



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۴

عنوان آزمون : بانک تست هندسه دوازدهم

ریاضی (فصل ۱ ماتریس ها و وکابردها)

۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $A^T = mA + nI$ و $A = m'A' + n'I$ باشد، آنگاه $m + n$ چند واحد از $m' + n'$ کوچکتر است؟

۷۰ (۴)

۶۹ (۳)

۶۱ (۲)

۵۰ (۱)

۲ به درایه‌ی سطر دوم ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ m & 1 & -4 \end{bmatrix}$ سه واحد اضافه می‌کنیم. اگر به مقدار دترمینان آن دو واحد اضافه شود، مقدار m کدام است؟

$-\frac{8}{3}$ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

$-\frac{11}{3}$ (۱)

۳ اگر $a = (\text{Log } 25)^2 - (\text{Log } 4)^2$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{4} & 2\frac{a}{3} \\ 5\frac{a}{2} & 1 & \frac{a}{3} \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left|\frac{1}{3}A\right|$ کدام است؟

$\frac{75}{24}$ (۴)

$\frac{25}{24}$ (۳)

$\frac{75}{8}$ (۲)

$\frac{25}{8}$ (۱)

۴ اگر دستگاه $\begin{cases} 2x + ay = 1 \\ (a+1)x + 10y = -2 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، آنگاه مجموع درایه‌های وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax + 2y = -8 \\ 3x + ay = -2 \end{cases}$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۵ اگر $A^T = A$ ، $\lambda \neq 1$ و $I - \lambda A$ وارون پذیر و $(I - \lambda A)^{-1} = I + mA$ باشد، m کدام است؟ ($A \neq 0$)

$\frac{1}{1-\lambda}$ (۴)

$\frac{\lambda}{\lambda-1}$ (۳)

$\frac{\lambda}{1-\lambda}$ (۲)

$\frac{1}{\lambda-1}$ (۱)

۶ ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} j^2 - 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ و ماتریس اسکالر B هم‌مرتبه‌ی با A مفروض هستند. اگر مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر ۲ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $B - \frac{1}{4}B$ برابر کدام است؟

$-\frac{4}{11}$ (۴)

$-\frac{2}{11}$ (۳)

$-\frac{6}{11}$ (۲)

$-\frac{3}{11}$ (۱)

۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس CAB کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۸ اگر $A + 2I = [i + j]_{3 \times 3}$ و $B - I = [i - j]_{3 \times 3}$ باشد، حاصل $\frac{|AB|}{91}$ کدام است؟

- ۱ 4^3 ۲ 4^2 ۳ ۴ ۴ ۱

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 2|A|^2 & 4 \\ |A| & 5|A| \end{bmatrix}$ ، آنگاه مقدار $|A|$ کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴ صفر

۱۰ اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ ، $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$ باشند، درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون سوم $(AB)^2$ کدام است؟

- ۱ -۱۵۵ ۲ -۱۵ ۳ ۱۹ ۴ ۱۶۵

۱۱ اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(ABA^{-1})^{20}$ کدام است؟

- ۱ 2^{20} ۲ 4^{21} ۳ 2^{21} ۴ 4^{11}

۱۲ هرگاه A یک ماتریس اسکالر باشد به طوری که $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ و $BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $(A + 2B)(A - B)$ کدام است؟

- ۱ $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ۲ $\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 10 & 36 \end{bmatrix}$ ۳ $\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$ ۴ $\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 21 \end{bmatrix}$

۱۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان $(A^{-1})^2$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{125}$ ۲ $-\frac{1}{125}$ ۳ $\frac{1}{25}$ ۴ $-\frac{1}{25}$

۱۴ اگر ماتریس ناصفر $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مقدار a ، کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ صفر ۳ ۴ ۴ ۱۲

۱۵ ماتریس $A = [2i - 2j]_{2 \times 2}$ شامل چند درایه‌ی ۱ است؟

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

۱۶ اگر ماتریس $A_{2 \times 2}$ وارون‌پذیر بوده به طوری که $|I - 2A| \neq 0$ و $|A| = 2$ باشد و داشته باشیم: $|A^{-1} - 2I| = |I - 4A^2|$ ، حاصل $|A^{-1} + 2I|$ کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ ۲

۱۷) اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|^2 - 2$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۲ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{10\sqrt{10}}$ ۳) -۲ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{10}$

۱۸) اگر ${}^2A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ -1 & |A| \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $\left| -\frac{1}{2}A^{-1} \right|$ برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۱۹) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ و $A = \begin{bmatrix} a-1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & j \neq 2 \\ 3a_{ij} & j = 2 \end{cases}$ و $|B| = -15$ باشد، a کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰) به‌ازای چه مقادیری از k ، دستگاه $\begin{bmatrix} k & -3 \\ 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $+3$ و -3 ۴) همه‌ی مقادیر k

