



نام و نام خانوادگی :

زمان آزمون :

پایه تحصیلی :

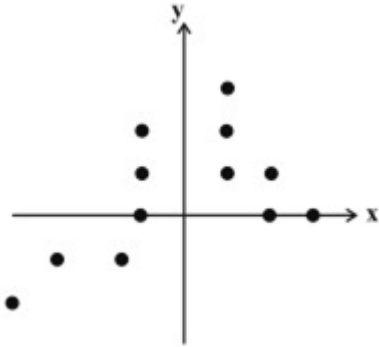
نام درس :

نام دبیر :

نام آموزشگاه :

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم
انسانی (فصل ۲ تابع)
تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۴

۱ با حذف حداقل چند نقطه، نمودار مقابل در دامنه‌ی خود یک تابع می‌باشد؟



۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

۲ معادله‌ی تقاضای یک شرکت تولیدی $x = 1200 - 6p$ و معادله‌ی هزینه‌ی کل آن $C = 14400 - ax$ است. اگر به‌ازای تولید ۴۵۰ کالا، سود شرکت بیشترین مقدار شود، a کدام است؟

-۵۰ (۴)

صفر (۳)

-۱۲ (۲)

۱۲ (۱)

۳ در تابع خطی f داریم: $f(1) = 5$ و $f(2) = 3$ ، در این‌صورت حاصل $\sqrt{\frac{f(0) + 2}{f(x) + 8}}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ نمودار تابع خطی f محورهای x و y را به‌ترتیب در $x = 3$ و $y = 2$ قطع می‌کند. اگر مجموعه‌ی $R = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 8\}$ بُرد تابع f باشد، دامنه f کدام است؟

$-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ (۴)

$-\frac{9}{2} \leq x \leq 9$ (۳)

$-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (۲)

$-9 \leq x \leq \frac{9}{2}$ (۱)

۵ اگر معادله‌ی درآمد یک شرکت $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 100x$ و معادله‌ی هزینه‌ی آن $C(x) = 20x + 3000$ باشد، در این صورت ماکسیمم سودی که نصیب شرکت می‌شود، کدام است؟

۲۰۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

۶۰۰ (۲)

۸۰۰ (۱)

x	۱	$\frac{1}{2}$	۲	۳
y	-۱	a	۲	۵

۶ جدول مقابل مربوط به یک تابع خطی است مقدار a کدام است؟

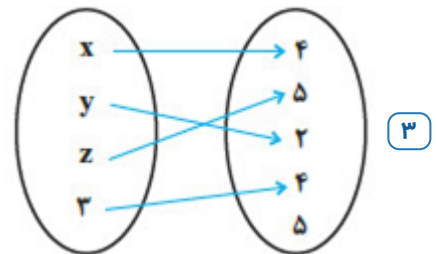
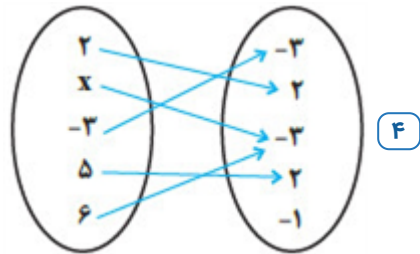
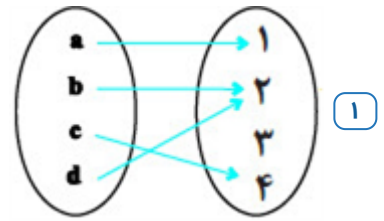
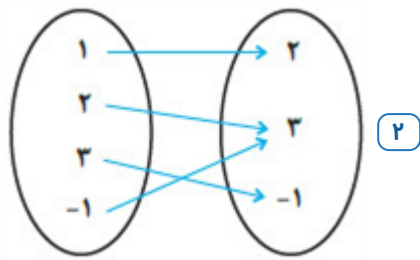
$\frac{3}{2}$ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

$-\frac{5}{2}$ (۱)

۷ تعداد اعضای برد کدام تابع از بقیه کمتر است؟



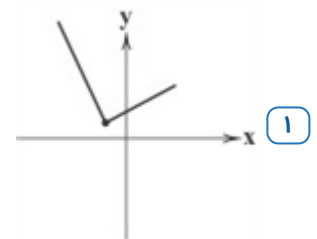
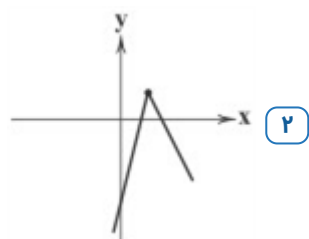
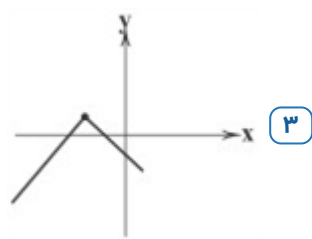
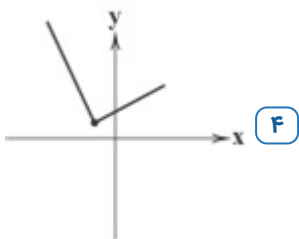
۸ رابطه بین درجه دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. اگر دمای یک جسم $15^\circ C$

درجه سانتی‌گراد کاهش یابد. دمای آن برحسب فارنهایت چگونه تغییر می‌کند؟

۱ ۲۷ درجه فارنهایت افزایش می‌یابد. ۲ ۲۷ درجه فارنهایت کاهش می‌یابد.

