



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون :

تست هندسه دوازدهم ریاضی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۸/۱۰

درس ۲

۱ سه بردار $\vec{a} = (2, -1, -2)$ ، $\vec{b} = (-1, 1, 0)$ و $\vec{c} = (0, -1, 1)$ مفروض‌اند. اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ بر بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

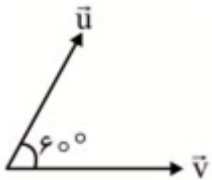
۲ سه نقطه $A = (1, -1, 3)$ ، $B = (-1, 1, 5)$ و $C = (-3, 1, -1)$ رأس‌های یک مثلث‌اند. اندازه بلندترین میانه این مثلث، برابر کدام است؟

$\sqrt{38}$ (۱) $\sqrt{35}$ (۲) $\sqrt{34}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴)

۳ اگر $z^2 + y^2 + x^2 = 64$ باشد، بیشترین مقدار $|x + y - z|$ چقدر است؟

۲۴ (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۱۲ (۴)

۴ در شکل زیر، $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6\sqrt{3}$ می‌باشد. مساحت مثلث حاصل از دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ کدام است؟



$4/5$ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴)

۵ در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع BC و DC هستند اگر $\vec{AM} + \vec{AN} = k\vec{AC}$ باشد k کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

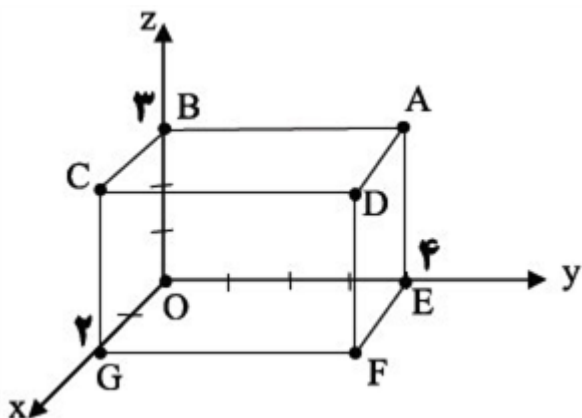
۶ در مثلث ABC، $\vec{AB} = (2, -1, 2)$ و $\vec{AC} = (1, 2, 3)$ می‌باشد. فاصله‌ی وسط AB از وسط AC کدام است؟

$\sqrt{35}$ (۱) $\sqrt{11}$ (۲) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$ (۴)

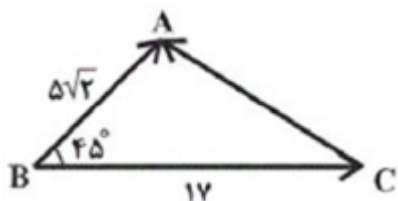
۷ اگر سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با اندازه‌های ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه $a + b + c = 0$ صدق کنند، حاصل $|a - b|$ کدام است؟

۲ (۱) ۷ (۲) ۱ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴)

- ۸) وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = 0$ ، $x = 2$ و $y = 0$ ، $y = 4$ و $z = 0$ ، $z = 3$ هستند. الف) مختصات نقطه A را مشخص کنید. ب) معادلات مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.



- ۹) در شکل مقابل، حاصل $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$ کدام است؟



- ۱) -۱۶۰ ۲) -۱۹۰ ۳) -۲۰۰ ۴) -۲۰۴

- ۱۰) اگر $|a| = 2$ ، $|b| = 3$ و $|(a \cdot b)(a \times b)| = 9$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار a و b کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) 135° ۲) 30° ۳) 60° ۴) 15°

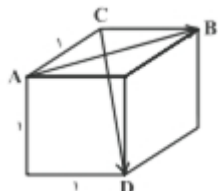
- ۱۱) اگر داشته باشیم $a = (2, 1, 0)$ و $b = (3, 0, 3)$ و $c = (2, 0, m)$ و زاویه‌ی حاده‌ی بین بردارهای a و b، با زاویه‌ی حاده‌ی بین بردارهای b و c برابر باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) -۲۰ ۳) -۱۰ ۴) ۱۰

- ۱۲) اگر زاویه‌ی بردار $c = (m, n-1, 5)$ با هر دو بردار $a = (3, 4, 0)$ و $b = (2, -2, 1)$ یکسان باشد، در این صورت حاصل $m + 2n$ کدام است؟ (بردارهای a، b و c هم صفحه هستند.)

- ۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) -۵ ۴) -۲۵

- ۱۳) با توجه به مکعب شکل مقابل، حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ کدام است؟



- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) صفر

۱۴ اگر اندازه‌های مجموع و تفاضل دو بردار a و b ، به ترتیب 4 و $2\sqrt{3}$ و مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، آن‌گاه زاویه بین دو بردار کدام است؟

$\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{6}$ (۱)

۱۵ اندازه‌ی تصویر بردار a روی صفحات xy ، xz و yz به ترتیب $\sqrt{23}$ ، $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{7}$ است. اندازه‌ی بردار a کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

۱۶ قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (1, \alpha, \alpha + 1)$ نسبت به صفحه‌ی yz ، از تصویر همین نقطه روی محور z ها به فاصله ۲ می‌باشد، α کدام است؟

$\pm\sqrt{3}$ (۴)

$\pm\sqrt{2}$ (۳)

± 2 (۲)

± 1 (۱)

۱۷ دو بردار a و b مفروض‌اند، به گونه‌ای که $|a| = 5$ و $|b| = 4$ ، اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی دو بردار a و $a + b$ برابر ۱۲ واحد باشد، آن‌گاه $(a + b) \cdot a$ برابر کدام است؟ (زاویه‌ی بین a و b ، حاده است.)

۴۵ (۴)

۴۱ (۳)

۳۳ (۲)

۲۹ (۱)

۱۸ بردارهای a و b ، همراستا هستند و در خلاف جهت یکدیگر قرار دارند. اگر $|a| > |b|$ ، آن‌گاه رابطه‌ی بین دو بردار a و b در کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند صحیح باشد؟

$2a - 3b = 0$ (۴)

$2a + 3b = 0$ (۳)

$3a - 2b = 0$ (۲)

$3a + 2b = 0$ (۱)

۱۹ قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (3, 2, 1)$ نسبت به محورهای Ox و Oy به ترتیب نقاط B و C می‌باشند. اگر نقاط A, B, C, D چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع به قطر AD باشند، مختصات رأس D کدام است؟

$(-6, -4, -1)$ (۴)

$(0, 0, -1)$ (۳)

$(-3, -2, 1)$ (۲)

$(-3, -2, -3)$ (۱)

۲۰ حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار به اندازه‌های $|a| = 5$ ، $|b| = 3$ و $|c| = 4$ بنا می‌شود برابر ۴۵ است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار b و c برابر 60° باشد، اندازه‌ی بردار $a \times (b \times c)$ کدام است؟

$18\sqrt{3}$ (۴)

$9\sqrt{3}$ (۳)

$15\sqrt{3}$ (۲)

$12\sqrt{3}$ (۱)

۲۱ مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $3k + 2j + i$ و $k - 2j + 3i$ ساخته شود برابر $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ است. a کدام است؟

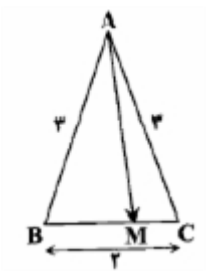
$3, -\frac{17}{13}$ (۴)

$3, -\frac{23}{13}$ (۳)

$-3, \frac{17}{13}$ (۲)

$-3, \frac{23}{13}$ (۱)

۲۲ در مثلث متساوی الساقین ABC ، M نقطه‌ای روی قاعده است به طوری که $BM = 2MC$ ، حاصل $|\vec{AM} \times \vec{BC}|$ برابر است با:



۴ $\sqrt{2}$ (۴)

۳ $\sqrt{2}$ (۳)

۲ $\sqrt{2}$ (۲)

۱ $\sqrt{2}$ (۱)