۲۱) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & 2 \\ 2 & c & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر با افزودن ۴ واحد به درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون دوم این ماتریس، دترمینان آن تغییری نکند، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۶ ۴) -۶

۲۲) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی وارون‌پذیر با درایه‌های غیرصفر و $A + A^{-1}$ یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A + A^{-1}$ کدام است؟

- ۱) $a^2 d^2$ ۲) $a^2 - d^2$ ۳) $a^2 + d^2$ ۴) $(a + d)^2$

۲۳) ریشه‌ی معادله‌ی $0 = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & 2x & 1 \\ 2 & -1 & 3x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ x \end{bmatrix}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $-\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

۲۴) اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ i & i = j \end{cases}$ و ماتریس B یک ماتریس اسکالر هم‌مرتبه با A باشد، در صورتی‌که مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر ۱۸ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

- ۱) ۱۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۹

۲۵) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = [2i + j]_{3 \times 3}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های ستون سوم ماتریس X از رابطه‌ی ${}^2X + A + B = \bar{O}$ چقدر است؟

- ۱) $96/25$ ۲) $96/75$ ۳) $-96/25$ ۴) $-96/75$

۲۶ اگر دو ماتریس A و B مربعی بوده و ماتریس AB قرینه BA باشد، کدام عبارت جبری ناصحیح است؟

$BA^T = A^T B$ (۲) $(A^d + B^d)^T = A^{dT} + B^{dT}$ (۱)

$(A^T - B^T)^T = A^{TT} + B^{TT}$ (۴) $(A^T - B^T)(A^T + B^T) = A^T - B^T$ (۳)

۲۷ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

-A (۲) A (۱)

$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ (۴) $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ (۳)

۲۸ ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 1 & -m \\ m & -m \end{bmatrix}$ داده شده است. به ازای چند مقدار m تساوی $A^{TT} + I = \bar{O}$ برقرار است؟

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴)

۲۹ اگر $A^T = \delta I$ آن گاه A^{-1} برابر کدام است؟

$\frac{1}{\delta} I$ (۱) $\frac{1}{\delta} A$ (۲) $\frac{1}{\delta} A^T$ (۳) A (۴)

۳۰ اگر $\begin{vmatrix} a & b & -1 \\ c & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ b & 1 & -1 \\ a & c & 3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

$-k - 1$ (۱) $k - 1$ (۲) $-k$ (۳) k (۴)

۳۱ ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & 2 \\ 2m+5 & 3 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست. مجموع درایه‌های وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} m+2 & 1 & -m \\ 2m-1 & m \end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

$\frac{-1}{30}$ (۱) $\frac{-1}{5}$ (۲) $\frac{-1}{31}$ (۳) $\frac{-5}{153}$ (۴)

۳۲ چندجمله‌ای $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 2 & x^2 + 1 \end{vmatrix}$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش پذیر است؟

$x^2 - x + 2$ (۱) $x + 1$ (۲) $x^2 + x + 1$ (۳) $x^2 + x + 2$ (۴)

۳۳ اگر وارون ماتریس $\begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix}$ با خودش برابر باشد، دترمینان این ماتریس کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴)

۳۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & -8 & -9 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس $3A + B$ کدام درایه وجود ندارد؟

۵ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴)

۳۵ اگر در حل دستگاه $\begin{cases} ax + by = 4 \\ cx + dy = -5 \end{cases}$ به کمک روش ماتریس وارون، ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس ضرایب باشد، مقدار $x + y$ کدام است؟ (a ، b ، c و d اعدادی حقیقی هستند).

- ۱) ۲۸ ۲) ۲۶- ۳) ۲۵- ۴) ۲۴-

۳۶ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A - 4I$ معکوس یکدیگرند. مقدار a کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۷ اگر A ماتریس مربعی باشد که $A^T = I$ ، آن‌گاه حاصل $3A + A^{-1}$ کدام است؟

- ۱) $4A$ ۲) $4A^{-1}$ ۳) ماتریس صفر ۴) موارد ۱ و ۲ صحیح هستند.

