



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام درس :

نام دبیر :

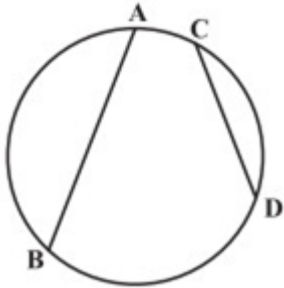
نام آموزشگاه :

عنوان آزمون : بانک تست هندسه سال یازدهم

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

ریاضی (فصل ۱ دایره)

۱ در دایره شکل مقابل $AB = ۱۵$ و $CD = ۸$ و $\widehat{AB} + \widehat{CD} = ۱۸۰^\circ$ است. شعاع دایره چقدر است؟



۹/۵ (۴)

۸/۵ (۳)

۶/۵ (۲)

۷/۵ (۱)

۲ در مثلث ABC ، $(\widehat{A} = ۹۰^\circ)$ و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. به قطر AH دایره‌ای رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را در E و F قطع کند. اگر $BH = ۹$ و $CH = ۱۶$ باشد، اندازه EF برابر کدام است؟

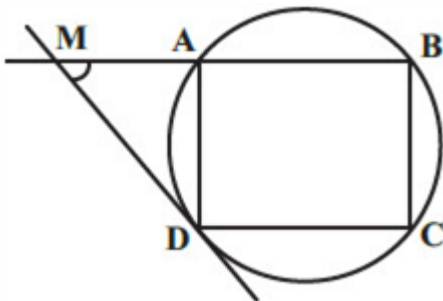
۱۰ (۴)

۱۳ (۳)

۹ (۲)

۱۲ (۱)

۳ مستطیل $ABCD$ را درون دایره‌ای محاط کرده‌ایم. از نقطه D مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در M قطع کند، اگر $\widehat{DMA} = ۷۰^\circ$ باشد، اندازه زاویه بین دو قطر مستطیل کدام می‌تواند باشد؟



۱۵۰° (۴)

۱۴۰° (۳)

۱۲۵° (۲)

۱۱۰° (۱)

۴ دو دایره $C(O, ۶)$ و $C'(O', ۹)$ مفروض‌اند. اگر فاصله نزدیک‌ترین نقاط این دو دایره برابر ۵ واحد باشد، فاصله نقطه برخورد مماس مشترک‌های داخلی دو دایره از مرکز دایره کوچکتر کدام است؟

۸/۵ (۴)

۸ (۳)

۷/۵ (۲)

۷ (۱)

۵ در مثلث ABC ، $AB = ۵$ و $AC = ۶$ است. اگر شعاع دایره محیطی این مثلث برابر ۴ باشد، طول ارتفاع وارد بر ضلع BC در این مثلث کدام است؟

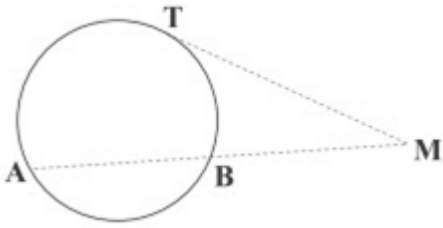
۴ (۴)

$\frac{۱۵}{۴}$ (۳)

$\frac{۷}{۲}$ (۲)

۳ (۱)

۶ اگر در شکل زیر $\widehat{TB} = \frac{\widehat{AB}}{4} = \frac{\widehat{AT}}{7}$ باشد، زاویه‌ی M چند درجه است؟



۸۰ (۴)

۹۰ (۳)

۷۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

۷ یک ذوزنقه هم محاطی و هم محیطی است. اگر قاعده‌های این ذوزنقه برابر ۶ و ۱۰ باشند، مساحت ذوزنقه کدام است؟

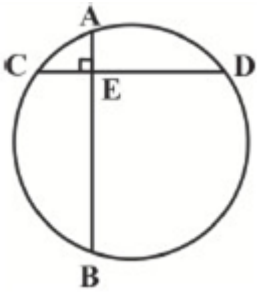
$6\sqrt{15}$ (۴)

$8\sqrt{15}$ (۳)

$16\sqrt{15}$ (۲)

$15\sqrt{15}$ (۱)

۸ در دایره‌ی مقابل، وترهای AB و CD در نقطه‌ی E بر یکدیگر عمودند. اگر $AE = 6$ ، $CE = 3$ ، $EB = 12$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی قطر دایره کدام است؟



۱۰ (۴)

$10\sqrt{2}$ (۳)

$5\sqrt{2}$ (۲)

۵ (۱)

۹ در مثلثی به طول اضلاع ۳، ۵ و ۶، شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ی محاطی خارجی چند برابر شعاع کوچک‌ترین دایره‌ی محاطی خارجی مثلث است؟

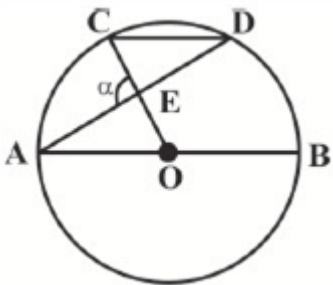
۷ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

$\frac{11}{8}$ (۱)

۱۰ در شکل مقابل، اگر $AB \parallel CD$ و $CD = 84$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی α چند درجه است؟ (O مرکز دایره است.)



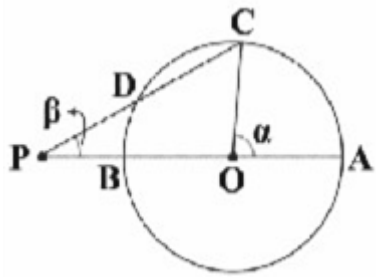
۷۸ (۴)

۷۵ (۳)

۷۲ (۲)

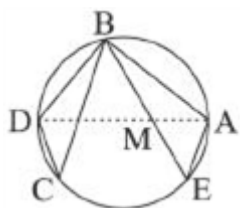
۶۹ (۱)

۱۱) مطابق شکل، نقطه‌ی P در امتداد قطر دایره است. اگر PD برابر شعاع دایره باشد، کدام گزینه صحیح است؟



- ☐ ۱ $\alpha = 2\beta$
 ☐ ۲ $\alpha = \frac{3}{2}\beta$
 ☐ ۳ $\alpha = 4\beta$
 ☐ ۴ $\alpha = 2\beta$

۱۲) در شکل زیر اگر $BM = 3$ و $AM = \frac{3}{2}$ و $DC = AE$ و $BD = \frac{5}{2}$ باشد، اندازه‌ی CD کدام است؟

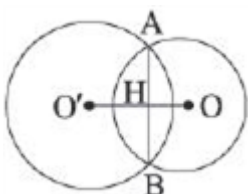


- ☐ ۱ $\frac{5}{2}$
 ☐ ۲ $\frac{5}{3}$
 ☐ ۳ $\frac{5}{4}$
 ☐ ۴ ۱

۱۳) در مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع به طول صحیح، رابطه‌ی $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{3}$ برقرار می‌باشد. اگر مساحت مثلث برابر ۱۲ باشد، چند جواب برای اندازه‌ی طول ساق آن وجود دارد؟

