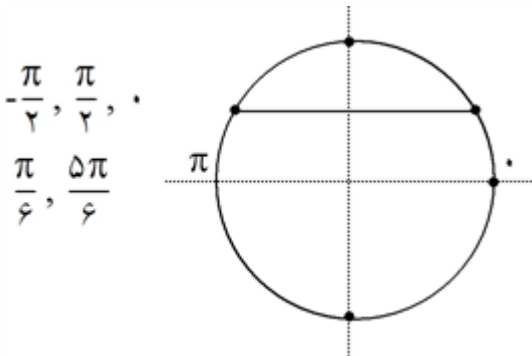


$$\cos x = 2\sin x - 1 \Rightarrow 1 - 2\sin x = 2\sin x - 1$$

$$2\sin x + 2\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹۶



$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۷

$$\sin\left(\frac{\pi + \sqrt{x}}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{x}\right) = \cos \sqrt{x}$$

$$\cos\left(\frac{\pi + \sqrt{x}}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{x}\right) = -\sin \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sin \sqrt{x} = \cos \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} = \cos \sqrt{x} \xrightarrow{\cos \sqrt{x} \neq 0} \sin \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{[0, \pi]} \sqrt{x} = \frac{\pi}{\sqrt{x}}, \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\pi}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{\pi}{\sqrt{x}} \Rightarrow \operatorname{tg} \sqrt{x} = -\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹۸

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos \sqrt{x} = (1 + \sin x) \sqrt{x} \Rightarrow (1 - \sin \sqrt{x}) = (1 + \sin x) \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (1 - \sin x) \cancel{(1 + \sin x)} = \cancel{(1 + \sin x)} (1 + \sin x) \Rightarrow 1 - \sin x = 1 + \sin x \Rightarrow \sqrt{x} \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \text{اختلاف} = \pi - 0 = \pi$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۹

$$1 + \cos x = 1 + \tan \sqrt{x} \Rightarrow 1 + \cos x = \frac{1}{\cos \sqrt{x}} \Rightarrow 1 + \cos \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ \text{یا} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰۰

پس کمان موردنظر در ربع اول است در این بازه تانژانت مثبت است.

$$\frac{1-m}{1+m} > 0 \Rightarrow -1 < m < 1 \quad \text{پس:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۰۱

$$\frac{\cos\left(\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\operatorname{Cotg}(\sqrt{x})} = \frac{\sin \sqrt{x} - \cos \alpha}{\operatorname{Cotg} \sqrt{x}}$$

$$\sin \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \sqrt{x}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{24}{25}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Cotg} \sqrt{x}} = \operatorname{tg} \sqrt{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{24}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \sqrt{x}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{24}{5}}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{29}{5}}} = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \sqrt{x} - \cos \alpha}{\operatorname{Cotg} \sqrt{x}} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{24}} = \frac{\frac{24\sqrt{29} + 20}{25}}{\frac{\sqrt{x}}{24}} = \frac{1056}{175}$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۲

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = -\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow -\sin^2 x (\cos^2 x + 1) = 0$$

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow$$

k	۰	۱	۲
x	۰	π	2π

$$\cos^2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} + \pi \Rightarrow$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{2}$

در مجموع ۵ ریشه در بازه $[0, 2\pi]$ وجود دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۳

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sin \frac{x}{a} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{a}\right|} = |a| \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |a| = \frac{1}{4}$$

$$y = \cos ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

$$y = 1 + \sin ax \xrightarrow{a < 0} T = \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$y = 2 \cos \left(\frac{x}{a} \right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{a}\right|} = |a| (2\pi) = 4\pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۵

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

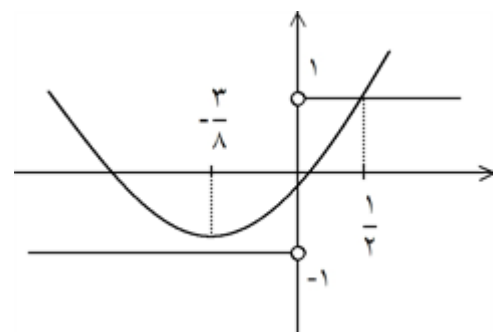
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۶

$$y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$$

$$x_s \text{ راس سهمی} = \frac{-\frac{3}{2}}{4} = -\frac{3}{8}$$

برای اینکه سهمی در بازه $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ پایین‌تر از خط $y = 1$ باشد، می‌بایست:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + c = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۷

$$\frac{2}{-1} = \frac{-a}{1} \Rightarrow a = 2$$

$$y = x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

پس سهمی دوم هم باید به ازای $x = 1$ و $x = -3$ برابر $y = 1$ شود.

