



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۴

عنوان آزمون : بانک تست هندسه دوازدهم

ریاضی (فصل ۳ بردارها)

۱ اگر $|\vec{a}| = 2$ ، $|\vec{b}| = 4$ و $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ باشد، مقدار عددی عبارت $(2\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ چقدر است؟

۱۶ (۴)

۱۶ (۳)

-۲۰ (۲)

۲۰ (۱)

۲ اگر بردارهای $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ قرینه‌ی بردار $\vec{a} = (-1, 2, -4)$ به ترتیب نسبت به صفحات مختصات xy ، xz و yz باشند آنگاه طول بردار $\vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$ برابر کدام است؟

$6\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$8\sqrt{2}$ (۲)

$4\sqrt{2}$ (۱)

۳ اگر دو بردار ناصفر $\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر هم عمود باشند، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط بردارهای

ناصفر $\frac{3\vec{a}}{|\vec{b}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

$6/4$ (۴)

$4/8$ (۳)

$3/2$ (۲)

$1/6$ (۱)

۴ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب به اندازه‌های ۵ و ۲ مفروض‌اند. اگر $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 8$ باشد، حاصل $|\vec{a} \times \vec{b}|$ کدام است؟

$6\sqrt{2}$ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

$4\sqrt{2}$ (۱)

۵ بردارهای $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ مفروض‌اند. در مثلثی که روی این دو بردار ساخته می‌شود، کسینوس زاویه‌ی رأس مقابل به بردار $\vec{a}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۶ خط L در فضا با هر دو صفحه xz و yz موازی است و از نقطه $A = (2, -3, -1)$ می‌گذرد. معادله صفحه شامل دو خط L و $L' : \begin{cases} y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$ کدام است؟

$y = 0$ (۴)

$z = 0$ (۳)

$z = 1$ (۲)

$y = -3$ (۱)

۷ دو بردار که اندازه یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویه 60° درجه می‌سازند. زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

۱۲۰ (۴)

60° (۳)

45° (۲)

30° (۱)

۸ اگر برای سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داشته باشیم: $\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 4$ ، اندازه بردار

$$\vec{V} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{b} \times (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$$

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۹ اگر زاویه بین دو بردار a و b حاده باشد و $|a| = 6$ ، $|b| = 5$ و $|a \times (2a + 3b)| = 54$ باشد، آن گاه حاصل $2a \cdot (a - 2b)$ کدام است؟

-۲۸ (۴)

-۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

-۱۲ (۱)

۱۰ دایره‌ای به قطر AB و نقطه M روی این دایره مفروض‌اند به طوری که $|\vec{AB}| = 1$ و $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 8$ واحد می‌باشند. چند نقطه مانند M روی این دایره تعریف می‌شوند؟

صفر (۴)

بی‌شمار (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 2i - j + 2k$ و $\vec{b} = (p, -1, 0)$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، p کدام می‌تواند باشد؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۷ (۲)

-۷ (۱)

۱۲ اگر $\vec{u} = (a, b, c)$ و $\vec{v} = (2, -1, 3)$ و $2a - b + 3c = 4$ باشد، حداقل مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ چه قدر است؟

$\frac{9}{8}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{8}{9}$ (۲)

$\frac{7}{8}$ (۱)

۱۳ اگر بردارهای $\vec{a}(3, 1, m)$ ، $\vec{b}(-1, 0, 2)$ و $\vec{c}(-2, 1, 1)$ هم‌صفحه باشند، $|\vec{a} \times \vec{b}|$ چقدر است؟

$\sqrt{17}$ (۴)

$\sqrt{15}$ (۳)

$\sqrt{13}$ (۲)

$\sqrt{14}$ (۱)

۱۴ اگر $\vec{a} = (m, 2, m)$ و $\vec{b} = (-1, 4, 2)$ باشد، کدام گزینه در مورد زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یعنی θ صحیح است؟

(۲) اگر $m < -8$ باشد، $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ است.

(۱) اگر $m = 8$ باشد، $\theta = \frac{\pi}{4}$ است.

(۴) اگر $m < -8$ باشد، $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ است.

(۳) اگر $m > -8$ باشد، $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ است.