۳ ۵۹ درجه فارنهایت افزایش می‌یابد. ۴ ۵۹ درجه فارنهایت کاهش می‌یابد.

۹ اگر $f(x)$ یک تابع همانی و $g(x) = |3x - 1|$ آن‌گاه نمودار $(f - g)(x)$ کدام است؟



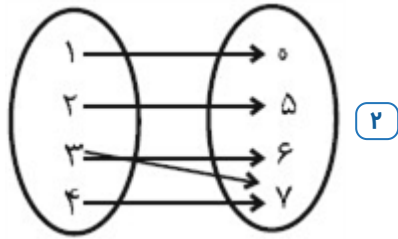
۱۰ معادله‌ی خطی که از رأس سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ بگذرد و موازی محور y ها رسم شود، کدام است؟

۱ $y = 4$ ۲ $x = 1$ ۳ $x = 4$ ۴ $y = 1$

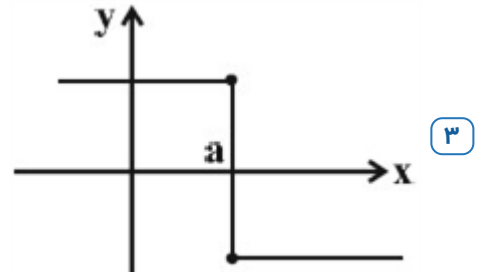
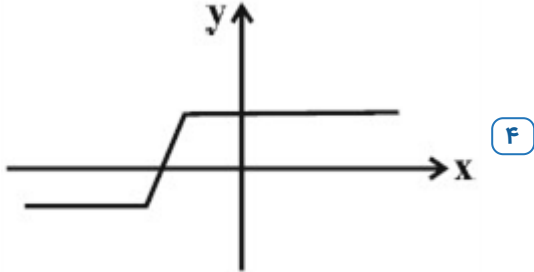
۱۱ سهمی به معادله‌ی $y = (x - 3)^2 - 4$ ، محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند، طول نقاط تقاطع کدام است؟

۱ ۵، ۱ ۲ ۷، ۱ ۳ -۵، -۱ ۴ -۷، -۱

۱۲ کدام گزینه نشانگر یک تابع است؟



۱ $F = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (0, 5)\}$



۱۳ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 - 2x - 2$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$ ، در نقطه‌ای با کدام طول، مشترک‌اند؟

۱ 3 و $1 - \sqrt{2}$ (۱) ۲ $1 + \sqrt{2}$ و -1 (۲) ۳ $1 + \sqrt{2}$ و 3 (۳) ۴ $1 - \sqrt{2}$ و -1 (۴)

۱۴ خط گذرنده از نقطه‌ی $(-5, 2)$ و عمود بر خط به معادله‌ی $2x - y = 6$ ، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱ -4 (۱) ۲ -3 (۲) ۳ 1 (۳) ۴ 2 (۴)

۱۵ خط به معادله‌ی $x = -2$ محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 - bx + c$ است. اگر این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کند، ماکزیمم مقدار سهمی کدام است؟

۱ 4 (۱) ۲ 5 (۲) ۳ 6 (۳) ۴ 7 (۴)

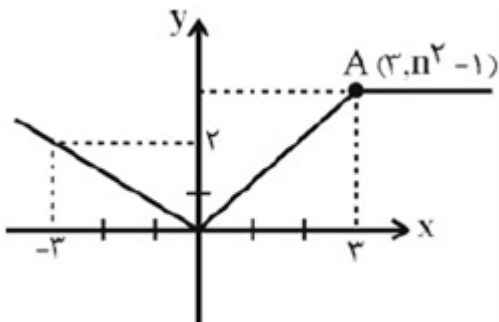
۱۶ نمودار مختصاتی تابع $2x + 3y - 6 = 0$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۱ چهارم (۱) ۲ سوم (۲) ۳ دوم (۳) ۴ اول (۴)

۱۷ اگر برد تابع $f(x) = \frac{x-1}{2}$ برابر با مجموعه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ باشد، دامنه‌ی این تابع کدام است؟

۱ $\{-1, 1, -3\}$ (۱) ۲ $\{-1, 1, 3\}$ (۲) ۳ $\{0, 1, 2\}$ (۳) ۴ $\{0, -1, -2\}$ (۴)

۱۸ در شکل زیر نقطه‌ی A روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول است. اگر شکل زیر نمودار تابع f باشد، حاصل $f(n^2) + f(-n^2)$ کدام است؟



۱ 1 (۱) ۲ $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ $\frac{11}{3}$ (۳) ۴ $\frac{17}{3}$ (۴)

۱۹ در جدول زیر مقدار $f(۴)$ کدام است؟

x	۱	۲	۳	۴
y	۰	۷	۲۶	۶۳

۳۵ (۴)