$$y = -(x-1)(x+3) + 1 = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow b = 4$$

$$\begin{matrix} a=2 \\ b=4 \end{matrix} \Rightarrow ab = 8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰۸

$$\begin{aligned} 15x^2 + 73x + 14 < 0 &\Rightarrow -\frac{14}{3} < x < -\frac{1}{5} \\ \frac{-70}{15} = \frac{-14}{3} \quad \frac{-3}{15} = \frac{-1}{5} \\ \left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} > 3 \Rightarrow x > 9 \\ \frac{x-3}{2} < -3 \Rightarrow x < -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\cap \Rightarrow -\frac{14}{3} < x < -3 \Rightarrow b - a = \frac{5}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۹

$$(\delta - 2m)x^2 - (2m + n - \delta)x - n < 0 \Leftrightarrow (-1, m-2) \xrightarrow{a+c=b} \text{ریشه ها} = \left\{ -1, \frac{-c}{a} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\delta - 2m} = m - 2 \Rightarrow n = (m - 2)(\delta - 2m)$$

$$x^2 \text{ ضریب} = \delta - 2m > 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 1, 2 \cap m = 2 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow m + n = 2$$

$$m - 2 > -1 \Rightarrow m > 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱۰

$$\begin{aligned} 2a + 3 &= 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ 4b - 5 < 0 &\Rightarrow b < \frac{5}{4} \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} b = 1 \\ \frac{4c+1}{4(b)-5} &= \frac{3}{2} \Rightarrow 4c+1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{8}} = \frac{12}{5}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۱۱

$$\text{شیب خط: } \frac{-2m}{m^2 - 1} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}m^2 + 2m - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow |m_1 - m_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4 + 12}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون از ربع سوم نباید بگذرد، پس $a > 0$ و چون یکی از ریشه‌ها صفر است باید ریشه دیگر

$$\text{مثبت باشد، یعنی: } x = \frac{-(3+2a)}{a} \xrightarrow{a>0} 3+2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$$

مقداری از ناحیه سوم نمی‌گذرد.





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. **۲۱۳**

$$0 < -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2} \Rightarrow 0 < m$$

$$0 < -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{\Delta}{4a} < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4(2-m)}{4} < 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 8 < 0$$

$$(m+2)^2 < 12 \xrightarrow{m \geq 0} m+2 < \sqrt{12} \Rightarrow m < \sqrt{12} - 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. **۲۱۴**

$$-4 < \frac{-1}{3-x} < 0 \Rightarrow -4 < \frac{1}{x-3} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-3} < 0 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 & (1) \\ \frac{1}{x-3} > -4 \Rightarrow 1 < -4x+12 \Rightarrow 4x < 11 \Rightarrow x < \frac{11}{4} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \text{مجموعه جواب} = \left\{ x \mid x < \frac{11}{4} \right\} \Rightarrow \text{مقادیر طبیعی} = 1, 2$$

روش دوم:

$$-4 < \frac{1}{x-3} < 0 \Rightarrow \text{اعداد طبیعی بزرگتر از ۳ کسر را مثبت می‌کند و کسر به ازای } x=3 \text{ تعریف نشده است، پس فقط}$$

$$x=2 \text{ و } x=1 \text{ جواب است.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. **۲۱۵**

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow mx^2 - (1+m)x - 1 - m = 0 \xrightarrow{\Delta < 0}$$

$$\Delta = (1+m)^2 - 4m(-1-m) < 0 \Rightarrow (1+m)(1+m+4m) < 0 \Rightarrow (1+m)(5m+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{5} \Rightarrow \text{هیچ عدد صحیحی در این بازه وجود ندارد}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. **۲۱۶**

روش اول (حذف گزینه):

$$1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$$

$$x=1 \Rightarrow 1 < 2 < 3 \checkmark \text{ (1, 2) رد می‌شود}$$

$$x=1/7 \Rightarrow 1 < \frac{2/7}{2/4} < 3 \checkmark \text{ (0/8, 1/2), (0/6, 1/5) رد می‌شود}$$

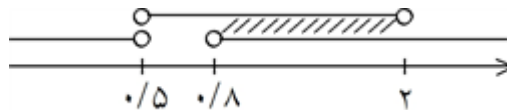
پس گزینه ۴ (0/8, 2) صحیح است.