- ☐ ۱ ۱
 ☐ ۲ ۲
 ☐ ۳ ۳
 ☐ ۴ ۴

۱۴) در شکل زیر $AB = 4$ و طول مماس مشترک خارجی دو دایره ۶ واحد است. اگر $OH \times O'H = 5$ باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب شعاع‌های دو دایره کدام است؟

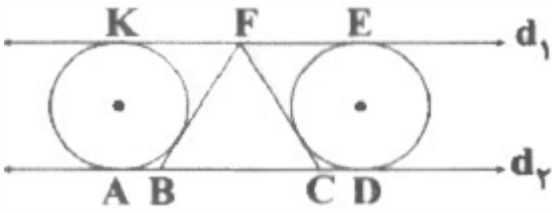


- ☐ ۱ ۱۴
 ☐ ۲ ۱۵
 ☐ ۳ ۱۶
 ☐ ۴ ۱۷

۱۵) شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC برابر ۸ است. اگر $AB = 10$ و $AC = 12$ باشد، طول ارتفاع وارد بر ضلع BC در این مثلث کدام است؟

- ☐ ۱ $7/5$
 ☐ ۲ ۹
 ☐ ۳ ۱۵
 ☐ ۴ $4/5$

۱۶ با توجه به شکل زیر دو دایره با شعاع‌های یکسان رسم شده‌اند و دو خط d_1 و d_2 بر دو دایره مماس هستند و $AD = 15 \text{ cm}$ محیط مثلث FBC چند سانتی‌متر است؟



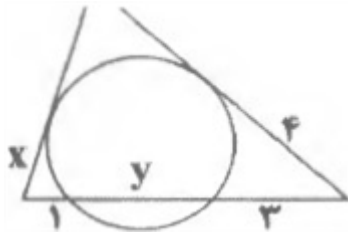
۳۰ (۴)

۴۵ (۳)

۶۰ (۲)

۷۵ (۱)

۱۷ با توجه به شکل زیر، x° چقدر است؟



$\frac{16}{3}$ (۴)

$\frac{13}{3}$ (۳)

$\frac{10}{3}$ (۲)

$\frac{11}{3}$ (۱)

۱۸ در چهارضلعی محیطی ABCD، $AD = AB$ می‌باشد، کدام گزینه الزاماً درست نیست؟

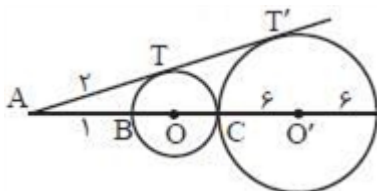
(۲) AC بر BD عمود است.

(۱) $BC = CD$

(۴) مساحت ABCD برابر است با: $\frac{AC \times BD}{2}$

(۳) $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

۱۹ در شکل زیر دو دایره بر هم مماس خارج‌اند. مساحت چهارضلعی OTT'O' کدام است؟



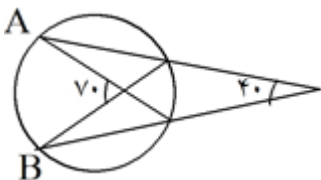
۲۲/۵ (۴)

۲۵ (۳)

۲۴/۵ (۲)

۲۷ (۱)

۲۰ در شکل مقابل اندازه‌ی کمان AB برابر کدام است؟



۱۲۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۱۴۰ (۲)

۱۱۰ (۱)

۲۱ در یک دایره طول کمان AB برابر ۴ واحد و اندازه‌ی کمان AB برابر 60° است. در این صورت طول شعاع دایره کدام است؟

24π (۴)

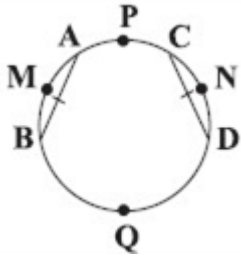
۲۴ (۳)

$\frac{12}{\pi}$ (۲)

12π (۱)

۲۲ در دایره زیر، دو وتر AB و CD با هم برابر و نقاط M، N، P و Q به ترتیب وسط کمان‌های $\widehat{AB}$ ، $\widehat{CD}$ ، $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$ هستند. چند گزاره از ۳ گزاره زیر درست است؟

الف) PQ بر MN عمود است.
 ب) $\widehat{PBQ} = 90^\circ$
 ج) PQ، وتر BD را نصف می‌کند.



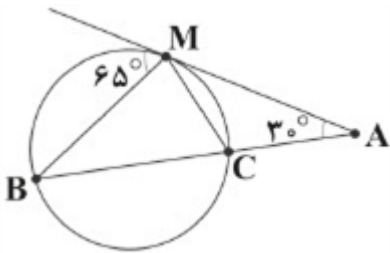
هیچ‌کدام (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۲۳ در شکل زیر AM بر دایره مماس است. با توجه به اندازه‌های داده شده $\widehat{BMC}$ کدام است؟



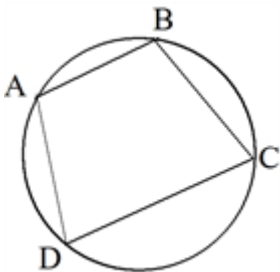
۱۰۰° (۴)

۸۰° (۳)

۶۰° (۲)

۹۵° (۱)

۲۴ در شکل زیر، $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$ است. اگر امتداد اضلاع AD و BC در M متقاطع باشند، مساحت چهارضلعی ABCD چند درصد مساحت مثلث MCD است؟



۷۵ (۴)

۶۰ (۳)

۶۴ (۲)

۴۸ (۱)

۲۵ طول کوتاه‌ترین وتری که از نقطه M داخل یک دایره می‌گذرد، ۱۲ می‌باشد. نقطه M وتری به طول ۲۰ که از آن می‌گذرد را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

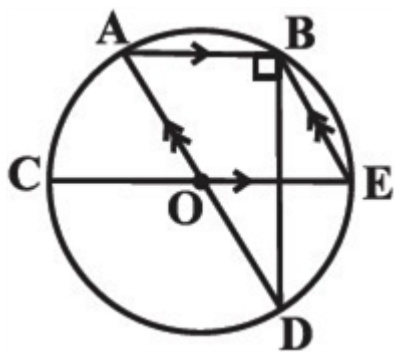
$\frac{1}{9}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۲۶ در شکل زیر، O مرکز دایره، وتر AB موازی CE و عمود بر وتر BD است. اگر وتر BE موازی AD باشد، طول کمان CD چند برابر محیط دایره است؟



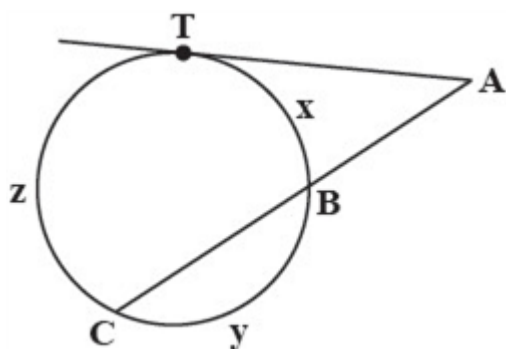
$\frac{2}{5}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