۵۱۱ (۳)

۲۱۵ (۲)

۱۵۲ (۱)

۲۰ معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(۳, -۱)$ گذشته و با خط $y - ۳x = ۰$ موازی باشد کدام است؟

$y = ۳x$ (۴)

$y = ۳x - ۹$ (۳)

$y = ۳x + ۸$ (۲)

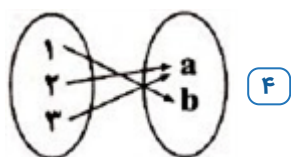
$y = ۳x - ۱۰$ (۱)

۲۱ کدام گزینه بیان‌گر تابع نیست؟

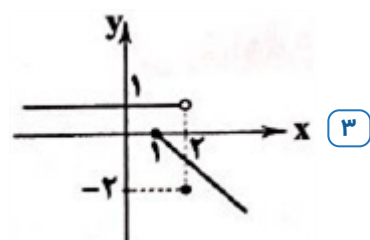
x	۲	۱	-۲
y	۰	-۱	۰

(۲)

$f = \{(۱, -۱), (-۱, ۱), (۱, -۱)\}$ (۱)



(۴)



(۳)

۲۲ کدام گزینه در مورد نمودار سهمی $y = (۲ - x)^۲ - ۳$ نادرست است؟

مختصات رأس: $(-۲, -۳)$ (۲)

محور تقارن: خط $x = ۲$ (۱)

دارای نقطه‌ی مینیمم (۴)

عرض نقطه‌ی تلاقی با محورها y ها: ۱ (۳)

۲۳ اگر $f(x) = ax^۲ + bx$ ، $f(۱) = -۴$ و $f(-۱) = ۲$ باشد، مقدار $a^۲ + b^۲$ کدام است؟

۲۵ (۴)

۲۰ (۳)

۱۳ (۲)

۱۰ (۱)

۲۴ تابع f به هر عدد حقیقی غیر صفر، پنج برابر معکوس همان عدد منهای نصف خود آن عدد را نسبت می‌دهد. حاصل $f(۱۰)$ کدام است؟

$-\frac{۹}{۲}$ (۴)

$-\frac{۷}{۲}$ (۳)

$-\frac{۵}{۲}$ (۲)

$-\frac{۳}{۲}$ (۱)

۲۵ اگر $f(x) = x^۲ + ۲x$ ، حاصل $f(x - ۱)$ کدام است؟

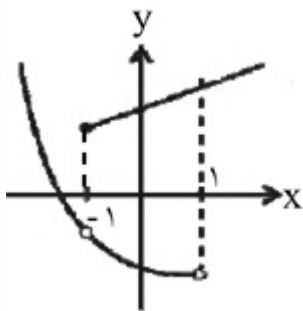
$x + ۱$ (۴)

$x^۲ + ۱$ (۳)

$x - ۱$ (۲)

$x^۲ - ۱$ (۱)

۲۶ نمودار زیر، مربوط به رابطه f است. کوچک‌ترین محدوده‌ای از مقادیر x ها، که با حذف آن رابطه f به یک تابع تبدیل می‌شود، کدام است؟



- ۱ $-1 \leq x < 1$ ۲ $x > -1$ ۳ $-1 < x \leq 1$ ۴ $x < 1$

۲۷ اگر نقاط $A(a, b)$ و $B(c, b)$ ، محل برخورد دو تابع $y = x^2 - 4x + 3$ و $y = -x^2 + 6x - 6$ باشد، در این صورت حاصل $a + c$ کدام است؟

- ۱ $\frac{5}{2}$ ۲ ۵ ۳ ۱۰ ۴ $\frac{5}{4}$

۲۸ رابطه زیر به ازای کدام مقدار a تابع نیست؟

$$f = \{(a + 5, 4), (2, 1 - a), (-1, 3), (a, a + 4)\}$$

- ۱ -3 ۲ صفر ۳ ۲ ۴ -1

۲۹ چه تعداد از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف) رابطه‌ای که در آن به هر شخص، کد ملی او نسبت داده می‌شود.

ب) رابطه‌ای که در آن به هر شخص، مادر او نسبت داده می‌شود.

پ) رابطه‌ای که در آن به هر شخص، برادر او نسبت داده می‌شود.

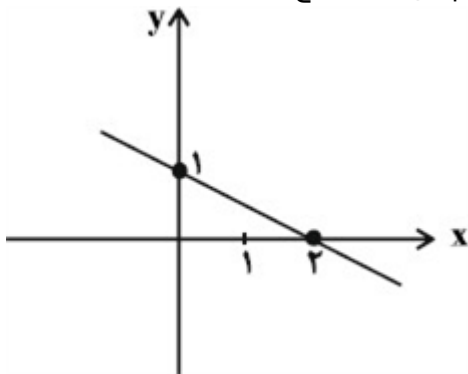
ت) رابطه‌ای که در آن به طول ضلع مربع، مساحت آن مربع نسبت داده می‌شود.