۳۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{1387} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $a + b + c + d$ کدام است؟

- ۱) ۱۳۸۹ ۲) ۱۳۸۸ ۳) ۱۳۸۷ ۴) ۱۳۸۶

۳۹ اگر A ماتریس مربعی از مرتبه‌ی ۳ بوده و $|A| = -4$ و $(A - I)^T = -4A$ باشد، حاصل $|A^T + I|$ کدام است؟

- ۱) -۱۶ ۲) ۱۶ ۳) -۳۲ ۴) ۳۲

۴۰ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $\alpha A + \beta B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، مقدار $\alpha - \beta$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه کیلی همیلتون در $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A^5 - (a+d)A + (ad-bc)I &= 0 \Rightarrow A^5 - 5A + 7I = 0 \quad (*) \Rightarrow A^5 = 5A - 7I \\ \Rightarrow A^5 &= 25A^4 - 70A^3 + 49A^2 \Rightarrow A^5 = 25(5A - 7I) - 70A + 49I \Rightarrow A^5 = 55A - 126I \\ \Rightarrow m+n &= -71 \xrightarrow{(*) \times A^4} A - 5I + 7A^{-1} = 0 \Rightarrow A = 5I - 7A^{-1} = -7A^{-1} + 5I \\ \Rightarrow m' + n' &= -2 \Rightarrow (m' + n') - (m + n) = -2 - (-71) = 69 \end{aligned}$$

۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

بنابر فرض ماتریس جدید $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ m & 1 & -4 \end{bmatrix}$ است و باید حساب عبارت زیر را به دست آوریم.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

اکنون هر دو دترمینان را برحسب سطر دوم به دست می‌آوریم. در این صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ m & 1 & -4 \end{vmatrix} = (2+1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow -2(3+m) = 2 \Rightarrow -6 - 2m = 2 \Rightarrow m = -\frac{11}{2}$$

۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 10^{\frac{a}{2}} & 2^{\frac{a}{2}} \\ 5^{\frac{a}{2}} & 10^{\frac{a}{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان میگیریم}} |A| = \begin{bmatrix} 10^{\frac{a}{2}} & 2^{\frac{a}{2}} \\ 5^{\frac{a}{2}} & 10^{\frac{a}{2}} \end{bmatrix} \\ &= 10^{\frac{a}{2}} \times 10^{\frac{a}{2}} - 5^{\frac{a}{2}} \times 2^{\frac{a}{2}} = 10^{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}} - (5 \times 2)^{\frac{a}{2}} = 10^{\frac{7a}{2}} - 10^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

از طرف دیگر بنابر فرض داریم:

$$\begin{aligned} a &= (\log 25)^7 - (\log 4)^7 = (\log 25 - \log 4)(\log 25 + \log 4) = \left(\log \frac{25}{4}\right)(\log 100) \\ &= \left(\log \frac{25}{4}\right)(2) = 2 \log \frac{25}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} |A| &= 10^{\frac{7a}{2}} - 10^{\frac{a}{2}} \xrightarrow{\text{از ۱ جز}} |A| = 10^{\frac{7}{2} \log \frac{25}{4}} - 10^{\log \frac{25}{4}} \Rightarrow |A| = 10^{\log \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{7}{2}}} - 10^{\log \frac{25}{4}} \\ &= \left(\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{7}{2}}\right)^{\log 10} - \left(\frac{25}{4}\right)^{\log 10} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^7 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{8} - \frac{25}{4} \\ &= \frac{125 - 50}{8} = \frac{75}{8} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\left|\frac{1}{3}A\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^7 |A| = \frac{1}{9} \times \frac{75}{8} = \frac{25}{24}$$

تذکر: از روابط $\log 10 = 1$ و $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ و $\log a + \log b = \log ab$ و $a^{\log b} = b^{\log a}$ و $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ در حل

سؤال استفاده شده است.

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شرط داشتن بی‌شمار جواب آن است که:

$$\frac{2}{a+1} = \frac{a}{10} = \frac{1}{-2}$$

$$(1): a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow (a+5)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$a = -5 \Rightarrow \frac{-5}{10} = \frac{1}{-2}$$

نتایج قسمت ۱ را در تساوی ۲ قرار می‌دهیم:

$$a = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{1}{-2}$$

غ ق ق

پس $a = -5$ قابل قبول است. بنابراین ماتریس ضرایب دستگاه دوم به صورت $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ و وارون آن

$A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ است و در نتیجه مجموعه درایه‌های A^{-1} برابر است با:

$$\frac{1}{16}(-5-3-3-5) = -1$$

۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(I - \lambda A)(I - \lambda A)^{-1} = I \Rightarrow (I - \lambda A)(I + mA) = I \Rightarrow I - \lambda A + mA - \lambda mA^T = I$$

$$\xrightarrow{A^T=A} -\lambda A + mA - \lambda mA = \bar{0} \Rightarrow A(-\lambda + m - \lambda m) = \bar{0} \xrightarrow{A \neq \bar{0}} -\lambda + m - \lambda m = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ابتدا درایه‌های ماتریس A را با توجه به تعریف a_{ij} به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

درضمن، ماتریس B ماتریس اسکالر از مرتبه‌ی 3×3 است، پس:

$$B = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3m & 0 \\ 0 & 0 & 8m \end{bmatrix}$$

چون مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر ۲ است پس $3m = 2$ و $m = \frac{2}{3}$ است، پس:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

در نتیجه، مجموع درایه‌های ماتریس $-\frac{1}{2}B$ برابر با $-\frac{2}{3}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷

یک درایه از حاصل ضرب سه ماتریس را به صورت زیر به دست می آوریم.