۲۷ در شکل روبه‌رو اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ ، اندازه زاویه A کدام است؟



48° (۴)

72° (۳)

54° (۲)

36° (۱)

۲۸ یک ذوزنقه متساوی‌الساقین با اندازه ساق ۸، بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۴۸ (۴)

۳۲ (۳)

۴۲ (۲)

۳۶ (۱)

۲۹ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $8\sqrt{3}$ ، شعاع دایره محاطی خارجی کدام است؟

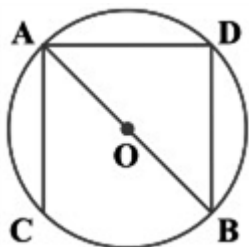
۱۵ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

۳۰ در شکل مقابل، AB قطر دایره است و وترهای AC و BD موازیند. کدام گزینه الزاماً درست نیست؟



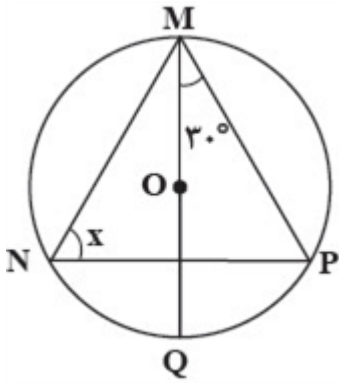
$AD = BD$ (۴)

$\widehat{AC} = \widehat{BD}$ (۳)

$\widehat{AD} = \widehat{BC}$ (۲)

$AC = BD$ (۱)

۳۱ در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مقدار x کدام است؟



۴۰° (۴)

۵۰° (۳)

۶۰° (۲)

۸۰° (۱)

۳۲ فاصله نقطه A از مرکز دایره‌ای به شعاع ۸ برابر $4k - 2$ است. اگر A درون دایره باشد، آن‌گاه k کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

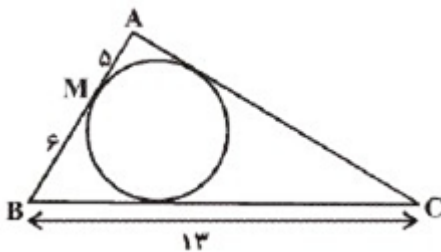
۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۳۳ در شکل روبه‌رو، محیط مثلث ABC کدام است؟



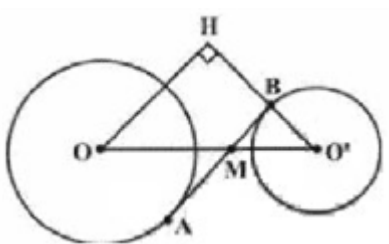
۳۹ (۴)

۳۶ (۳)

۳۳ (۲)

۳۰ (۱)

۳۴ در شکل زیر $OH = 3$ و $O'H = 4$ و AB مماس مشترک داخلی دو دایره است و $AB = OH$. اگر اندازه‌ی پاره‌خط AM برابر $\frac{15}{8}$ باشد، آن‌گاه شعاع دایره‌ی کوچک‌تر کدام است؟



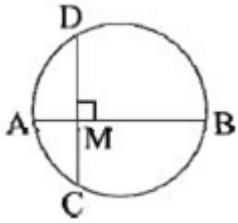
$\frac{5}{8}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۳۵ در شکل روبه‌رو، $AM = ۲$ ، $BM = ۶$ و $CM = ۳$ است. طول قطر دایره کدام است؟



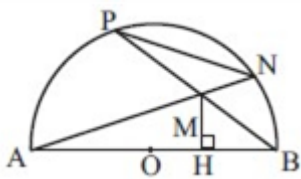
۲ $\sqrt{۶۵}$

۱ $\sqrt{۶۳}$

۴ $\sqrt{۷۰}$

۳ $\sqrt{۶۸}$

۳۶ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل به مرکز O ، می‌دانیم: $MH \perp AB$ و $MH = MN$. اگر زاویه‌ی بین MN و MH برابر ۱۱۸° باشد، زاویه‌ی بین امتداد وتر PN و امتداد قطر AB کدام است؟



۴ 4°

۳ 3°

۲ 6°

۱ 8°

۳۷ خط d بر دو دایره‌ی C و C' با مراکز متمایز O و O' و با شعاع‌های ۱ و ۳ در نقاط T و T' مماس است و خط مرکزین دو دایره را در نقطه‌ی P واقع بین دو مرکز قطع می‌کند. اگر $PT = \frac{۴}{۳}$ ، آن‌گاه طول خط مرکزین کدام است؟

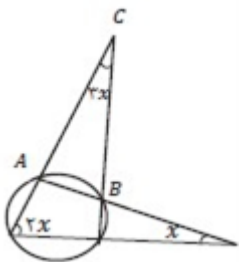
۴ ۷

۳ $\frac{۲۰}{۳}$

۲ ۶

۱ ۵

۳۸ در شکل زیر مقدار x کدام است؟



۴ $\frac{۲۱}{۵}$

۳ $\frac{۲۰}{۵}$

۲ $\frac{۲۲}{۵}$

۱ $\frac{۱۹}{۵}$

۳۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، از نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث دو عمود OH و OH' به‌ترتیب بر دو ضلع AB و AC رسم شده است. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی O از وتر برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، طول HH' چه‌قدر است؟

۴ ۳

۳ $۴\sqrt{۲}$

۲ $۲\sqrt{۶}$

۱ ۴

۴۰ دو دایره به شعاع‌های R و $\frac{1}{4}R$ در نقطه‌ی D بر یکدیگر مماس خارج‌اند. از مرکز دایره‌ی کوچک‌تر، پاره‌خط OC را به‌اندازه‌ی $2R$ رسم می‌کنیم که در نقطه‌ی A دایره‌ی کوچک‌تر و در نقاط B و C دایره‌ی بزرگ‌تر را قطع کند. اندازه‌ی پاره‌خط AB کدام است؟ (B بین A و C)

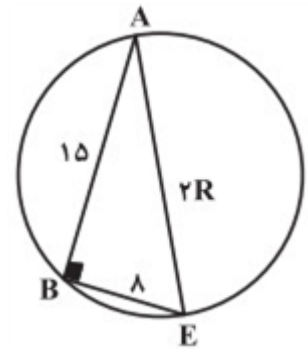
$$\frac{1}{4}R \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{8}R \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{8}R \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{6}R \quad \text{۱}$$

- ۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از نقطه‌ی B وتر BE را مساوی CD رسم می‌کنیم ($BE = CD = 8$) و A را به E وصل می‌کنیم چون $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$ ، پس $\widehat{AB} + \widehat{BE} = 180^\circ$ در نتیجه $\widehat{AE} = 180^\circ$ ، یعنی AE قطر دایره است. پس $\widehat{B} = 90^\circ$