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۳۰ حداقل مقدار تابع $y = x^2 - 2x + 5$ و حداکثر مقدار تابع $y = -2x^2 + 3x + 1$ چقدر اختلاف دارند؟

- ۱ $-\frac{19}{8}$ ۲ $\frac{15}{8}$ ۳ $\frac{17}{8}$ ۴ $\frac{51}{8}$

۳۱ اگر نمودار تابع خطی $f(x) = ax - b$ به صورت زیر باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟



- ۱ $f(a) = \frac{3}{4}$ ۲ $f(a + b) = \frac{1}{4}$ ۳ $f(a - b) = \frac{3}{4}$ ۴ $f(b) = -\frac{3}{2}$

۳۲ اگر نمودار یک تابع خطی محور x ها را در نقطه $(3, 0)$ قطع کند و در نقطه‌ای به طول ۲ خط $y + x = 0$ را قطع کند، ضابطه آن کدام است؟

- ۱ $y = x - 3$ ۲ $y = x + 3$ ۳ $y = 2x + 1$ ۴ $y = -2x - 1$

۳۳ مساحت دایره از رابطه $S = \pi r^2$ به دست می‌آید. متغیر مستقل در این رابطه کدام است؟

- ۱ S ۲ π ۳ r ۴ r^2

۳۴ اگر دو زوج مرتب $A(2m + n, 8)$ و $B(2, 4^{2n-m})$ با یکدیگر برابر باشند، در این صورت mn کدام است؟

- ۱ صفر ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ ۵ ۴ $\frac{8}{3}$

۳۵ اگر $f(x) = x - 1$ و $f(g(x)) = x^2 - 2$ باشد، آنگاه مقدار $g(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۱ ۳ -2 ۴ -4

۳۶ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 2x+3 & 1 < x \leq 2 \\ 3x+5 & x > 2 \end{cases}$ حاصل مقادیر

$f(\sqrt{2}-1) + f(2\sqrt{2}-1) - f(3\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

- ۱ $-4\sqrt{2}-1$ ۲ $2\sqrt{2}-1$ ۳ $26\sqrt{2}+5$ ۴ $26\sqrt{2}-5$

۳۷ اگر مقدار می‌نیمم سهمی $y = mx^2 - 4x + 5$ بر مقدار ماکزیمم سهمی $y = (m-4)x^2 + 4x + 1$ منطبق باشد، معادله‌ی محور تقارن این دو سهمی کدام است؟

- ۱ $x = -2$ ۲ $x = -1$ ۳ $x = 1$ ۴ $x = 2$

۳۸ اگر $f(x) = (x + \sqrt{x})^2$ ، $g = \{(2, 4), (4, 3), (5, 3), (6, 2)\}$ و $f(g(a)) = 36$ ، در این صورت a کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ یا ۵ ۳ ۶ ۴ ۴

۳۹ به ازای کدام مقدار b ، رابطه‌ی $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, b^2 - 1), (b, 6), (3, 1)\}$ تابع است؟

- ۱ ± 2 ۲ فقط ۲ ۳ فقط -2 ۴ هیچ مقدار b

۴۰ اگر به ازای هر عدد حقیقی x و y رابطه‌ی $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ برقرار بوده و $f(30) = 20$ باشد، مقدار $f(40)$ کدام است؟ ($y \neq 0$)

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۵ ۳ ۲۵ ۴ ۳۲

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط اینکه نمودار داده شده، یک تابع باشد این است که هر خطی که موازی با محور y ها رسم می‌شود، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند، پس برای اینکه نمودار داده شده مربوط به یک تابع باشد، حداقل باید ۵ نقطه حذف کنیم.

۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به معادله تقاضا، ابتدا قیمت هر کالا را برحسب تعداد کالا به دست می‌آوریم:

$$x = 1200 - \epsilon p \Rightarrow \epsilon p = 1200 - x \Rightarrow p = 200 - \frac{x}{\epsilon}$$

قیمت کالا $\times$ تعداد کالا = درآمد

$$\Rightarrow R(x) = x \left(200 - \frac{x}{\epsilon} \right) \Rightarrow R(x) = 200x - \frac{x^2}{\epsilon}$$

سپس با کمک تابع هزینه و درآمد، تابع سود را به دست می‌آوریم و با توجه به اینکه بیشترین مقدار سود به ازای تولید ۴۵۰ کالا است، مقدار a را پیدا می‌کنیم:

هزینه - درآمد = سود

$$\text{سود} = 200x - \frac{x^2}{\epsilon} - (14400 - ax)$$

$$\text{سود} = 200x - \frac{x^2}{\epsilon} - 14400 + ax$$

$$\text{سود} = \frac{-x^2}{\epsilon} + (a + 200)x - 14400$$

$$\text{Max}(x) = \frac{-(\text{ضریب } x)}{2(\text{ضریب } x^2)} = 450 \Rightarrow \frac{-(a + 200)}{2\left(-\frac{1}{\epsilon}\right)} = 450 \Rightarrow a + 200 = 150 \Rightarrow a = -50$$

۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(1) = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \in f \\ f(2) = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in f \end{cases}, a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \frac{5 - 3}{1 - 2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$f(x) = ax + b \xrightarrow{a=-2} 5 = (-2 \times 1) + b \Rightarrow b = 7$$

$$f(x) = -2x + 7 \Rightarrow f(0) = 7, f(3) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{f(0)+2}{f(3)+8}} = \sqrt{\frac{7+2}{1+8}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A(3, 0) \Rightarrow m_{AB} = \frac{0 - 2}{3 - 0} \Rightarrow m_{AB} = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$B(0, 2) \Rightarrow -1 \leq y \leq 8 \Rightarrow -1 \leq -\frac{2}{3}x + 2 \leq 8 \Rightarrow -3 \leq -\frac{2}{3}x \leq 6 \xrightarrow{\times \left(-\frac{3}{2}\right)} \frac{9}{2} \geq x \geq -9$$

۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع سود شرکت را به دست می‌آوریم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 100x - (20x + 3000)$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + 100x - 20x - 3000 = -\frac{1}{4}x^2 + 80x - 3000 \xrightarrow[\text{مقایسه با فرم استاندارد } y=ax^2+bx+c]{\text{}} \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 80 \\ c = -3000 \end{cases}$$

حال تعداد کالایی که به ازای آن سود ماکسیمم می‌شود را می‌یابیم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = -\frac{80}{2 \times (-\frac{1}{4})} = 80$$

$$P(80) = -\frac{1}{4} \times (80)^2 + 80 \times 80 - 3000 = -\frac{1}{4} \times 6400 + 6400 - 3000 = -1600 + 6400 - 3000 = 200$$

۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از x و y دو نقطه می‌توانیم ضابطه تابع را بیابیم. اگر ضابطه تابع خطی را به

x	۱	$\frac{1}{2}$	۲	۳
y	-۱	a	۲	۵

صورت $f(x) = mx + n$ در نظر بگیریم، داریم:

$$f(1) = -1 \Rightarrow m \times (1) + n = -1 \Rightarrow m + n = -1 \quad (1)$$

$$f(2) = 2 \Rightarrow m \times (2) + n = 2 \Rightarrow 2m + n = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1, 2} \begin{cases} m + n = -1 \xrightarrow{\times(-1)} -m - n = 1 \\ 2m + n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - n = 1 \\ 2m + n = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - n = 1 \\ 2m - m = 2 + 1 \Rightarrow m = 3 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} -m - n = 1 \\ 3 + n = -1 \Rightarrow n = -4 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع به فرم $f(x) = 3x - 4$ است. با قرار دادن $x = \frac{1}{2}$ مقدار تابع یعنی a را می‌یابیم:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2} \xrightarrow{f(\frac{1}{2})=a} a = -\frac{5}{2}$$

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در نمایش پیکانی تابع، برد تابع اعضای مجموعه دوم است که به آن‌ها پیکان وارد می‌شود.

حال به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم.

$$۱) R = \{1, 2, 4\}$$

$$۲) R = \{2, 3, -1\}$$

$$۳) R = \{4, 5, 2\}$$

$$۴) R = \{-3, 2\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تعداد اعضای برد تابع گزینه ۴ از بقیه کمتر است.

۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه تابع خطی درمی‌یابیم که به ازای هریک درجه تغییر دما برحسب درجه

سانتی‌گراد دما برحسب فارنهایت $\frac{9}{5}$ درجه سلسیوس تغییر می‌کند، حال اگر دما ۱۵ درجه سانتی‌گراد کاهش یابد دما

برحسب فارنهایت $27 = \frac{9}{5} \times 15$ درجه فارنهایت کاهش می‌یابد.

۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است و داریم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x - |3x - 1|$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

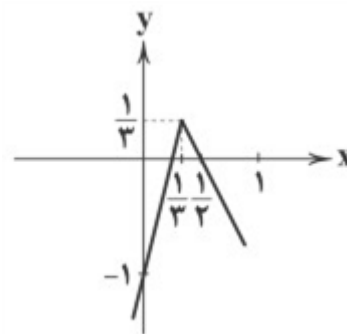
از آنجا که ریشه عبارت داخل قدرمطلق برابر است با:

پس:

$$x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) - g(x) = x - (3x - 1) = x - 3x + 1 = -2x + 1$$

$$x < \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) - g(x) = x - (-3x + 1) = x + 3x - 1 = 4x - 1$$

و خواهیم داشت:



۱۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ با رأس s داریم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y_s = -(1)^2 + 2(1) + 3 = 4$$

$x = 1$: معادله‌ی خط موازی محور y ها و گذرنده از نقطه‌ی $(1, 4)$

۱۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = (x - 3)^2 - 4$$

برای یافتن محل تلاقی سهمی با محور x ها کافی است در معادله‌ی داده شده به جای y عدد صفر را قرار دهیم:

$$0 = (x - 3)^2 - 4 \Rightarrow (x - 3)^2 = 4 \Rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x - 3 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \Rightarrow x = 2 + 3 = 5 \Rightarrow A(5, 0) \\ x - 3 = -2 \Rightarrow x = -2 + 3 = 1 \Rightarrow B(1, 0) \end{cases}$$

۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تشریح سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: دو زوج مرتب $(1, 3)$ و $(1, 2)$ دارای مؤلفه‌ی اول یکسان و مؤلفه‌ی دوم متفاوت هستند، پس تابع نیست.