روش دوم:

$$\frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \Rightarrow x < 0/5 \text{ یا } x > 0/8 \quad (1)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \Rightarrow 0/5 < x < 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} (0/8, 2)$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. **۲۱۷**

$$y = ax^2 + bx + c \begin{cases} (1, 5) \Rightarrow c = 5 \\ (1, 11) \Rightarrow a + b = 6 \\ (-2, 5) \Rightarrow 4a - 2b = 0 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 2, b = 4 \end{cases}$$

$$y = 2x^2 + 4x + 5 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow 2 - 4 + 5 = 3 \\ x = 2 \Rightarrow 8 + 8 + 5 = 21 \end{cases}$$

پس (-1, 3) صحیح است.





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۱۸

$$\frac{\sqrt{88+18\sqrt{5}}-\sqrt{88-18\sqrt{5}}}{\sqrt{4-\sqrt{5}}+\sqrt{4+\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(9+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(9-\sqrt{5})^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2}}$$

$$= \frac{9+\sqrt{5}-9+\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2\sqrt{5}}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}} = \sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱۹

$$\frac{2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{6}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{6}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۲۰

$$x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \Rightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1+2\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{6}+2$$

$$x = \sqrt{6}+2 \Rightarrow x-2 = \sqrt{6}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۲۱

$$\underbrace{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})}_t \underbrace{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})}_t = (x+a)-(x-a) = a+a$$

$$2t = a+a \Rightarrow t = \frac{a+a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \Rightarrow \sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} - 2 = \frac{a}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۲۲

$$B = \frac{2+\sqrt{28}}{8+\sqrt{28}} = \frac{2+2\sqrt{7}}{8+2\sqrt{7}} \times \frac{8-2\sqrt{7}}{8-2\sqrt{7}} = \frac{16-4\sqrt{7}+16\sqrt{7}-28}{36} = \frac{12\sqrt{7}-12}{36} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

$$\Rightarrow 3B+1 = \sqrt{7}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۲۳

$$a^{\frac{1}{5}} = 27a^{\frac{10}{5}} \Rightarrow 27a^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3}-3}{1+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \frac{3(4-2\sqrt{3})}{2} = 6-3\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۲۴

$$8^{-\frac{1}{2}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{1}{2}n} > \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-2m-n} + 2^{-m-2n} > 2^{-7} \Rightarrow 2(2^{-2m-2n}) > 2^{-7}$$

$$\Rightarrow 2^{-2m-2n} > 2^{-8} \Rightarrow -2m-2n > -8 \Rightarrow m+n < 4 \Rightarrow (m,n) = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$\text{Max}(m^2+n^2) = 2^2+1^2 = 8+1 = 9$$





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۲۵

$$\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \cdot \sqrt[4]{(1 + \sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1} (1 + \sqrt{7})^2}$$

$$= \sqrt[4]{\cancel{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \cdot 2 \cdot \cancel{(4 + \sqrt{7})}} = \sqrt[4]{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۲۶

$$(a - b)^4 (a + b)^4 \Rightarrow (a^2 - b^2)^4$$

$$(\sqrt{\sqrt{6} + 2} - \sqrt{\sqrt{6} - 2})^4 = (\sqrt{6} + 2 + \sqrt{6} - 2 - 2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2$$

$$= 4(6 + 2 - 4\sqrt{3}) = 8(4 - 2\sqrt{3}) = 16(2 - \sqrt{3})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۲۷

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - \underbrace{2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1}}_{\sqrt{3^2} - 1 = \sqrt{3} - 1} = \frac{(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})(5 + \sqrt{6})}{(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6})} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{19} - \sqrt{3} - 1 = \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19} - \sqrt{3} - 1 = \frac{\cancel{19}(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\cancel{19}} - \sqrt{3} - 1$$

$$= \sqrt{2} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۲۸

$$\frac{1 - a}{9 - 3a} < 0 \Rightarrow 1 < a < 3 \Rightarrow a = 2$$

و البته اگر $a = 3$ باشد عبارت تعریف نشده است. پس:

$a = 2, 3$ ✓

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۲۹

$$\frac{\sqrt[3]{2 \times 2 \sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2 \sqrt{2}} \times (2^4)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \cancel{\sqrt[3]{2}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} \times 2^{-\frac{8}{3}}} = 8\sqrt[3]{2}$$





۲۳۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_s = -\frac{1}{2a} \text{ راس سهمی}$$