۲۳ نقاط $A = (-1, 2, 1)$ ، $B = (2m+1, 3, m)$ و $C = (-1, 5, m+4)$ سه رأس مثلث ABC را تشکیل می‌دهند. اگر طول میانه‌ی AM از این مثلث برابر ۲ باشد، مجموع مؤلفه‌های نقطه‌ی M کدام است؟

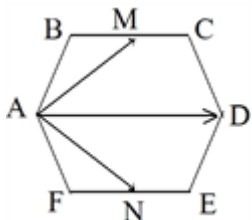
صفر (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۲۴ مطابق شکل، نقاط M و N اواسط دو ضلع مقابل از یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع ۲ هستند. طول بردار حاصل $\vec{AM} + \vec{AD} + \vec{AN}$ کدام است؟



۴ $\sqrt{3}$ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۲۵ بردارهای غیرصفر a و b طوری مفروض‌اند که اولاً $|a| = 2|b|$ و ثانیاً بردارهای $a+b$ و $a-3b$ بر هم عمود هستند. زاویه‌ی بین دو بردار a و b کدام است؟

150° (۴)

120° (۳)

30° (۲)

60° (۱)

۲۶ زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر 30° است. اگر $|a| = 3$ و $|b| = \frac{1}{3}$ و $c = a \times b$ ، آن‌گاه اندازه‌ی بردار $(c+a)$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۲۷ بین بردارهای واحد a و b رابطه‌ی $(a-b) \cdot (a+b) = 1$ برقرار است. مساحت متوازی‌الاضلاع‌ی که بردارهای $a+b$ و $a-2b$ اقطار آن هستند، کدام است؟

۳ (۴)

۷ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{7}{2}$ (۱)

۲۸ اگر M و N به ترتیب قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (3, -4, -2)$ نسبت به صفحه‌ی xOz و محور x ها باشد، فاصله‌ی وسط MN تا مبدأ مختصات چه قدر است؟

$\sqrt{29}$ (۴)

$\sqrt{13}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

۵ (۱)

۲۹) نقاط $A(1, 0, -1)$ و $B(2, 1, 0)$ و $D(0, 2, 1)$ مفروض اند. مساحت متوازی الاضلاع ABCD کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۳۰) اگر $(1, 4, 2) : \vec{a} + \vec{b}$ و $(2, 2, 1) : \vec{a} + 2\vec{b}$ باشند اندازه‌ی ضرب خارجی $|\vec{a} \times \vec{b}|$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

۱ ابتدا بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (1, 1, 1)$$

اکنون بردار $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ را تعیین می‌کنیم:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (1, -4, 3)$$

اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ بر بردار $\vec{b}$ برابر است با:

$$\frac{|(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|(1, -4, 3) \cdot (-1, 1, 0)|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{|-1-4+0|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نخست، اندازه‌های ضلع‌های این مثلث را به دست می‌آوریم؛ داریم:

$$\vec{AB} = (-2, 2, 2), \vec{AC} = (-4, 2, -4), \vec{BC} = (-2, 0, -6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \\ |\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6 \\ |\vec{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10} \end{cases}$$

می‌دانیم که بلندترین میانه، بر کوتاه‌ترین ضلع فرود می‌آید و چون $2\sqrt{3} < 6 < 2\sqrt{10}$ ، پس باید نقطه وسط ضلع AB را

بیابیم و اندازه بردار $\vec{CM}$ را حساب کنیم:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right) = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (0, 0, 4)$$

$$\Rightarrow \vec{CM} = (x_M - x_C, y_M - y_C, z_M - z_C) = (0 - (-3), 0 - 1, 4 - (-1)) = (3, -1, 5)$$

$$\Rightarrow |\vec{CM}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به قضیه‌ی کوشی - شوارتز در کتاب هندسه دوازدهم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{a} \cdot \vec{b}| &\leq |\vec{a}| |\vec{b}| \\ \vec{a} &= (2x, 3y, z) \\ \vec{b} &= (2, 2, -1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow |4x + 6y - z| \leq \underbrace{\sqrt{4x^2 + 9y^2 + z^2}}_{64} \underbrace{\sqrt{4+4+1}}_9$$

$$|4x + 6y - z| \leq 24$$

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد، آنگاه $\tan \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{\vec{u} \cdot \vec{v}}$ در اینجا $\theta = 60^\circ$ و داریم:

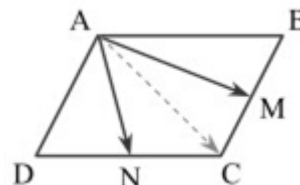
$$\tan 60^\circ = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{6\sqrt{3}} \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = 18$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{18}{2} = 9$$

بنابراین:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از بردار میانه در مثلث‌های ABC و ADC داریم:

۵



$$\begin{cases} \vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \\ \vec{AN} = \frac{\vec{AC} + \vec{AD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{AM} + \vec{AN} = \frac{\vec{AB} + \vec{AD} + 2\vec{AC}}{2}$$

چون ABCD متوازی‌الاضلاع است پس $\vec{AD} = \vec{BC}$ و بنابراین:

$$\vec{AM} + \vec{AN} = \frac{\vec{AB} + \vec{BC} + 2\vec{AC}}{2} = \frac{\vec{AC} + 2\vec{AC}}{2} = \frac{3}{2}\vec{AC} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

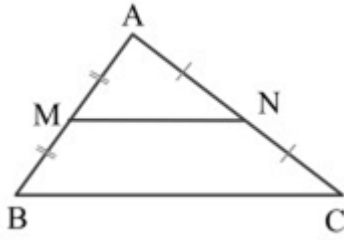
۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

راه اول: می‌دانیم اگر O مبدأ مختصات باشد آنگاه:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}, \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$$

داریم:



$$\vec{AB} = (2, -1, 2)$$

$$\vec{AC} = (1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow \vec{OB} - \vec{OA} = (2, -1, 2), \vec{OC} - \vec{OA} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (\vec{OC} - \vec{OA}) - (\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{AC} - \vec{AB}$$

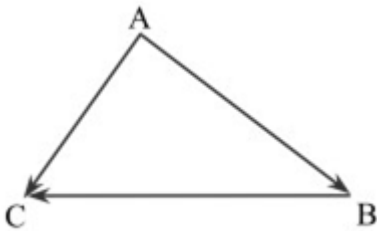
$$\Rightarrow \vec{BC} = (1, 2, 3) - (2, -1, 2) = (-1, 3, 1)$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

از طرف دیگر $MN \parallel BC$ و $MN = \frac{BC}{2}$ پس:

راه دوم:



$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (1, 2, 3) - (2, -1, 2) = (-1, 3, 1)$$

$$\Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{11} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow |a + b| = |-c|$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |c|^2 \Rightarrow 9 + 16 + 2a \cdot b = 49 \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{2} \times 24 = 12$$

$$\Rightarrow |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b = 9 + 16 - (2 \times 12)$$

$$\Rightarrow |a - b|^2 = 1 \Rightarrow |a - b| = 1$$

الف) $A(0, 4, 3)$

$$\text{ب) AD : } \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{CDFG : } \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داده شده داریم:

$$\vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA} \Rightarrow \vec{CA} = \vec{BA} - \vec{BC}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = \vec{BC} \cdot (\vec{BA} - \vec{BC}) = \vec{BC} \cdot \vec{BA} - |\vec{BC}|^2$$

$$= |\vec{BC}| |\vec{BA}| \cos 45^\circ - |\vec{BC}|^2 = 17 \times 5 \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 17^2 = -204$$

۹

۱۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر زاویه بین دو بردار a و b برابر α باشد:

$$|a \cdot b| = |a| |b| \cos \alpha \Rightarrow (|a| |b| \cos \alpha)(|a| |b| \sin \alpha) = \pm 9$$

$$|a|^2 |b|^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = \pm 9 \Rightarrow 4 \times 9 \times \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \pm 9 \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ \\ 2\alpha = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ \end{cases} \\ \sin 2\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 210^\circ \Rightarrow \alpha = 105^\circ \\ 2\alpha = 330^\circ \Rightarrow \alpha = 165^\circ \end{cases} \end{cases}$$