گزینه‌ی ۲: باید از هر عضو مجموعه‌ی سمت چپ دقیقاً یک پیکان خارج شود. در حالی که از ۳ دو پیکان خارج شده است.

گزینه‌ی ۳: خط قائم $x = a$ نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.

گزینه‌ی ۴: هر خط قائم موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع است.

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$\xrightarrow{x>0} x^2 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{قق } x=3 \\ \text{قق } x=-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x<0} x^2 - 2x - 2 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \text{قق } 1 + \sqrt{2} \\ \text{قق } 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$m = 2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - (-5) = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y + 5 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 4 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$y = -2x^2 - bx + c \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -b \\ c = c \end{cases}$$

$$\text{محور تقارن: } x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -2 = \frac{-(-b)}{2(-2)} \Rightarrow -2 = \frac{b}{-4} \Rightarrow b = 8$$

از طرفی سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است پس $c = -1$

$$y = -2x^2 - 8x - 1$$

ماکزیمم مقدار سهمی، همان عرض رأس سهمی است، پس داریم:

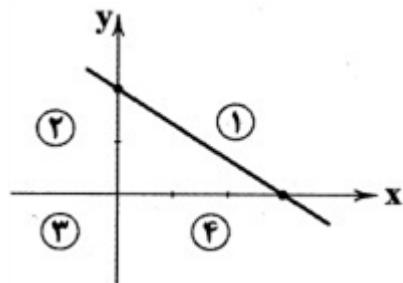
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2(-2)^2 - 8(-2) - 1 = 7 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با دو نقطه از یک خط می‌توان آن را رسم کرد. این نقاط دلخواه هستند و شما می‌توانید از ۱۶

هر x و y ای که در معادله‌ی خط صدق می‌کند، استفاده می‌کنید.

$$2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 3 & 0 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$$

در دستگاه مختصات، این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم و نمودار خط به صورت زیر به دست می‌آید:



با توجه به نمودار، این خط از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.

۱۷) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. منظور از برد تابع مقادیر مربوط به y است. کافی است به جای y (یا همان $f(x)$) مقدار -۱ ، ۰ و ۱ را قرار دهیم و x های موردنظر (دامنه) را می‌یابیم:

$$y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} -1 = \frac{x-1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x-1 = -2 \Rightarrow x = -2+1 = -1 \\ 0 = \frac{x-1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 1 = \frac{x-1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x-1 = 2 \Rightarrow x = 2+1 = 3 \end{cases}$$

دامنه‌ی تابع به صورت $\{-1, 1, 3\}$ می‌باشد.

۱۸) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A(3, n^2 - 1) \xrightarrow{\text{روی نیمساز ناحیه اول}} n^2 - 1 = 3 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n^4 = 16$$

تابع f تابعی سه ضابطه‌ای است و به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x & \text{و } x < 0 \\ x & \text{و } 0 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{و } x > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-n^2) + f(n^4) = f(-4) + f(16) = -\frac{2}{3} \times (-4) + 3 = \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{17}{3}$$

۱۹) گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^3 - 1 \rightarrow f(6) = 6^3 - 1 = 216 - 1 = 215$$

۲۰) گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. چون گفته موازی‌اند پس شیب‌ها برابرند.

$$y = 3x \rightarrow m = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = 3(x - 3)$$

$$y = 3x - 10$$

۲۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار گزینه‌ی ۳ معرف تابع نیست، زیرا اگر خطی موازی محور y ها رسم شود، تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) در زوج‌مرتب‌ها اگر مولفه‌های اول یکسان باشد، رابطه تابع است به شرط آن‌که مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم یکسان باشد.

(۲) تابع است، زیرا به ازای هر x فقط یک y وجود دارد.

(۴) در نمودار پیکانی یک رابطه، هرگاه از هر عضو مجموعه‌ی اول دقیقاً یک پیکان خارج شود، آن رابطه تابع است.

۲۲) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. a (ضریب پشت پرانتز) عددی مثبت است، پس سهمی دارای نقطه‌ی مینیمم است (درستی گزینه‌ی ۴).

$$2 - x = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$$

خط تقارن، خط $x = 2$ است (درستی گزینه‌ی ۱).

$$\xrightarrow{x=0} y = (2 - 0)^2 - 3 = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

عرض محل تلاقی سهمی با محور y ها عدد ۱ است (درستی گزینه‌ی ۳)، اما رأس سهمی نقطه‌ای به مختصات $(2, -3)$ است. (نادرستی گزینه‌ی ۲)

$$f(x) = ax^2 + bx$$

$$f(1) = -4 \Rightarrow -4 = a(1)^2 + b(1) \Rightarrow a + b = -4$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow 2 = a(-1)^2 + b(-1) \Rightarrow a - b = 2$$