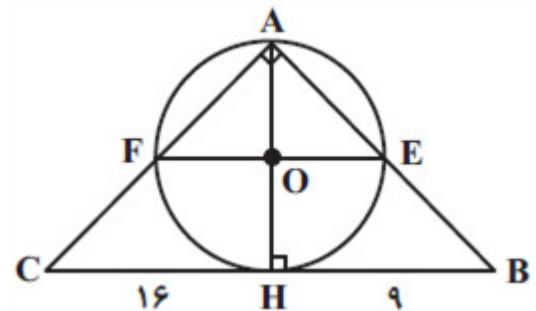


$$(2R)^2 = 8^2 + 8^2 = 128 \Rightarrow R = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8/\sqrt{2}$$

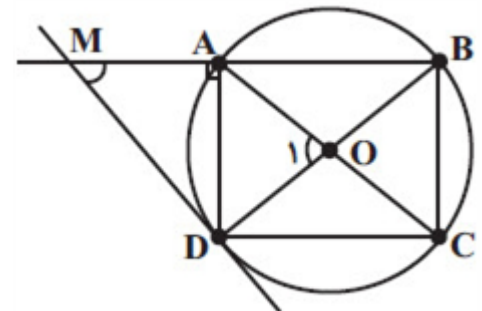
- ۲) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون زاویه EAF قائمه است، در نتیجه EF قطر دایره است، یعنی $EF = AH$ و از طرفی:

$$AH^2 = BH \cdot CH = 9 \times 16 \Rightarrow AH = 12 \Rightarrow FE = 12$$



- ۳) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث AMD قائم‌الزاویه است و $\widehat{DMA} = 70^\circ$ است، پس $\widehat{ADM} = 20^\circ$ است. زاویه $\widehat{ADM}$ زنی روبه‌رو به کمان $\widehat{AD}$ است. پس $\widehat{AD} = 40^\circ$ است. از طرفی محل برخورد قطرهای مستطیل، یعنی نقطه O ، همان مرکز دایره است زیرا $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ و نتیجه می‌شود AC و BD قطرهای دایره‌اند. پس $\widehat{O_1}$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان $\widehat{AD}$ است، یعنی $\widehat{O_1} = \widehat{AD}$. $\Rightarrow \widehat{O_1} = 40^\circ$

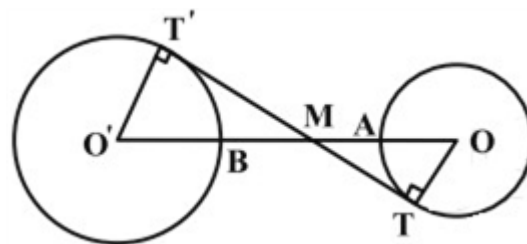


بنابراین زاویه حاده بین دو قطر 40° و زاویه منفرجه 140° است.

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل $OA = ۶$ ، $AB = ۵$ و $O'B = ۹$ است، پس داریم:

$$OO' = ۶ + ۵ + ۹ = ۲۰$$



فرض کنید TT' یکی از دو مماس مشترک داخلی این دو دایره و M نقطه‌ی برخورد دو مماس مشترک داخلی باشد.

دراین صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{OMT} = \widehat{O'MT'} \text{ (متقابل به راس)} \\ \widehat{T} = \widehat{T'} = ۹۰^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMT \sim \triangle O'MT'$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{O'M} = \frac{OT}{O'T'} = \frac{۶}{۹} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OM}{\underbrace{OM + O'M}_{OO'}} = \frac{۶}{۶ + ۹}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{۲۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow OM = ۸$$

۵

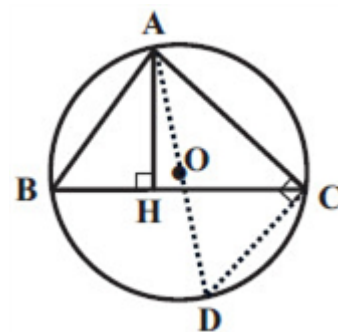
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید AD قطر دایره محیطی مثلث ABC باشد. در این صورت زاویه ACD ، زاویه

محاطی روبه‌رو به قطر و در نتیجه برابر ۹۰° است، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{۲} \\ \widehat{H} = \widehat{ACD} = ۹۰^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}}$$

$$\triangle AHB \stackrel{\text{تشابه}}{\sim} \triangle ACD \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AH}{۶} = \frac{۵}{۲ \times ۴}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{۳۰}{۸} = \frac{۱۵}{۴}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶

$$\widehat{BT} = \frac{\widehat{AB}}{۴} = \frac{\widehat{AT}}{۷} = \frac{\widehat{BT} + \widehat{AB} + \widehat{AT}}{۱ + ۴ + ۷} = \frac{۳۶۰}{۱۲} = ۳۰^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AT} = ۲۱۰^\circ \\ \widehat{BT} = ۳۰^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{۲} = \frac{۲۱۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانید که مساحت ذوزنقه‌ای که هم محیطی و هم محاطی باشد، برابر است با حاصل ضرب میانگین حساب دو قاعده‌ی آن در میانگین هندسی آن‌ها.

$$\text{میانگین حسابی } ۶ \text{ و } ۱۰ = \frac{۶ + ۱۰}{۲} = ۸$$

$$\text{میانگین هندسی } ۶ \text{ و } ۱۰ = \sqrt{۶ \times ۱۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = ۸ \times ۲\sqrt{۱۵} = ۱۶\sqrt{۱۵}$$

۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز دایره عمودهایی را رسم می‌کنیم تا وترهای AB و CD را به ترتیب در نقاط F و G قطع کنند. سپس از مرکز دایره به نقطه‌ی D وصل می‌کنیم. طبق روابط طولی در دایره می‌توان نوشت:

$$AE \times EB = CE \times ED \Rightarrow ۲ \times ۱۲ = ۴ \times ED \Rightarrow ED = ۶$$

$$\Rightarrow CD = ۴ + ۶ = ۱۰$$

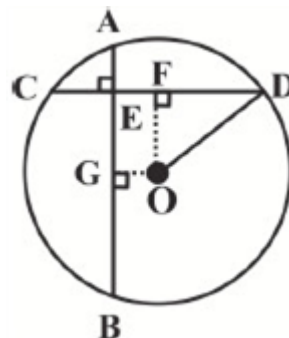
از طرفی می‌دانیم در هر دایره، عمود رسم شده از مرکز دایره بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر را نصف می‌کند. بنابراین داریم:

$$FD = \frac{1}{2}CD = ۵, AG = BG = ۷ \Rightarrow GE = AG - AE = ۵$$

چهارضلعی EFOG از آن‌جا که سه زاویه‌ی قائمه دارد، مستطیل خواهد بود. بنابراین $GE = FO = ۵$ است. طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OFD داریم:

$$\triangle OFD : OF^2 + FD^2 = OD^2 \Rightarrow OD^2 = ۵^2 + ۵^2 = ۵۰ \Rightarrow OD = R = ۵\sqrt{۲}$$

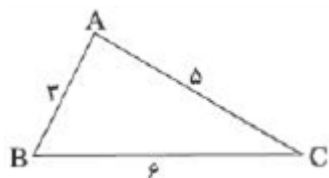
بنابراین اندازه‌ی قطر دایره برابر با $۲R$ یعنی $۱۰\sqrt{۲}$ است.



۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل شعاع دایره‌های محاطی خارجی متناظر با رئوس A، B و C به ترتیب عبارتند از:



$$r_c = \frac{S}{P-3}, r_b = \frac{S}{P-5}, r_a = \frac{S}{P-6}$$

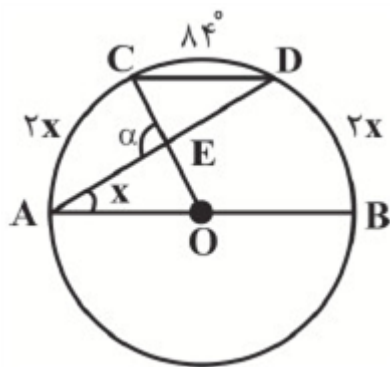
از طرفی:

$$P = \frac{3 + 5 + 6}{2} = ۷$$

بنابراین:

$$\frac{\text{شعاع بزرگ ترین دایره محاطی خارجی}}{\text{شعاع کوچک ترین دایره محاطی خارجی}} = \frac{r_a}{r_c} = \frac{\frac{S}{7-6}}{\frac{S}{7-3}} = \frac{۴}{۱} = ۴$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنید $\widehat{DAB} = x$ باشد، در این صورت داریم:



$$\widehat{DAB} = \frac{DB}{r} \Rightarrow \widehat{DB} = 2x \quad (\text{زاویه محاطی})$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{DB} = 2x$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 84^\circ + 2x = 180^\circ \\ \Rightarrow 4x = 96^\circ \Rightarrow x = 24^\circ$$

$$(\text{زاویه مرکزی}) \quad \widehat{AOC} = \widehat{AC} = 2x$$

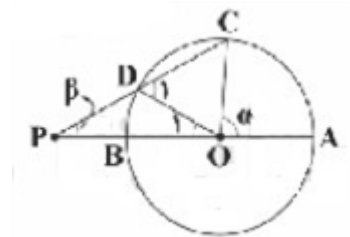
$$\triangle OAE: \alpha = \text{زاویه خارجی} = x + 2x = 3x = 3 \times 24^\circ = 72^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از O به D وصل می‌کنیم، داریم:

$$PD = OD = R \Rightarrow \widehat{O} = \widehat{P} = \beta$$

$$\triangle POD: \widehat{D} = \widehat{P} + \widehat{O} = 2\beta \quad (\text{زاویه خارجی})$$

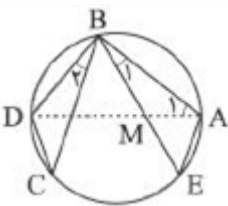
$$\triangle ODC: OD = OC = R \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D} = 2\beta$$



$$\triangle OPC: \widehat{AOC} = \widehat{P} + \widehat{C} = \beta + 2\beta \Rightarrow \alpha = 3\beta \quad (\text{زاویه خارجی})$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از B به D وصل می‌کنیم:

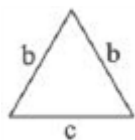
$$\begin{cases} \widehat{B}_1 = \frac{AF}{r} \\ \widehat{B}_2 = \frac{CD}{r} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \quad (1) \\ \widehat{AE} = \widehat{CD} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{C} = \frac{BD}{r} \quad (2) \end{cases}$$



$$(1), (2) \Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle AMB \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{BM}{BD} \xrightarrow{BM=3, BD=\frac{5}{2}, AM=\frac{3}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{CD} = \frac{3}{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2CD} = \frac{6}{5} \Rightarrow 12CD = 15 \Rightarrow CD = \frac{5}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث متساوی الساقین ABC را در نظر می‌گیریم.



$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} r &= \frac{3}{2} \\ S &= 12 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{r=\frac{S}{P}} \frac{3}{2} = \frac{12}{P} \Rightarrow P = 8$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = 16 \Rightarrow 2b + c = 16$$

$$b = 1 \Rightarrow c = 14 : 14 \not< 1 + 1$$

$$b = 2 \Rightarrow c = 12 : 12 \not< 2 + 2$$

$$b = 3 \Rightarrow c = 10 : 10 \not< 3 + 3$$

$$b = 4 \Rightarrow c = 8 : 8 \not< 4 + 4$$

$$b = 5 \Rightarrow c = 6 : 6 < 5 + 5 \checkmark$$

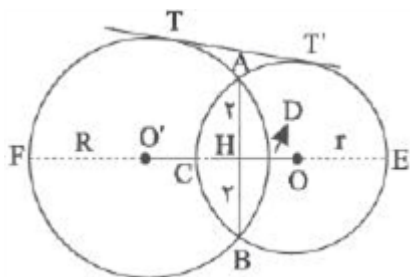
$$b = 6 \Rightarrow c = 4 : 4 < 6 + 4 \checkmark$$

$$b = 7 \Rightarrow c = 2 : 2 < 7 + 2 \checkmark$$

$$b = 8 \Rightarrow c = 0 \times$$

پس سه جواب برای طول ساق وجود دارد: ۵ یا ۶ یا ۷.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$OH = x \Rightarrow CH = r - x, HE = r + x$$

$$O'H = y \Rightarrow HD = R - y, HF = R + y$$

با نوشتن فیثاغورس در مثلث‌های AOH و AO'H داریم:

$$\begin{cases} \triangle AOH : r^2 - x^2 = 4 \\ \triangle AO'H : R^2 - y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (r^2 + R^2) - (x^2 + y^2) = 8 \quad (1)$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - r)^2} \Rightarrow 26 = x^2 + y^2 + 2xy - R^2 - r^2 + 2Rr$$

$$\downarrow$$

$$x + y$$

$$\Rightarrow 26 = (x^2 + y^2) - (R^2 + r^2) + 2xy + 2Rr \xrightarrow{(2)} 26 = -8 + 10 + 2Rr \Rightarrow 24 = 2Rr \Rightarrow Rr = 12$$

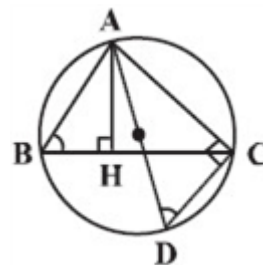
دقت کنید در صورت سؤال داشتیم $OH \times O'H = 5$ یعنی $xy = 5$ است.