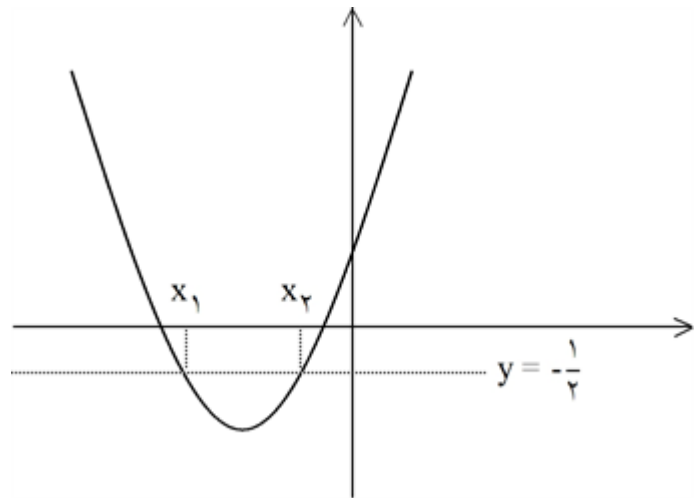
$$y_s = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) + 2a = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + 2a = -\frac{1}{4a} \Rightarrow 8a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \text{ ق ق} \\ a = \frac{1}{8} \text{ بیشترین مقدار ندارد} \Rightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

تذکر: در اصل سؤال، به مقدار منفی a اشاره نشده بود که در این صورت به ازای $0 \leq a < \frac{1}{8}$ و محدود کردن دامنه

می‌توان به ماکزیمم $-\frac{1}{4}$ رسید و در این حالت بی‌شمار مقدار برای a وجود دارد که در گزینه‌ها موجود نیست! به طور

مثال اگر $a = \frac{1}{8}$ آنگاه: $y = \frac{1}{8}x^2 + x + \frac{2}{8} = \frac{1}{8}(x^2 + 8x + 2)$



با محدود کردن دامنه به فاصله‌ی $[x_1, x_2]$ ماکزیمم سهمی $-\frac{1}{4}$ می‌شود.

۲۳۱

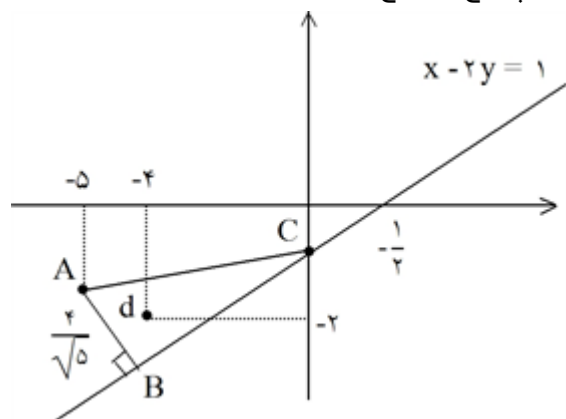
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{خط } AB: y + 2x + 11 = 0 \Rightarrow B(-4/2, -2/2) \\ \text{خط } L: x - 2y = 1$$

$$C(0, -\frac{1}{2})$$

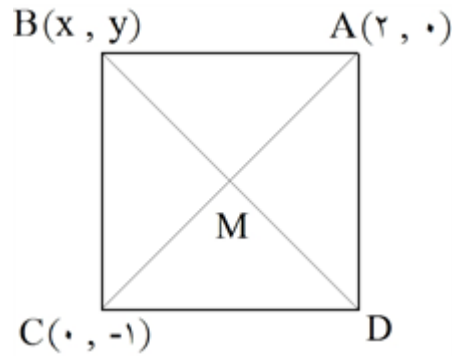
$$\text{فاصله نقطه } C \text{ تا خط } AB \Rightarrow \frac{|-\frac{1}{2} + 0 + 11|}{\sqrt{5}} = \frac{21}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{21}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{5} = 4/2$$





گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۳۲



$$AC \text{ وسط } M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$AC \text{ شیب خط} = \frac{-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{BD} = -2$$

$$BD \text{ معادله خط: } y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + \frac{3}{2}$$

$$AC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \Rightarrow MB = MD = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$MB = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(-2x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5(x-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |x-1| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}, -2\right) \\ x-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: ۲۳۳

$$c - b = 2a$$

$$c = 9 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \\ b = 5 \\ b = 7 \end{cases} \quad c = 8 \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \\ b = 6 \end{cases} \quad c = 7 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \\ b = 5 \end{cases} \quad c = 6 \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$c = 5 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad c = 4 \begin{cases} b = 2 \end{cases} \quad c = 3 \begin{cases} b = 1 \end{cases}$$

روش دوم:

$$s = p + 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = -\frac{c}{a} + 2 \xrightarrow{\times a} -b = -c + 2a \Rightarrow 2a = c - b$$

زوج زوج

$$c - b \text{ زوج است} \Rightarrow \begin{cases} \text{هر دو زوج } c, b \\ \text{یا} \\ \text{هر دو فرد } c, b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 + 6 = 16$$