۱۵ اگر $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ باشد، طول تصویر قائم $\vec{a}$ بر راستای $\vec{b}$ ، چند برابر $|\vec{a}|$ است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۱۶ بردار a عمود بر دو بردار $b = (1, 2, 3)$ و $c = (2, 0, -1)$ است. اگر مجموع مؤلفه‌های بردار a برابر ۲ باشد، طول تصویر این بردار روی محور x ها چه قدر است؟

۱۴ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۷ سه بردار a ، b و c با اندازه‌های $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ و $|c| = 6$ مفروض‌اند. اگر زاویه بین a و $b \times c$ برابر 60° ، زاویه بین b و c حاده و حجم متوازی السطوح ایجاد شده روی سه بردار a ، b و c برابر $24\sqrt{3}$ باشد، اندازه بردار $b - c$ کدام است؟

۷ (۴)

$3\sqrt{6}$ (۳)

۶ (۲)

$2\sqrt{7}$ (۱)

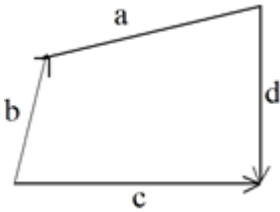
۱۸ اگر $A(1, 2, 1)$ ، $B(2, 1, 0)$ و $C(2, 0, -1)$ رئوس یک مثلث باشند، طول ارتفاع نظیر ضلع BC کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳ ۱ ۴ $\sqrt{3}$

۱۹ اگر a ، b و c بردارهای دلخواه باشند، عبارت $(a + b + c) \times (c + b) + (b - c) \times a$ برابر کدام است؟

- ۱ $a \times b$ ۲ $b \times c$ ۳ $a \times c$ ۴ بردار صفر

۲۰ بردارهای a ، b ، c و d به ترتیب با طولهای ۱، ۲، ۳ و ۴ مطابق شکل داده شده‌اند. حاصل $a \cdot c - b \cdot d$ برابر است با:



- ۱ صفر ۲ ۳ -۲ ۳ -۴ ۴

۲۱ حداقل فاصله‌ی نقطه‌ی $A = (\sqrt{m^2 + 1}, m - 2, m^2 - 2m)$ از محور z ها کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ ۲

۲۲ اگر $|a| = 2$ ، $|b| = \sqrt{5}$ و $|2a + 4b| = \sqrt{45}$ ، طول تصویر قائم بردار a بر راستای بردار b کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۳ $\sqrt{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۳ اگر $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 100$ ، بیش‌ترین مقدار $(x - 2y + 2z)$ کدام است؟ $(x, y, z \in \mathbb{R})$

- ۱ ۳۰ ۲ ۳۵ ۳ ۳۹ ۴ ۴۳

۲۴ تصویر قائم بردار $(2, 3, 1)$ نسبت به بردار $\vec{j} - 3$ کدام بردار است؟

- ۱ $(0, -9, 0)$ ۲ $(0, 3, 0)$ ۳ $(2, 0, 1)$ ۴ $(-6, 0, -3)$

۲۵ A' قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, 1, -3)$ نسبت به مبدأ مختصات و H تصویر نقطه‌ی A روی محور y هاست. اندازه‌ی $\overrightarrow{A'H}$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{11}$ ۲ $\sqrt{13}$ ۳ $\sqrt{15}$ ۴ $\sqrt{17}$

۲۶ اگر a ، b و c سه بردار یکه باشند که $a + b + c = 0$ ، حاصل $|a \times b| + |b \times c| + |c \times a|$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۲۷ دو بردار با تصاویر $a(1, 1, 2)$ و $b(-1, 0, 1)$ مفروض‌اند. حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای a ، $b \times i$ و $a \times k$ ساخته می‌شود، کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۵

۲۸ سه رأس مثلث ABC به صورت $A(3, -2, 1)$ و $B(3, 0, 2)$ و $C(1, 2, 5)$ می‌باشند. زاویه‌ی بین ضلع AC و میانه‌ی وارد بر آن چند درجه است؟

- ۱ 90° ۲ 45° ۳ 60° ۴ 30°

۲۹ بردار $a = (m, 2m, m-1)$ بردار یکه و غیرعمود بر صفحات مختصات است. m کدام است؟

- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ صفر یا $\frac{1}{3}$ ☐ صفر ☐

۳۰ اگر بردارهای $a = (-1, 2, 2)$ و $b = (2, -1, -2)$ مفروض باشند، آنگاه مجموع مؤلفه‌های بردار جهت نیم‌ساز زاویه بین a و b کدام است؟

- ۱ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ ۲ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ ۴ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐

۳۱ مجموعه فواصل نقطه‌ای $A = (a, b, c)$ از صفحات مختصات برابر ۱۰ و فاصله‌ی A از مبدأ مختصات برابر $5\sqrt{2}$ است. مقدار عددی $ab + ac + bc$ کدام است؟ (a, b و c هم علامت‌اند).