۱۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید AD قطر دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد. در این صورت داریم:

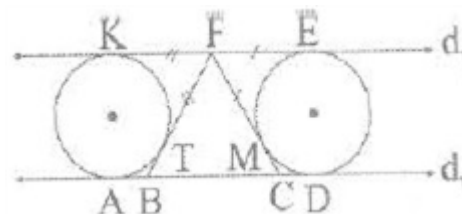
$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \widehat{H} = \widehat{ACD} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle ACD$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AH}{12} = \frac{10}{16} \Rightarrow AH = \frac{120}{16} = 7.5$$



۱۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



با توجه به شکل داریم:

$$KF = FT, FE = FM$$

$$AB = BT, MC = CD$$

$$AD = 15 \text{ cm} \Rightarrow AB + BC + CD = BT + BC + MC = 15 \text{ cm} \quad (1)$$

$$KE = 15 \text{ cm} \Rightarrow KF + FE = FT + FM = 15 \text{ cm} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow FB + BC + FC = 30 \text{ cm}$$

۱۷

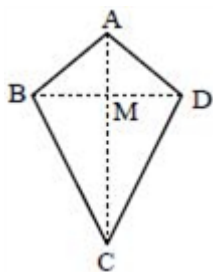
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه‌ی طولی در دایره داریم:

$$x^2 = 3(3 + y) \Rightarrow y = \frac{16}{3} - 3 = \frac{7}{3}$$

$$x^2 = 1(1 + y) = \frac{10}{3}$$

۱۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\left\{ \begin{aligned} \text{محیطی } ABCD &\Rightarrow AB + CD = BC + AD \\ AD &= AB \end{aligned} \right. \Rightarrow BC = CD$$

بنابراین قطرهای AC و BD بر هم عمودند، در واقع AC عمود منصف BD است، پس داریم: $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$ ، گزینه

(۳) لزوماً برقرار نیست.

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow 4 = 1 \times AC \Rightarrow AC = 4$$

$$BC = 4 - 1 = 3 \Rightarrow OB = OC = \frac{3}{2}$$

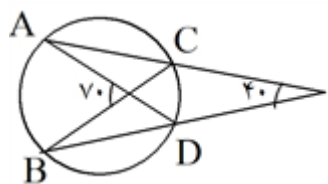
طبق روابط مماس مشترک داریم:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow TT' = 2\sqrt{\frac{3}{2} \times 6} = 2\sqrt{9} = 6$$

چهارضلعی OTT'O' دوزنقه‌ای است که قاعده‌های آن شعاع‌های دایره‌ها هستند و ارتفاع آن TT' است، داریم:

$$S_{TTOO'} = \frac{\left(\frac{3}{2} + 6\right) \times 6}{2} = 3 \left(\frac{3}{2} + 6\right) = \frac{9}{2} + 18 = 22\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} 40^\circ &= \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 80^\circ \\ 70^\circ &= \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 140^\circ \end{aligned} \right\} + \Rightarrow 2\widehat{AB} = 220^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 110^\circ$$

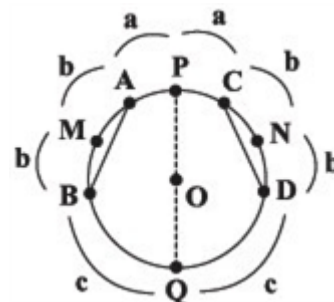
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\text{پس: } \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{4}{2\pi R} \text{ لذا: } 2\pi R = 24 \text{ و در نتیجه: } R = \frac{12}{\pi}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو وتر AB و CD با هم برابرند پس کمان‌های نظیر آنها نیز هم‌اندازه‌اند. با توجه به شکل،

وتر PQ محیط دایره را به دو قسمت مساوی (که هر کدام شامل یک کمان a، دو کمان b و یک کمان c است) تقسیم کرده، پس قطر PQ دایره است و گزاره «ب» درست است. از طرفی، قطر PQ از وسط کمان‌های محدود به وترهای BD و MN می‌گذرد. پس گزاره‌های «الف» و «ج» نیز درست هستند.



۲۳

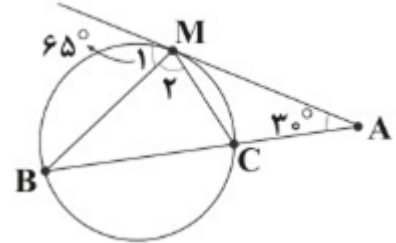
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $\widehat{M}_1$ زاویه‌ی خارجی مثلث AMB است، پس:

$$\widehat{M}_1 = \widehat{B} + \widehat{A} \Rightarrow 65^\circ = \widehat{B} + 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 35^\circ$$

$$(\widehat{M}_1)_{\text{ظلی}} = \frac{BM}{r} \Rightarrow BM = 2\widehat{M}_1 = 2 \times 65^\circ = 130^\circ$$

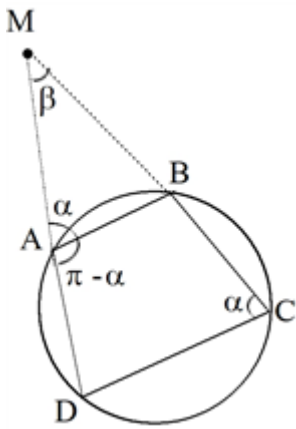
$$M\widehat{C}B = \frac{BM}{r} = 65^\circ$$

$$\triangle BMC: \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{M}_2 = 180^\circ \Rightarrow 35^\circ + 65^\circ + \widehat{M}_2 = 180^\circ \Rightarrow B\widehat{M}C = \widehat{M}_2 = 80^\circ$$



۲۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چهارضلعی محاطی است، بنابراین زوایای روبه‌رو مکمل‌اند، پس داریم:



$$\triangle MAB \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MDC}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

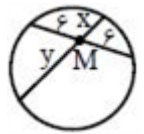
$$\Rightarrow \frac{S_{MDC} - S_{AMB}}{S_{MDC}} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{MDC}} = \frac{16}{25} = 64\%$$

۲۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M وتری است که M وسط آن باشد.

$$\begin{cases} x \times y = 6 \times 6 \\ x + y = 20 \end{cases} \Rightarrow x(20 - x) = 36 \Rightarrow x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$



۲۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$AD \parallel BE \Rightarrow A\widehat{D}B = D\widehat{B}E \Rightarrow A\widehat{B} = D\widehat{E} = B\widehat{E} = \beta$$

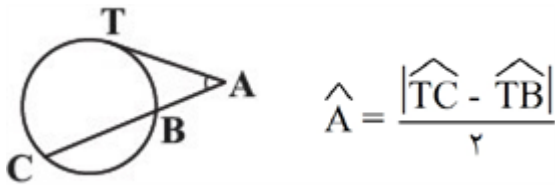
$$\left. \begin{aligned} C\widehat{E} = 180^\circ &\Rightarrow \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ A\widehat{D} = 180^\circ &\Rightarrow 2\alpha + \beta = 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 60^\circ$$

$$\Rightarrow D\widehat{E} = 60^\circ \Rightarrow C\widehat{D} = 120^\circ \Rightarrow \frac{CD}{360^\circ} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$$

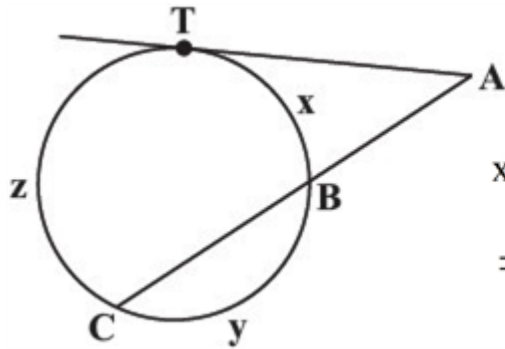
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: مجموع اندازه‌های کل کمان‌های مجزای یک دایره برابر 360° است.

نکته: در شکل روبه‌رو، اندازه بین مماس AT و قاطع AC، برابر است با:



راه حل اول: اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k$ آنگاه $x = 2k$, $y = 3k$ و $z = 5k$. با توجه به اینکه مجموع کمان‌ها برابر 360° است، داریم:



$$x + y + z = 360^\circ \Rightarrow 2k + 3k + 5k = 360^\circ \Rightarrow 10k = 360^\circ$$

$$\Rightarrow k = 36^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = 72^\circ \\ y = 108^\circ \\ z = 180^\circ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\hat{A} = \frac{|z - x|}{2} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

راه حل دوم:

$$\frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{a}{b} \text{ آنگاه: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 5} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = 72^\circ \\ y = 108^\circ \\ z = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{|z - x|}{2} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت ذوزنقه، نصف حاصل ضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده است.

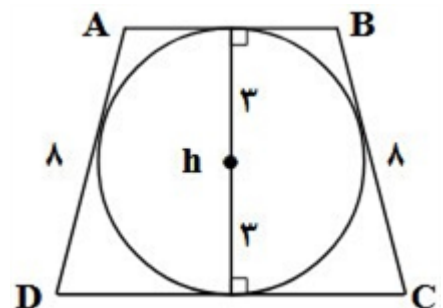
نکته: در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است.

چون شعاع دایره محاطی برابر ۳ است، پس اندازه ارتفاع ذوزنقه برابر ۶ می‌باشد.

حال با استفاده از نکته بالا داریم: $AB + DC = AD + BC = 8 + 8 = 16$

بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(AB + DC)h = \frac{1}{2} \times 16 \times 6 = 48$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ، برابر $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ است.

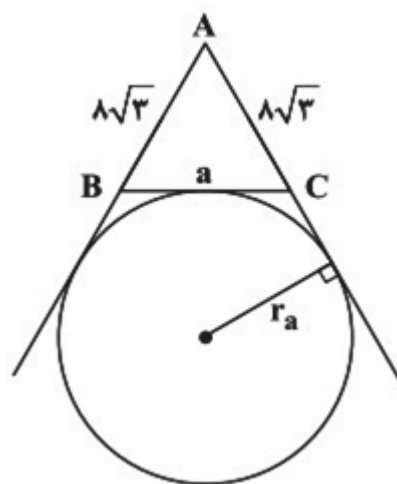
نکته: در مثلث ABC با مساحت S و محیط P ، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A برابر است با: $r_a = \frac{S}{P - a}$ مساحت و محیط این مثلث عبارتند از:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 64 \times 3 = 48\sqrt{3}$$

$$P = 8\sqrt{3} \times 3 = 24\sqrt{3}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ محاطی خارجی این مثلث برابر است با:

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{48\sqrt{3}}{12\sqrt{3} - 8\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 12$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته ۱: اگر از دو سر یک قطر دایره، وترهایی به موازات یکدیگر رسم کنیم، طول این وترها برابر است.

نکته ۲: کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند.

نکته ۳: کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره، با هم برابرند و برعکس.

	AC BD	نکته ۱	AC = BD	نکته ۲	$\widehat{AC} = \widehat{BD}$
	AC BD	نکته ۲	$\widehat{AD} = \widehat{BC}$		

بنابراین گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ درست است. گزینه ۴ الزاماً درست نیست.

نکته: اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

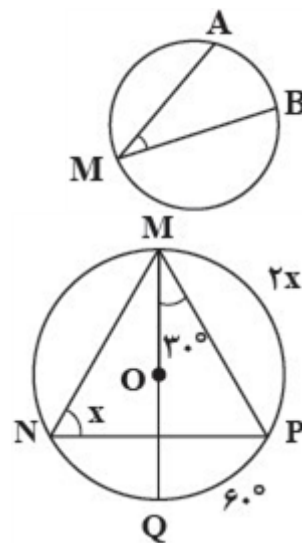
نکته: هر قطر، دایره را به دو نیم‌دایره تقسیم می‌کند.

$$\text{محاطی: } \widehat{PMQ} = \frac{\widehat{PQ}}{2} \xrightarrow{\widehat{PMQ}=30^\circ} \widehat{PQ} = 60^\circ \quad (*)$$

$$\text{محاطی: } \widehat{MNP} = \frac{\widehat{MP}}{2} \xrightarrow{\widehat{MNP}=x} \widehat{MP} = 2x \quad (**)$$

حال با توجه به اینکه MQ قطر دایره است، نتیجه می‌گیریم $\widehat{MPQ} = 180^\circ$ ، پس $\widehat{MP} + \widehat{PQ} = 180^\circ$ ، بنابراین از (*) و (**) داریم:

$$2x + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 120^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته (وضعیت نسبی نقطه و دایره):

(الف) اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره، کمتر از شعاع باشد ($OA < R$) آنگاه نقطه درون دایره است.

(ب) اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره، برابر شعاع باشد ($OA = R$) آنگاه نقطه روی دایره است.

(پ) اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره، بیشتر از شعاع باشد ($OA > R$)، آنگاه نقطه خارج دایره است.

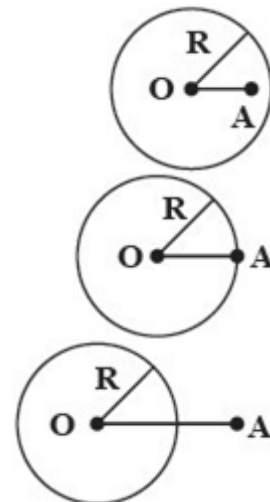
چون A داخل دایره است، پس فاصله تا مرکز دایره از شعاع کمتر است:

$$OA < R \Rightarrow 2k - 4 < 8 \Rightarrow 2k < 12 \Rightarrow k < 6 \quad (1)$$

$$2k - 4 \geq 0 \Rightarrow 2k \geq 4 \Rightarrow k \geq 2 \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $2 \leq k < 6$

با توجه به گزینه‌ها مقادیر ۳، ۴ و ۵ برای k قابل قبول است. پس گزینه ۴ پاسخ است.