۱۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر زاویه بین a و b را θ و زاویه بین b و c را θ' بنامیم، آن‌گاه:

$$\cos \theta = \frac{|a \cdot b|}{|a| |b|} = \frac{6}{\sqrt{18} \sqrt{5}}$$

$$\cos \theta' = \frac{|b \cdot c|}{|b| |c|} = \frac{(6 + 3m)^2}{18(6 + m^2)}$$

$$\Rightarrow 3(6 + m^2) = 5(6 + 3m)^2 \Rightarrow 6(6 + m^2) = 5(2 + m)^2$$

$$\Rightarrow 6(6 + m^2) = 5(4 + 4m + m^2)$$

$$\Rightarrow 6m^2 - 4m^2 + 20m + 20 - 16 = 0 \Rightarrow m^2 + 20m + 4 = 0$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{20}{1} = -20$$

اگر m_1 و m_2 ریشه‌های این معادله باشند، آن‌گاه:

۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بردار c در راستای نیمساز دو بردار a و b قرار دارد و از طرفی می‌دانیم $e_a + e_b$ در حقیقت

بیانگر راستای نیمساز است، حال داریم:

$$\begin{cases} e_a = \frac{a}{|a|} \Rightarrow e_a = \frac{1}{\sqrt{9+16}}(3, 4, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) \\ e_b = \frac{b}{|b|} \Rightarrow e_b = \frac{1}{\sqrt{4+9}}(2, -2, 1) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_a + e_b = \left(\frac{19}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{5} \right) \parallel (19, 2, 5)$$

$$\begin{cases} m = 19 \\ n - 1 = 2 \Rightarrow n = 3; m + 2n = 19 + 2(3) = 25 \end{cases}$$

از مقایسه‌ی بردار حاصل با بردار c داریم:

۱۳

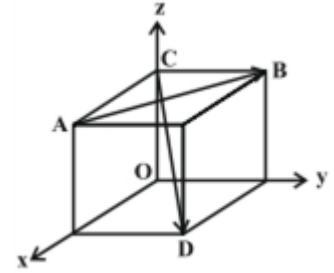
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید که مکعب واحد را روی محورهای مختصات در نظر گرفته‌ایم. در این صورت داریم:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = (1, 1, -1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (-1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1) = -1 + 1 + 0 = 0$$

در نتیجه داریم:



۱۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|a+b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b} = \sqrt{16}$$

$$|a-b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b} = \sqrt{12}$$

$$4a \cdot b = 4 \Rightarrow a \cdot b = 1$$

اگر دو عبارت فوق را از هم کم کنیم، داریم:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} |a \times b| \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} |a \times b| \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{3}$$

$$\frac{|a \times b|}{a \cdot b} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

۱۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم مختصات بردار a به صورت $a = (x, y, z)$ باشد. طبق فرض داریم:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13} \Rightarrow x^2 + y^2 = 13$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 + z^2 = 12$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow y^2 + z^2 = 18$$

$$(x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2) = 43$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 14 \Rightarrow |a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14} = \sqrt{2}$$

با جمع طرفین تساوی‌های به دست آمده داریم:

$$A = (1, \alpha, \alpha + 1) \xrightarrow[\text{صفحه ی } yz]{\text{قرینه ی نسبت}} A_1 = (-1, \alpha, \alpha + 1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۶

$$A = (1, \alpha, \alpha + 1) \xrightarrow[\text{محور } z]{\text{تصویر روی}} A_2 = (0, 0, \alpha + 1)$$

$$|A, A_2| = \sqrt{(0+1)^2 + (0-\alpha)^2} \Rightarrow 2 = \sqrt{1+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 1 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{3}$$

$$|a \times (a - b)| = \text{مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی } a \text{ و } b$$

$$|a \times a + a \times b| = |a \times b|$$

$$(\rightarrow |a \times b| = |a||b| \sin \theta = 12 \Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{3}{5} \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a \cdot (a + b) = |a|^2 + a \cdot b = |a|^2 + |a||b| \cos \theta$$

حال به کمک $\cos \theta$ می‌توانیم بنویسیم:

$$= 25 + 4 \times 5 \times \frac{3}{5} = 25 + 12 = 37$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر $a + 2b = 0$ باشد، آنگاه داریم $a = -\frac{1}{2}b$. در این صورت چون بردار a مضربی منفی از