- ۱ ☐ ۲۵ ☐ ۲ ☐ ۲۳ ☐ ۳ ☐ ۲۱ ☐ ۴ ☐ ۱۹ ☐

۳۲ زاویه‌ی بین دو بردار یکه‌ی a و b برابر $\frac{\pi}{3}$ است. اندازه‌ی بردار $(a+b) \times (a \times b)$ کدام است؟

- ۱ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ ۲ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ ۴ ☐ ۳ ☐

۳۳ اگر $1 = a \cdot (i - 2j + 3k) = a \cdot (j - k) = a \cdot i$ ، اندازه‌ی بردار a کدام است؟

- ۱ ☐ $\sqrt{12}$ ☐ ۲ ☐ $\sqrt{13}$ ☐ ۳ ☐ $\sqrt{14}$ ☐ ۴ ☐ $\sqrt{15}$ ☐

۳۴ نقاط $A = (1, -2, 4)$ ، $B = (1, -1, 3)$ و $C = (3, -2, 2)$ رأس‌های یک مثلث‌اند. زاویه‌ی بین میانه‌ی BM و ضلع AC کدام است؟

- ۱ ☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ ۲ ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ ۴ ☐ $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ ☐

۳۵ بردارهای $a = (1, -1, 0)$ و $b = (x+1, y-3, x-y)$ موازیند، حاصل xy کدام است؟

- ۱ ☐ -۱ ☐ ۲ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۱ ☐ ۴ ☐ -۲ ☐

۳۶ بردارهای a و b و c واحد هستند اگر $a \perp b$ و زاویه‌ی بین b و c مساوی 60° درجه باشد، آنگاه حاصل $(c \times b) \cdot (a \times b)$ برابر کدام است؟

- ۱ ☐ ۱ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ ۲ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ ۴ ☐ -۱ ☐

۳۷ با سه بردار $a = (0, 2, 3)$ و $b = (1, -1, 0)$ و $c = (2, 0, -2)$ متوازی‌السطوحی ساخته‌ایم. حجم چهاروجهی که با بردارهای a و b و مرکز متوازی‌السطوح ساخته می‌شود، کدام است؟

- ۱ ☐ $\frac{5}{6}$ ☐ ۲ ☐ $\frac{5}{3}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{6}{5}$ ☐ ۴ ☐ $\frac{3}{5}$ ☐

۳۸ اگر سه بردار با تصاویر $(2, a, 1)$ ، $(b, 2, 4)$ و $(2, 1, c)$ یال‌های یک مکعب‌مستطیل باشند، حجم آن کدام است؟

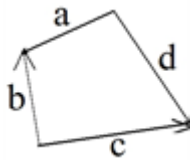
- ۱ ☐ ۳۲ ☐ ۲ ☐ ۳۶ ☐ ۳ ☐ ۴۲ ☐ ۴ ☐ ۴۵ ☐

۳۹ اگر $A = (3, 1, 0)$ ، $B = (1, -1, 1)$ و $C = (2, -1, 0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آنگاه طول ارتفاع وارد بر ضلع BC در این مثلث چقدر است؟

- ۱ ☐ $3\sqrt{2}$ ☐ ۲ ☐ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ☐ ۳ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ ۴ ☐ $2\sqrt{3}$ ☐

۴۰

بردارهای a ، b ، c و d به ترتیب با طول‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ مطابق شکل زیر مفروض‌اند. حاصل $a \cdot c - b \cdot d$ کدام است؟



۱ صفر

۲ - ۲

۳ ۴

۴ ۵

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \Rightarrow 4 + 16 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} (2\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \underbrace{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}_{-\vec{c}} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{c}|^2 \\ &= 2\vec{a} \cdot \vec{b} - (20 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) = -20. \end{aligned}$$

۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

قرینه‌ی بردار (x, y, z) نسبت به صفحه‌ی xy بردار $(x, y, -z)$ است و قرینه‌ی بردار (x, y, z) نسبت به صفحه‌ی xz بردار $(-x, y, z)$ است و قرینه‌ی بردار (x, y, z) نسبت به صفحه‌ی yz بردار $(-x, y, z)$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } xy} \vec{b}(-1, 2, 4) \\ \vec{a}(-1, 2, -4) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } xz} \vec{c}(-1, -2, -4) \\ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } yz} \vec{d}(1, 2, -4) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \vec{b} + 2\vec{c} - \vec{d} &= (-1, 2, 4) + 2(-1, -2, -4) - (1, 2, -4) = (-4, -4, 0) \\ \Rightarrow |\vec{b} + 2\vec{c} - \vec{d}| &= |(-4, -4, 0)| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است. در صورتی که θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم.

$$\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \cdot \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = 0$$

$$\frac{4}{|\vec{a}|^2} - \frac{20 |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{21}{|\vec{b}|^2} = 0 \Rightarrow 4 - 20 \cos \theta - 21 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$S = \left| \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} - \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right|$$

$$= \left| \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{1}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{b} \times \vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}| |\vec{b}|} (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta) = \sin \theta = \frac{4}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$$

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق ویژگی‌های ضرب داخلی دو بردار داریم:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow 8^2 = 4 \times 5^2 + 9 \times 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow 12\vec{a} \cdot \vec{b} = 100 + 36 - 64 = 72 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + 6^2 = 5^2 \times 2^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 8$$

۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضلع سوم مثلثی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، تفاضل این دو بردار یعنی بردار $\vec{a} - \vec{b}$ یا $\vec{b} - \vec{a}$ است. داریم:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (3, -1, 2) - (1, 1, -2) = (2, -2, 4)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

اگر زاویه‌ی مقابل به بردار $\vec{a}$ در این مثلث را با α نمایش دهیم، آن‌گاه طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها در این مثلث داریم:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 14 = 6 + 24 - 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \cos\alpha \Rightarrow 24 \cos\alpha = 14 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{12}$$

تذکر: می‌توان کسینوس زاویه‌ی α را به کمک ضرب داخلی دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ محاسبه کرد. در این صورت داریم:

$$|\cos\alpha| = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{c}|}{|\vec{b}||\vec{c}|}$$

چون اندازه‌ی بردار $\vec{c}$ بزرگ‌تر از اندازه‌ی بردار $\vec{a}$ است، پس زاویه‌ی روبه‌رو به بردار $\vec{a}$ (زاویه‌ی α) قطعاً حاده بوده و کسینوس آن مثبت است.

۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط L با هر دو صفحه‌ی XZ و YZ موازی است، پس با فصل مشترک این دو صفحه یعنی محور z

ها موازی است و چون از نقطه‌ی $A = (2, -3, -1)$ می‌گذرد، معادله‌ی آن به صورت $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ است.

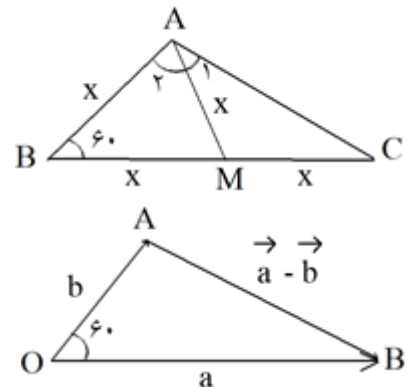
صفحه‌ی موردنظر شامل خط L (موازی محور z ها) و خط L' (موازی محور x ها) است، پس با دو محور X و Z موازی بوده و در نتیجه عمود بر محور y ها است و معادله‌ی آن به صورت $y = k$ می‌باشد که با توجه به معادلات خطوط L و L' ، این معادله به صورت $y = -3$ خواهد بود.

۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. درنظر بگیرید $\vec{a} = 2\vec{b}$ در این صورت بردار $\vec{a} - \vec{b}$ مطابق شکل مقابل خواهد بود.

در مثلث OAB یک زاویه 60° و اندازه‌ی دو ضلع این زاویه‌ی 60° به نسبت ۱ به ۲ هستند پس مثلث OAB قائم الزاویه است و $\hat{A} = 90^\circ$ پس $\hat{B} = 30^\circ$ در نتیجه زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر 30° است.

نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC زاویه $\hat{B}$ مساوی 60° و $AB = x$ و $BC = 2x$ آنگاه $\hat{A} = 90^\circ$. زیرا اگر میانه AM وارد بر BC را رسم کنید آنگاه مثلث ABM متساوی‌الاضلاع و مثلث AMC متساوی‌الساقین است. پس $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و $\hat{A}_2 = 30^\circ$ در نتیجه $\hat{A} = 90^\circ$.



۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ثابت می‌کنیم که:

$$\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{m} \times \vec{n} = \vec{n} \times \vec{p} = \vec{p} \times \vec{m}$$

داریم:

$$۱) \vec{m} + \vec{n} + \vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{m} \times (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}) = \vec{0} \Rightarrow \cancel{\vec{m} \times \vec{m}} + \vec{m} \times \vec{n} + \vec{m} \times \vec{p} = \vec{0}$$

$$\vec{m} \times \vec{n} = -\vec{m} \times \vec{p} = \vec{p} \times \vec{m} \quad (۱)$$

$$۲) \vec{n} \times (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{m} + \cancel{\vec{n} \times \vec{n}} + \vec{n} \times \vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{m} + \vec{n} \times \vec{p} = \vec{0}$$

$$\vec{n} \times \vec{p} = -\vec{n} \times \vec{m} = \vec{m} \times \vec{n} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \vec{m} \times \vec{n} = \vec{n} \times \vec{p} = \vec{p} \times \vec{m}$$

بنابراین داریم:

$$\vec{a} + (\sqrt{2}\vec{b}) + (-\sqrt{2}\vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \sqrt{2}\vec{b} = \sqrt{2}\vec{b} \times (-\sqrt{2}\vec{c}) = (-\sqrt{2}\vec{c}) \times \vec{a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\vec{a} \times \vec{b} = -\sqrt{2}\vec{b} \times \vec{c} = -\sqrt{2}\vec{c} \times \vec{a} \quad (۳)$$

$$(۳) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{2}\vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{c}) = -\vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow -\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} \\ (۳) \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} \times \vec{b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} \\ (۳) \Rightarrow \vec{c} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \text{ و } \vec{c} \times \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\vec{V} = \sqrt{2}\vec{a} \times \vec{b} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{2}\vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = ۲$$

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|\sqrt{2}\vec{a} \times \vec{a} + \sqrt{2}\vec{a} \times \vec{b}| = ۵ \Rightarrow \sqrt{2}|a||b|\sin\theta = ۵ \Rightarrow \sin\theta = \frac{18}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\theta < 90^\circ} \cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$2\vec{a} \cdot (\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}) = 2|a|^2 - \sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 25 - \sqrt{2}|a||b|\cos\theta \Rightarrow ۷۲ - \sqrt{2} \times 5 \times 5 \times \frac{4}{5} = ۷۲ - ۲۰ = ۵۲$$

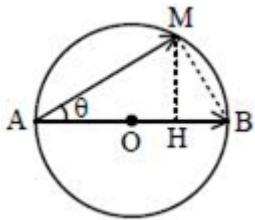
۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = |\vec{AB}||\vec{AM}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۱ \times |\vec{AM}|\cos\theta = ۸ \Rightarrow |\vec{AM}|\cos\theta = ۸$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{AH}|}{|\vec{AM}|} \Rightarrow |\vec{AM}|\cos\theta = |\vec{AH}| \Rightarrow |\vec{AH}| = ۸$$

$$\Rightarrow |\vec{AH}| > |\vec{AB}| \text{ (غیرممکن)}$$



۱۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \frac{2p + 1 + 0}{\sqrt{2p^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} \frac{2p^2 + 4p + 1}{4p^2 + 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4p^2 + 4p + 2 = 2p^2 + 2 \Rightarrow p^2 - 4p + 2 = 0 \Rightarrow p = ۱, ۲$$

۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از (نامساوی کوشی - شوارتز) استفاده می‌کنیم:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| \Rightarrow |2a - b + 3c| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{4 + 1 + 9} \\ \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{14}} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{16}{7} \Rightarrow \min(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{16}{7}$$

۱۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(0 - 2) - 1(-1 + 4) + m(-1 - 0) = -m - 9 = 0 \Rightarrow m = -9 \Rightarrow \vec{a} = (3, 1, -9)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 3, 1) \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