با توجه به اینکه $c - a$ و a هم‌علامت نیستند، بنابراین Δ همواره مثبت است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۳۴

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 5 \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 5\sqrt{\alpha\beta} \xrightarrow{0^+} S + 2\sqrt{P} = 25P$$

$$\Rightarrow S + 2\sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{25}{36} \Rightarrow S = \frac{25}{36} - \frac{1}{3} = \frac{13}{36} \Rightarrow \frac{m+14}{36} = \frac{13}{36} \Rightarrow m = -1$$

$$mx^2 + 3x + 2 = -x^2 + 3x + 2 \Rightarrow P = \frac{2}{-1} = -2$$





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۳۵

$$\underbrace{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-4})}_r \underbrace{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-4})}_t = (x+a) - (x-4) = a+4$$

$$rt = a+4 \Rightarrow t = \frac{a+4}{r} = \frac{a}{r} + r \Rightarrow \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - r = \frac{a}{r}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۳۶

$$x^2 - (m+2)x + m = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, \frac{m}{r} \Rightarrow S = \frac{1}{r} \left| m \left(\frac{m}{r} - 1 \right) \right|$$

محور عرض: $y(0) = m$

$$\Rightarrow \left| m \left(\frac{m}{r} - 1 \right) \right| = \frac{r}{r} \Rightarrow |m(m-2)| = r \begin{cases} m = -1 \Rightarrow \frac{m}{r} = \frac{-1}{r} \checkmark \\ m = 2 \Rightarrow \frac{m}{r} = \frac{2}{r} \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۳۷

$$\text{طول مستطیل جدید} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x = 2(\sqrt{5}+1)$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4 \times 2(\sqrt{5}+1)}{4 \times 5} = 0.4(\sqrt{5}+1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۳۸

$$b = -8, c = 4, \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \alpha\beta^2 \cdot \alpha^2\beta^{\frac{1}{\alpha\beta}} \xrightarrow{\alpha+\beta} \alpha + \beta = \alpha^2\beta^2 \Rightarrow S = P^2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-c^2}{b} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Log} \frac{a}{\sqrt{2}} = \text{Log} \frac{2}{\sqrt{2}} = 2$$

تذکر:

بهرتر بود در صورت سؤال عنوان می‌شد: «اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای که ریشه‌های آن $\alpha^2\beta$ و $\alpha\beta^2$ است، برابر باشند» که ابهام سؤال کمتر می‌شد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۳۹

$$\begin{cases} 2y - 3x = -19 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1) \text{ و } AC: 4y - 3x - 17 = 0$$

$$BH = \frac{|4 - 9 - 17|}{5} = \frac{22}{5} = 4.4$$





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در منحنی $y = x^2$ به جای x باید $\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ را جاگذاری کنیم.

$$y = x^2 \Rightarrow y = (\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3})^2 \Rightarrow y = y + 3 + y - 3 - 2\sqrt{y^2 - 9}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{y^2 - 9} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 & \text{ق ق} \\ y = -3 & \text{غ ق} \end{cases}$$

چون $y = x^2$ است بنابراین y باید نامنفی باشد.

$$y = x^2 \xrightarrow{y=3} x = \pm \sqrt{3} \xrightarrow{x \text{ مقداری مثبت است}} x = \sqrt{3} \text{ ق ق}$$

$$OA = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12}$$

بنابراین فاصله نقطه $A(\sqrt{3}, 3)$ تا مبدأ برابر است با:

$$\frac{(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2} + 1)}{\sqrt{x^2}} (\sqrt{x^2} - 1) = 2\sqrt{x}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = -x_2 \\ x_2 + 1 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x_2+1)^2} = \frac{-1}{x_1} \\ \frac{1}{(x_1+1)^2} = \frac{-1}{x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S' = \frac{-(S^2 - 2SP)}{(P)^2} = \frac{-(-1-15)}{-125} \\ P' = \frac{1}{(P)^2} = \frac{-1}{125} \end{cases}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0 \xrightarrow{\times 125} 125x^2 + 16x = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 1 + 2 + 2m^2 = 3 + 2m^2 \geq 3 \Rightarrow \min = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} \sqrt{1} = \sqrt{2} - \sqrt{0} \text{ جواب ندارد}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \beta = 3\alpha \\ \alpha + \beta = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3\alpha + 3\beta \\ \alpha\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha(3\alpha) = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\alpha^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow a = 8 \\ \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow a = -8 \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه: ۱۶ = اختلاف