بردار b است، پس دو بردار همراستا ولی در خلاف جهت یکدیگرند. همچنین $|a| = \frac{1}{2}|b|$ پس $|a| > |b|$.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = (3, 2, 1) \Rightarrow B = (3, -2, -1)$$

قرینه نسبت به محور طول‌ها:

$$A = (3, 2, 1) \Rightarrow C = (-3, 2, -1)$$

قرینه نسبت به محور عرض‌ها:

$$x_A + x_D = x_B + x_C \Rightarrow 3 + x_D = 3 - 3 \Rightarrow x_D = -3$$

$$y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow 2 + y_D = -2 + 2 \Rightarrow y_D = -2$$

$$z_A + z_D = z_B + z_C \Rightarrow 1 + z_D = -1 - 1 \Rightarrow z_D = -3$$

$$\Rightarrow D = (-3, -2, -3)$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$|a \times (b \times c)|^2 + |a \cdot (b \times c)|^2 = |a|^2 |b \times c|^2$$

بنابراین فرض $a \cdot (b \times c) = 45$ و $|a| = 5$ ، $|b| = 3$ و $|c| = 4$ و زاویه دو بردار b و c برابر 60° است. پس:

$$|a \times (b \times c)|^2 + 45^2 = 5^2 \times 3^2 \times 4^2 \times \sin^2 60^\circ \Rightarrow |a \times (b \times c)|^2 = 60^2 \times \frac{3}{4} - 45^2$$

$$\Rightarrow |a \times (b \times c)|^2 = 30^2 \times 3 - 45^2 = 2700 - 2025 = 675$$

$$|a \times (b \times c)|^2 = 27 \times 25 \Rightarrow |a \times (b \times c)| = 15\sqrt{3}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. مساحت مثلث برابر $\frac{1}{2}$ اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی دو بردار است.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = i + (2 + 3a)j + (1 + 2a)k$$

$$\sqrt{1 + (2 + 3a)^2 + (1 + 2a)^2} = 5\sqrt{3}$$

پس خواهیم داشت:

$$13a^2 + 16a - 69 = 0 \Rightarrow a = \frac{-8 \pm \sqrt{961}}{13} = \frac{-8 \pm 31}{13} = -3, \frac{23}{13}$$

۲۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AM} \times (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{MC} = 2S_1 + 2S_2 = 2S_{\triangle ABC}$$

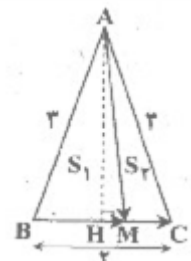
$$AH = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

بنابراین باید مساحت مثلث ABC را بیابیم، اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 = \sqrt{3} \Rightarrow 2S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3}$$

دقت کنید M هر نقطه‌ای روی قاعده باشد، حاصل عبارت $2\sqrt{3}$ خواهد بود.

نکته: در مثلث متساوی‌الساقین، میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده با هم برابرند.



۲۳

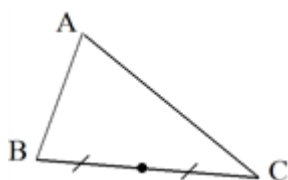
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$M = \frac{B+C}{2} = (m, 4, m+2)$$

$$AM = \sqrt{(m - (-1))^2 + (4 - 2)^2 + (m + 2 - 1)^2} = 2$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 + 4 + (m+1)^2 = 4 \Rightarrow 2(m+1)^2 = 0$$

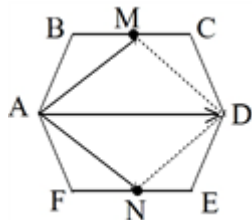
$$\Rightarrow m = -1 \Rightarrow M = (-1, 4, 1)$$



مجموع مؤلفه‌های M برابر است با ۴.