۱۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -m + 1 + 2m = m + 1$$

m	-1
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	- 0 +

$$\begin{cases} m < -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \\ m > -1 \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ m = -1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۱۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر θ زاویه بین بردارهای a و b داریم:

$$\tan \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

اگر بردار $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر راستای بردار $\vec{b}$ باشد، داریم:

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos \theta \xrightarrow{\theta=60^\circ} |\vec{a}'| = \frac{1}{2} |\vec{a}|$$

۱۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون a بر دو بردار b و c عمود است، پس a مضرب $b \times c$ است:

$$b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 3j - 4k$$

$$\vec{a} = (-2m, 3m, -4m) \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\vec{a} = \text{مجموع مؤلفه های } = -2m + 3m - 4m = m$$

چون جمع مؤلفه‌های $\vec{a}$ برابر ۲- پس $m = -2$ و $\vec{a} = (4, -14, 8)$.

در نهایت به دست می‌آید.

طول تصویر a بر محور x ها = 4

۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم حجم متوازی‌السطوح ایجاد شده روی سه بردار a ، b و c برابر $|a \cdot (b \times c)|$ است. پس:

$$|a \cdot (b \times c)| = 24\sqrt{3}$$

حال اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار b و c فرض شود، داریم:

$$|a| |b \times c| |\cos 60^\circ| = 24\sqrt{3} \Rightarrow \underbrace{4}_{\frac{1}{4}} \underbrace{|b||c|}_{\frac{1}{6}} \sin \theta \times \frac{1}{2} = 24\sqrt{3} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

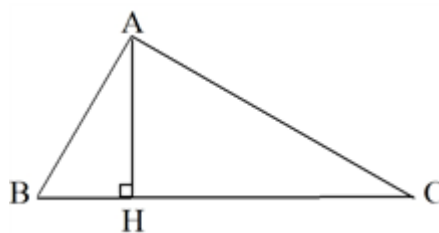
$$\overset{0^\circ < \theta < 90^\circ}{\rightarrow} \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$|b - c|^2 = |b|^2 + |c|^2 - 2|b||c|\cos \theta = 28 \Rightarrow |b - c| = 2\sqrt{7}$$

در نتیجه:

۱۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:



$$\begin{cases} \vec{BC} = (0, -1, -1) \\ \vec{BA} = (-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BA}|$$

$$\vec{BC} \times \vec{BA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, -1) \Rightarrow |\vec{BC} \times \vec{BA}| = \sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{BC}| |\vec{AH}|$$

از طرفی می‌دانیم:

$$|\vec{AH}| = \frac{|\vec{BC} \times \vec{BA}|}{|\vec{BC}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

با مقایسه روابط بالا داریم:

۱۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارهای خاصیت پخشی دارد. داریم:

$$(a + b + c) \times (c + b) + (b - c) \times a$$

$$= a \times c + a \times b + \underbrace{b \times b}_0 + \underbrace{c \times c}_0 + c \times b + b \times a - c \times a$$

$$= a \times c + a \times b + b \times c - b \times c - a \times b + a \times c = 2a \times c$$

۲۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داده شده داریم:

$$a + (-b) + c + (-d) = 0 \Rightarrow a + c = b + d \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |a|^2 + |c|^2 + 2a \cdot c$$

$$= |b|^2 + |d|^2 + 2b \cdot d \Rightarrow 2(a \cdot c - b \cdot d) = |b|^2 + |d|^2 - |a|^2 - |c|^2 \Rightarrow 2(a \cdot c - b \cdot d)$$

$$= 2^2 + 3^2 - 1^2 - 4^2 = -4 \Rightarrow a \cdot c - b \cdot d = -2$$

۲۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله از محور z ها برابر است با:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{m^2 + 1})^2 + (m - 2)^2} = \sqrt{2m^2 - 4m + 5}$$

$$\sqrt{2(m^2 - 2m + 1) + 3} = \sqrt{2(m - 1)^2 + 3}$$

واضح است که کمترین مقدار این عبارت، به ازای $m = 1$ اتفاق می‌افتد و کمترین فاصله برابر است با: $\sqrt{3}$

۲۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|2a + 3b| = \sqrt{85} \Rightarrow |2a + 3b|^2 = 85$$

$$\Rightarrow 4|a|^2 + 12a \cdot b + 9|b|^2 = 85$$

$$\Rightarrow 16 + 12a \cdot b + 45 = 85 \Rightarrow 12a \cdot b = 24 \Rightarrow a \cdot b = 2$$

$$|a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

اگر a' تصویر قائم a بر راستای b باشد، داریم:گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $a = (x-1, y+3, z-3)$ و $b = (1, -2, 2)$ ، بنا به نامساوی کوشی - شوارتز

داریم:

$$|a \cdot b| \leq |a| |b|$$

$$\Rightarrow |1(x-1) - 2(y+3) + 2(z-3)| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2} \times \sqrt{1+4+4}$$

$$\Rightarrow |x - 2y + 2z - 13| \sqrt{100} \times \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow -30 \leq x - 2y + 2z - 13 \leq 30$$

$$\Rightarrow -17 \leq x - 2y + 2z \leq 43 \Rightarrow \max(x - 2y + 2z) = 43$$

۲۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

روش اول: بردار تصویر $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ از رابطه $\left(\frac{a \cdot b}{|b|^2}\right) \vec{b}$ به دست می‌آید:

$$\left(\frac{a \cdot b}{|b|^2}\right) \vec{b} = \frac{-9}{9} (0, -3, 0) = (0, 3, 0)$$

روش دوم: بردار $\vec{j}$ هم‌راستا با محور y ها است، بنابراین برای تصویر روی محور y ها تنها کافی است دو درایه x و z را صفر قرار دهیم: $(0, 3, 0)$.

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x, y, z)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ی $A(-x, -y, -z)$ است.نکته: تصویر نقطه‌ی $A(x, y, z)$ بر روی محور y ها، نقطه‌ی $H(0, y, 0)$ است.

با توجه به نکات بالا، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'(-2, -1, 3) \\ H(0, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A'H} = (2, 2, -3) \Rightarrow |\vec{A'H}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر a, b و c سه بردار هم‌اندازه باشند که $a + b + c = 0$ ، آن‌گاه سه بردار در یک صفحهبوده و دو به دو باهم زاویه‌ی 120° می‌سازند. پس:

$$|a \times b| = |a| |b| \sin 120^\circ = (1)(1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

به همین ترتیب $|b \times c| = |c \times a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و حاصل عبارت برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ می‌شود.

۲۵

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$b \times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j \quad a \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j$$

حجم متوازی‌السطوح مساوی قدرمطلق ضرب مختلط سه یال آن می‌باشد.

$$a \cdot ((b \times i) \times (a \times k)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0) - 1(0) + 2(-1) = -2$$

$$\text{حجم} = |-2| = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$MA = MC \Rightarrow M \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BM} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{2 + 0 + 4}{\sqrt{36} \sqrt{17}} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \right) = 45^\circ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 1 \rightarrow \sqrt{m^2 + 4m^2 + (m-1)^2} = 1 \rightarrow 5m^2 + m^2 - 2m + 1 = 1 \rightarrow 6m^2 - 2m = 0 \rightarrow 2m(3m-1) = 0 \\ \rightarrow m &= 0 \rightarrow \vec{a} = (0, 0, -1) \\ \rightarrow m &= \frac{1}{3} \rightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

$a = (0, 0, -1)$ برداری عمود بر صفحه xy است در نتیجه فقط $m = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بردار $e_a + e_b$ بردار نیمساز زاویه بین بردارهای a و b است. داریم: ۳۰

$$|a| = 3 \Rightarrow e_a = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$|b| = 3 \Rightarrow e_b = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$e_a + e_b = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) \Rightarrow |e_a + e_b| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

بنابراین برای یافتن بردار جهت نیمساز زاویه بین بردارهای a و b ، کافی است بردار $e_a + e_b$ را بر اندازه آن یعنی $\frac{\sqrt{2}}{3}$

تقسیم کنیم. در نتیجه بردار موردنظر برابر است با $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0 \right)$ که مجموع مؤلفه‌های آن برابر $\sqrt{2}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به مفروضات مسئله داریم: ۳۱

$$|a| + |b| + |c| = 10, a^2 + b^2 + c^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$$

$$(|a| + |b| + |c|)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2|ab| + 2|ac| + 2|bc|$$

حال:

$$\Rightarrow 100 = 50 + 2(|ab| + |ac| + |bc|)$$

$$\Rightarrow |ab| + |ac| + |bc| = 25$$

$$\xrightarrow{a, b, c \text{ هم علامت اند}} ab + ac + bc = 25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos \theta$$

$$= 1 + 1 + 2 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow |a+b| = \sqrt{3}$$

بردار $a \times b$ بر بردارهای a و b و در نتیجه بر $a+b$ عمود است.

$$|(a+b) \times (a \times b)| = |a+b| |a \times b| \sin 90^\circ$$

$$= |a+b| (|a||b| \sin 60^\circ) \sin 90^\circ$$

$$= \sqrt{3} \left(1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 1 = \frac{3}{2}$$

۳۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ داریم: $a \cdot i = a_1$, $a \cdot j = a_2$ و $a \cdot k = a_3$ در

$$a \cdot i = a \cdot (j - k) = a \cdot (i - 2j + 3k) = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 - a_3 = a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 1$$

نتیجه:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 - a_3 = 1 \\ -2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 2, a_2 = 3$$

$$|a| = \sqrt{14} \text{ و } a = (1, 3, 2)$$

۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه M وسط ضلع AC است، پس:

$$M = \frac{1}{2}[(1, -2, 4) + (3, -2, 2)] = (2, -2, 3) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1, -1, 0)$$

از سوی دیگر داریم $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$ پس اگر θ زاویه موردنظر باشد، آن گاه می توانیم بنویسیم:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BM}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(1, -1, 0) \cdot (2, 0, -2)}{|(1, -1, 0)| |(2, 0, -2)|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۳۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر این دو بردار موازی باشند، لازم است که عددی حقیقی مانند r یافت شود که: $b = ra$.یعنی: $(x+1, y-3, x-y) = (r, -r, 0)$ پس باید $x-y=0$ و در نتیجه $x=y$.

$$\begin{cases} x+1=r \\ y-3=-r \end{cases} \Rightarrow x+1=1(y-3) \Rightarrow x+1=-(x-3) \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow xy=1$$

۳۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(a \times b) \cdot (c \times b) = -c \cdot [(a \times b) \times b]$$

$$= -c \cdot \left[\underbrace{(a \cdot b)}_{\text{صفر}} b - (b \cdot b) a \right] = |b|^2 (a \cdot c) = 1 \times 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مرکز متوازی السطوح وسط قطر است و بنابراین $\frac{1}{3}(a+b+c)$ بردار مکان آن خواهد بود:

$$V = \frac{1}{6} \left| \frac{1}{3}(a+b+c) \cdot (a \times b) \right| = \frac{1}{18} |c \cdot (a \times b)|$$

$$= \frac{1}{18} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{18} |10| = \frac{5}{9}$$

۳۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. توجه داشته باشید چون سه یال مکعب مستطیل سه بردار هستند هر سه در مبدأ

همرسند، پس یالهای مکعب مستطیل دوجه دو عموداند.

$$(2, a, 1) \cdot (b, 2, 4) = 0 \Rightarrow 2b + 2a + 4 = 0$$

$$(2, a, 1) \cdot (2, 1, c) = 0 \Rightarrow 4 + a + c = 0$$

$$(b, 2, 4) \cdot (2, 1, c) = 0 \Rightarrow 2b + 2 + 4c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a+c=-4 \\ b+2c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-c=2 \\ b+2c=-1 \end{cases} \Rightarrow 3c=-3 \Rightarrow c=-1, b=1, a=-3$$

$$\text{ضرب مختلط سه بردار} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-6) + 3(-9) + 1(-3) = -42$$

$$\text{حجم} = |-42| = 42$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌نماییم. داریم:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (2, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (1, 0, -1)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 1 + 4} = \frac{3}{2}$$

$$|BC| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

اگر AH، ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، آن‌گاه:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

$$\Rightarrow |a + c|^2 = |b + d|^2 \Rightarrow |a|^2 + |c|^2 + 2a \cdot c = |b|^2 + |d|^2 + 2b \cdot d$$

$$\Rightarrow 2(a \cdot c - b \cdot d) = 4^2 + 2^2 - (1^2 + 3^2) = 10 \Rightarrow a \cdot c - b \cdot d = 5$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