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$2a = -2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a + b = -4 \Rightarrow -1 + b = -4 \Rightarrow b = -4 + 1 \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر عدد حقیقی مفروض را x در نظر بگیریم، ضابطه‌ی تابع f به صورت

$$f(x) = 5\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(x) \text{ یا } f(x) = \frac{5}{x} - \frac{x}{2} \text{ است. حال داریم:}$$

$$f(10) = \frac{5}{10} - \frac{10}{2} = \frac{1}{2} - 5 = \frac{1-10}{2} = -\frac{9}{2}$$

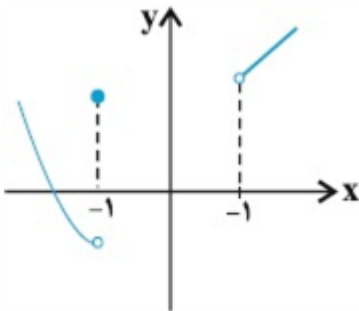
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۵

$$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 = x^2 - 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار صورت سؤال ملاحظه می‌شود که در فاصله بین ۱ و -۱ و در نقطه ۱، هر خط

موازی محور لایها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین با حذف فقط محدوده $-1 < x \leq 1$ از مقادیر x

رابطه مذکور به یک تابع تبدیل می‌شود. در این صورت نمودار تابع به صورت زیر می‌باشد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن محل تقاطع دو تابع، ضابطه آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 6x - 6 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با فرم استاندارد}} \begin{cases} a = 2 \\ b = -10 \\ c = 9 \end{cases}$$

حل از روش کلی:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(2)(9) = 100 - 72 = 28$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

x_1 و x_2 یا همان a و c طول نقاط تقاطع دو تابع هستند، در نتیجه:

$$a + c = x_1 + x_2 = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} + \frac{5 - \sqrt{7}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به ازای تک تک گزینه‌ها تابع بودن رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$۱) a = -۳ \Rightarrow f = \{(-۳ + ۵, ۴), (۲, ۱ - (-۳)), (-۱, ۳), (-۳, -۳ + ۴)\}$$

$$= \{(۲, ۴), (۲, ۴), (-۱, ۳), (-۳, ۱)\} \text{ تابع است.}$$

$$۲) a = ۰ \Rightarrow f = \{(۰ + ۵, ۴), (۲, ۱ - ۰), (-۱, ۳), (۰, ۰ + ۴)\}$$

$$= \{(۵, ۴), (۲, ۱), (-۱, ۳), (۰, ۴)\} \text{ تابع است.}$$

$$۳) a = ۲ \Rightarrow f = \{(۲ + ۵, ۴), (۲, ۱ - ۲), (-۱, ۳), (۲, ۲ + ۴)\}$$

$$= \{(۷, ۴), (۲, -۱), (-۱, ۳), (۲, ۶)\}$$

تابع نیست؛ به دلیل برابری مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(۲, -۱)$ و $(۲, ۶)$ و متفاوت بودن مؤلفه‌های دوم آن‌ها.

$$۴) a = -۱ \Rightarrow f = \{(-۱ + ۵, ۴), (۲, ۱ - (-۱)), (-۱, ۳), (-۱, -۱ + ۴)\}$$

$$= \{(۴, ۴), (۲, ۲), (-۱, ۳), (-۱, ۳)\} \text{ تابع است.}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها مورد (پ) تابع نیست، زیرا یک شخص ممکن است چند برادر داشته باشد که در این صورت رابطه هر شخص با برادرانش تابع نیست.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن حداقل مقدار تابع $y = x^2 - ۲x + ۵$ با استفاده از مربع کامل کردن داریم:

$$y = x^2 - ۲x + ۵ \Rightarrow y = x^2 - ۲x + ۱ + ۴ \Rightarrow y = (x - ۱)^2 + ۴$$

حداقل مقدار تابع در نقطه رأس سهمی یعنی نقطه $(۱, ۴)$ می‌باشد و حداقل مقدار تابع $y_{\min} = ۴$ است.

برای به دست آوردن حداکثر مقدار تابع $y = -۲x^2 + ۳x + ۱$ ابتدا طول رأس سهمی را می‌یابیم:

$$y = -۲x^2 + ۳x + ۱ \xrightarrow[\text{با مقایسه با فرم استاندارد } y = ax^2 + bx + c]{\begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \\ c = ۱ \end{cases}}$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = \frac{-۳}{۲ \times (-۲)} = \frac{۳}{۴}$$

$$y = -۲ \times \left(\frac{۳}{۴}\right)^2 + ۳ \times \frac{۳}{۴} + ۱ = -۲ \times \frac{۹}{۱۶} + \frac{۹}{۴} + ۱ = \frac{-۹}{۸} + \frac{۹}{۴} + ۱ = \frac{۹}{۸} + ۱ = \frac{۱۷}{۸}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل این دو تابع برابر است با:

$$۴ - \frac{۱۷}{۸} = \frac{۳۲}{۸} - \frac{۱۷}{۸} = \frac{۱۵}{۸}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، ابتدا ضابطه آن را به دست می‌آوریم:

$$A(0, 1), B(2, 0)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

با مقایسه با ضابطه صورت سؤال $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$ به دست می‌آوریم، حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$1) f(a) = -\frac{1}{2}a + 1 \xrightarrow{a = -\frac{1}{2}} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