۲۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، در چهارضلعی AMDN که متوازی‌الاضلاع است (چرا؟)، داریم:



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AN} \\ &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

طول قطر بزرگ شش‌ضلعی منتظم دو برابر طول ضلع آن است، پس:

$$|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AN}| = |2\overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AD}| = 2(2 \times 2) = 8$$

۲۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|c+a|^2 = |c|^2 + |a|^2 + 2a \cdot c$$

چون $c = a \times b$ در نتیجه $a \cdot c = 0$ است یعنی بردار c بر بردار a عمود است. از طرفی:

$$|c| = |a| |b| \sin 30^\circ = 3 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = 2$$

$$|c+a|^2 = |c|^2 + |a|^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow |c+a| = \sqrt{13}$$

در نتیجه:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 \Rightarrow 2|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 1 \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1}$$

$$-2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$S_{\square} = \frac{1}{2} |(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})| = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}|$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$$

نکته‌ی ۱: اگر بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازی‌الاضلاع را بنا کنیم، مساحت آن عبارت است از: $S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

نکته‌ی ۲: اگر دو بردار $\vec{c}$ و $\vec{d}$ اقطار متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه خواهیم داشت: $S = \frac{1}{2} \left| \vec{c} \times \vec{d} \right|$

جالب است بدانید نکته‌ی فوق در مورد هر چهارضلعی محدب‌ی برقرار است.

نکته‌ی ۳: با بسط عبارت در حالت کلی داریم:

$$(m\vec{a} + n\vec{b}) \times (p\vec{a} + q\vec{b}) = (mq - np)(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} (\vec{a} \times \vec{b})$$

چون اگر از رئوس چهارضلعی خطوطی موازی قطرها رسم کنیم، متوازی‌الاضلاع جدیدی به اضلاع $\vec{c}$ و $\vec{d}$ به وجود می‌آید.

چون قطر متوازی‌الاضلاع مساحت آن را نصف می‌کند، پس در چهار متوازی‌الاضلاع کوچک ایجاد شده (مثلاً BNCO) مساحت دو مثلث حاصل با هم برابر است بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع جدید ایجاد شده، دو برابر چهارضلعی محدب قبلی است. لذا:

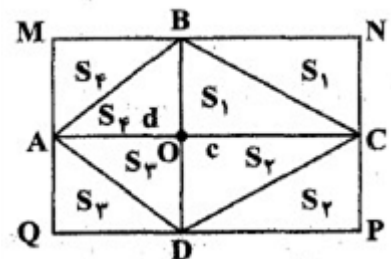
$$S_{\text{چهارضلعی}} = \frac{1}{2} S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = \frac{1}{2} \left| \vec{c} \times \vec{d} \right|$$

البته این قاعده در مورد متوازی‌الاضلاع اثبات برداری نیز دارد:

چون اقطار متوازی‌الاضلاع $\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})$ ، $\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})$ است، لذا خواهیم داشت:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} = 2\vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = 2S \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = \frac{1}{2} \left| \vec{c} \times \vec{d} \right|$$



گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر (x, y, z) مختصات یک نقطه باشد، آن‌گاه مختصات قرینه‌ی آن نسبت به صفحه‌ی

XOZ و محور x به ترتیب $(x, -y, z)$ و $(x, -y, -z)$ می‌باشد. بنابراین $M(3, 4, -2)$ و $N(3, 4, 2)$ بوده و نقطه‌ی وسط آن

برابر است با:

$$P = \frac{M + N}{2} = (3, 4, 0)$$

$$|OP| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

در نتیجه:

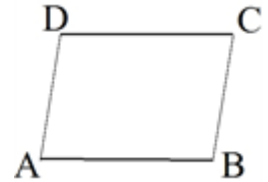
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$\overrightarrow{AB}(1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AD}(-1, 2, 2)$$

مساحت متوازی الاضلاع برابر اندازه حاصلضرب خارجی دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ است.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = -3\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right| = \sqrt{0 + 9 + 9} = 3\sqrt{2}$$



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۳۰

$$\begin{cases} 2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 4, 2) \\ \mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (2, 2, 1) \end{cases} \xrightarrow{\times} (0, -3, -6)$$

$$|(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})| = |2\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}| = 3|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{|(0, -3, -6)|}{3} = \sqrt{5}$$

۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴