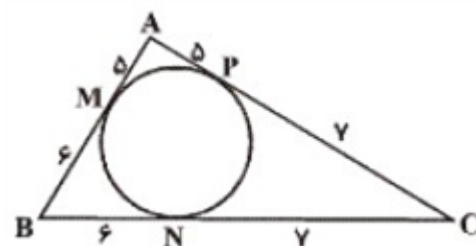
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. طول دو مماس مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر آن دایره با هم برابر است. پس:

$$BN = BM = 6, AP = AM = 5$$

$$NC = BC - BN = 13 - 6 = 7 \Rightarrow PC = NC = 7$$

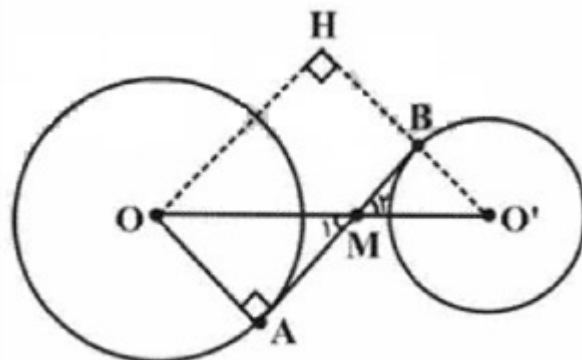
$$\Rightarrow \text{محیط مثلث } ABC = AM + MB + BN + NC + PC + AP$$

$$= 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 5 = 36$$



مطابق شکل براساس قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OHO' نتیجه می‌شود که:

$$OO' = \sqrt{OH^2 + O'H^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



از طرفی چون $AB \parallel OH$ و $AO \parallel BH$ و $\widehat{B} = 90^\circ$ پس چهارضلعی $OABH$ مستطیل است و در نتیجه

$$AB = OH = 3 \text{ و } AM = \frac{15}{8}, \text{ پس } BM = AB - AM = \frac{9}{8}$$

حال دو مثلث OAM و $O'BM$ را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ و $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ پس دو مثلث متشابه‌اند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{O'B}{OA} = \frac{BM}{AM}$$

با اضافه کردن صورت کسرها به مخرج‌ها و با توجه به این‌که $O'B + OA = O'H = 4$ نتیجه می‌شود.

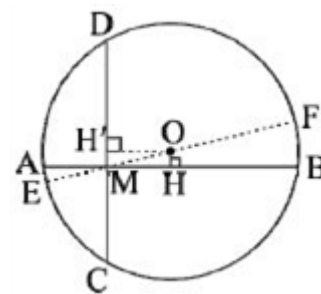
$$AM \cdot BM = CM \cdot DM \Rightarrow 12 = 3DM \Rightarrow DM = 4$$

$$\left. \begin{aligned} AH = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2 &\Rightarrow MH = AH - AM = 2 - 2 = 0 \\ CH' = \frac{CD}{2} = \frac{5}{2} &\Rightarrow MH' = CH' - CM = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow OM^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

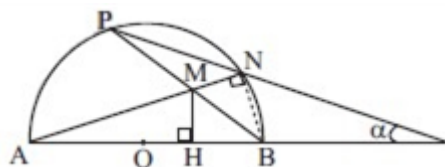
$$EM \cdot FM = AM \cdot BM \Rightarrow (R - OM)(R + OM) = 12 \Rightarrow R^2 - OM^2 = 12$$

$$\Rightarrow R^2 = 12 + \frac{17}{4} = \frac{65}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{65}}{2} \Rightarrow \text{قطر دایره } \sqrt{65}$$



۳۶

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



می‌دانیم $\widehat{ANB} = 90^\circ$ از تساوی $MN = MH$ نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی ABN توسط BP نصف شده است.

پس: $\widehat{AP} = \widehat{PN}$

چهارضلعی $MNBH$ محاطی است:

$$\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{HMN} = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ \Rightarrow \widehat{AP} = \widehat{PN} = 62^\circ \Rightarrow \widehat{BN} = 56^\circ$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{AP} - \widehat{BN}) = \frac{1}{2}(62^\circ - 56^\circ) = 3^\circ$$

۳۷

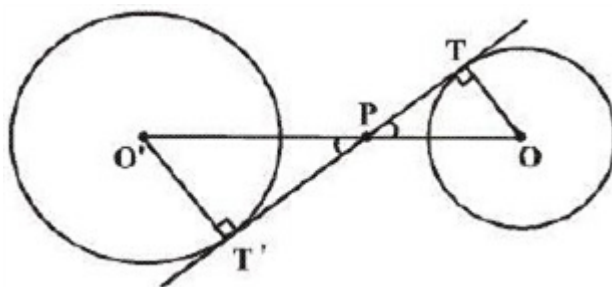
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. چون محل تقاطع خط‌های مرکزین و مماس مشترک، بین دو مرکز واقع است پس مماس مشترک داخلی است و داریم:

$$OT = 1 \text{ و } PT = \frac{4}{3} \Rightarrow OP = \frac{5}{3}$$

$$\triangle OPT \sim \triangle O'PT'$$

$$O'T' = 3 \text{ و } OT =$$

$$\Rightarrow PO' = 5 \Rightarrow OO' = \frac{20}{3}$$



$$\widehat{A}_r = 3x$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۳۸

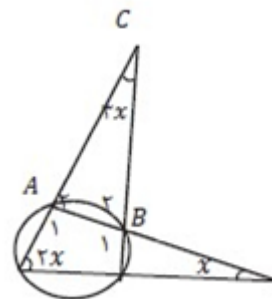
$$\widehat{B}_r = 180^\circ - 2x \text{ : خواص چهارضلعی محاطی}$$

$$\rightarrow \widehat{B}_r = 2x$$

$$\widehat{C} + \widehat{A}_r + \widehat{B}_r = 3x + 3x + 2x = 8x$$

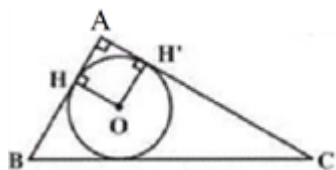
$$= 180^\circ \rightarrow x = \frac{180}{8}$$

$$= 22/5$$



۳۹

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی محل تلاقی نیمسازها از ضلع BC برابر است با شعاع دایره‌ی محاطی مثلث، پس:
 $OH = OH' = 2\sqrt{2}$ اما چهارضلعی OHAH' به دلیل داشتن چهار زاویه‌ی قائمه و برابر بودن دو ضلع مجاور OH و OH'، مربع بوده و HH' قطر مربع است پس داریم:



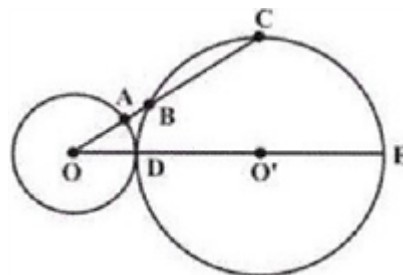
$$HH' = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

۴۰

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$OD \times OE = OB \times OC \Rightarrow \frac{R}{2} \times \frac{5R}{2} = OB \times 2R \Rightarrow OB = \frac{5}{4}R$$

$$AB = \frac{5}{4}R - \frac{1}{4}R \Rightarrow AB = \frac{1}{2}R$$



1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