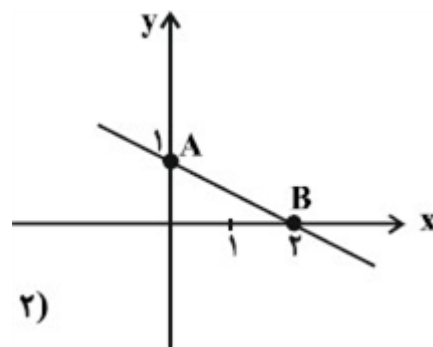
$$2) f(a+b) = -\frac{1}{2}(a+b) + 1 \xrightarrow{a+b = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$3) f(a-b) = -\frac{1}{2}(a-b) + 1 \xrightarrow{a-b = -\frac{1}{2} - (-1)}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$4) f(b) = -\frac{1}{2}b + 1 \xrightarrow{b = -1} f(-1) = -\frac{1}{2} \times (-1) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا عرض نقطه برخورد تابع خطی مورد نظر را با خط $2y + x = 0$ به دست می‌آوریم. به ازای $x = 2$ هر دو دارای y یکسان می‌باشند، داریم:

$$2y + x = 2 \xrightarrow{x=2} 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

تابع خطی مورد نظر از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(3, 0)$ می‌گذرد، حال داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_{AB} = \frac{0 - (-1)}{3 - 2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y - y_B = m_{AB}(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = 1 \times (x - 3) \Rightarrow y = x - 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در رابطه $S = \pi r^2$ ، مساحت دایره (S) تابعی از متغیر مستقل r است. همچنین π یک عدد ثابت و S متغیر وابسته است.

۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته ۱: اگر $(a, b) = (c, d)$ ، آن گاه $a = c, b = d$ نکته ۲: $(ab)^c = a^{bc}$ نکته ۳: اگر $a^b = a^c$ ، آن گاه $b = c$

با توجه به نکته ۱ می توان نوشت:

$$\begin{cases} 2 = 2m + n & (1) \\ 4^{2n-m} = 8 \Rightarrow (2^2)^{2n-m} = 2^3 \Rightarrow 2^{4n-2m} = 2^3 \Rightarrow 4n - 2m = 3 & (2) \end{cases}$$

معادلات (۱) و (۲) را در یک دستگاه نوشته و آن را حل می کنیم:

$$+ \begin{cases} 2m + n = 2 \\ 4n - 2m = 3 \end{cases}$$

$$5n = 5 \Rightarrow n = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله (۱)}} m = \frac{1}{2}$$

$$mn = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad \text{بنابراین}$$

۳۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = x^2 - 2 \xrightarrow{f(x)=x-1} g(x) - 1 = x^2 - 2$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 1 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

۳۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1) + 1 = \sqrt{2}$$

$$f(2\sqrt{2} - 1) = 2(2\sqrt{2} - 1) + 3 = 4\sqrt{2} + 1$$

$$f(3\sqrt{2} - 1) = 3(3\sqrt{2} - 1) + 5 = 9\sqrt{2} + 2$$

۳۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می نیمم یا ماکزیمم سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از رابطه $y = \frac{c - b^2}{4a}$ تعیین می شود. بنابراین:

$$\frac{4m(5) - (-4)^2}{4m} = \frac{4(m-4)(1) - (4)^2}{4(m-4)} \Rightarrow (5m-4)(m-4) = m(m-8)$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 2x^2 - 4x + 5$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} = 1 \quad \text{معادله محور تقارن:}$$

۳۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از دامنه ی تابع g شروع می کنیم و تابع $f \circ g$ را تشکیل می دهیم:

$$x = 2 : f(g(2)) = f(4) = (4 + \sqrt{4})^2 = 36$$

$$x = 4 : f(g(4)) = f(3) = (3 + \sqrt{3})^2$$

$$x = 5 : f(g(5)) = f(3) = (3 + \sqrt{3})^2$$

$$x = 6 : f(g(6)) = f(2) = (2 + \sqrt{2})^2$$

در نتیجه تنها به ازای ورودی ۲ خروجی $f \circ g$ برابر ۳۶ است، پس $a = 2$.

۳۹

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نکته: یک رابطه که به صورت زوج مرتب داده شده است، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌ی اول یکسان نباشند، یعنی اگر مؤلفه‌ی اول دو زوج مرتب مساوی بود، مؤلفه‌ی دومشان هم مساوی باشد.

$$(1, 3), (1, b^2 - 1) \in f \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} b^2 - 1 = 3 \Rightarrow b^2 = 4$$

اما به ازای $b = 2$ رابطه به صورت $f = \{(1, 3), (2, 4), (1, 3), (2, 6), (3, 1)\}$ درمی‌آید که تابع نیست، پس فقط $b = -2$ قابل قبول است.

۴۰

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(40) = f\left(30 \times \frac{40}{30}\right) = \frac{f(30)}{\frac{40}{30}} = \frac{3}{4} f(30) = \frac{3}{4} \times 20 = 15$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