(ستون ز ام B) A (سطر ا ام C) = درایه سطر ا ام و ستون ز ام CAB

بنابراین:

(ستون سوم B) A (سطر دوم C) = درایه سطر دوم و ستون سوم CAB

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸

$$B - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 داریم:

$$|A| = (0 + 60 + 60) - (32 + 0 + 36) = 52$$

$$|B| = (1 + 2 - 2) - (-6 - 1 - 1) = 7$$

$$\frac{|AB|}{91} = \frac{|A||B|}{91} = \frac{52 \times 7}{7 \times 13} = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرمول محاسبه دترمینان ماتریس 2×2 ، داریم: ۹

$$|A| = 10|A|^T - 4|A| \Rightarrow 10|A|^T - 5|A| = 0 \Rightarrow 5|A|(2|A|^T - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ \text{یا} \\ 2|A|^T - 1 = 0 \Rightarrow |A|^T = \frac{1}{2} \Rightarrow |A| = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

بنابراین $|A|$ نمی تواند $\sqrt{2}$ شود پس گزینه ی (۲) صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰

با توجه به مرتبه ی ماتریس ها و تعاریف a_{ij} و b_{ij} داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

حالا باید درایه ی واقع در سطر اول و ستون سوم $(AB)^T$ را به دست بیاوریم.

$$(AB)^T = (ستون سوم AB) \times (سطر اول AB) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 19$$

$$\begin{aligned} (ABA^{-1})^T &= (ABA^{-1})(ABA^{-1}) = AB \times I \times BA^{-1} = AB^T A^{-1} \\ (ABA^{-1})^T &= (ABA^{-1})^T \times (ABA^{-1}) = (AB^T A^{-1})(ABA^{-1}) \\ &= AB^T \times I \times BA^{-1} = AB^T A^{-1} \end{aligned}$$

به همین ترتیب: $(ABA^{-1})^T = AB^T A^{-1}$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4I$$

از طرفی داریم:

$$(ABA^{-1})^T = A(B^T)^T A^{-1} = A(4I)^T A^{-1} = A \times 4^T \times I^T \times A^{-1}$$

$$\xrightarrow{I^T=I} 4^T \times A \times I \times A^{-1} = 4^T \times AA^{-1} = 4^T \times I = \begin{bmatrix} 4^T & 0 \\ 0 & 4^T \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 4^T + 4^T = 2 \times 4^T = 2 \times 2^2 = 2^3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تذکر: هر ماتریس اسکالر با ماتریس‌های هم‌مرتبه‌اش خاصیت تعویض‌پذیری دارد. بنابراین: $AB = BA$

$$(A + 2B)(A - B) = A^T - AB + 2BA - 2B^T = A^T + AB - 2B^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 8 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان A را حساب می‌کنیم. در این مسئله دترمینان را به کمک روش ساروس محاسبه کرده‌ایم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 6 + 0) - (9 + 4 + 0) = -5$$

$$|(A^{-1})^T| = |A^{-1}|^T = \left(\frac{1}{|A|} \right)^T = \frac{1}{|A|^T} = -\frac{1}{125}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی ماتریسی داده شده یک دستگاه می‌سازیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \\ 4b_1 + ab_2 = 4b_2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 = 4b_2 \end{cases} \xrightarrow{b_1=2b_2} 8b_2 + ab_2 = 4b_2 \Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$

۱۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم i و j اعداد طبیعی از ۱ تا ۲۰ هستند:

$$3i - 2j = 1 \Rightarrow j = \frac{3i - 1}{2} \Rightarrow j = i + \frac{i - 1}{2}$$

$$\frac{i - 1}{2} \in W \text{ اعداد حسابی} \Rightarrow \frac{i - 1}{2} = k \Rightarrow i = 2k + 1$$

پس $i = 2k + 1$ و $j = 3k + 1$ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 2k + 1 \leq 20 \Rightarrow k \leq 9/2 \\ 3k + 1 \leq 20 \Rightarrow k \leq 6/3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \leq k \leq 6$$

پس ماتریس A شامل هفت درایه ۱ است.

۱۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از تساوی $I = AA^{-1}$ و فرض $|A^{-1} - 2I| = |I - 4A^T|$ داریم:

$$|A^{-1} - 2AA^{-1}| = |I - 2A| \times |I + 2A| \Rightarrow |A^{-1}| \times |I - 2A| = |I - 2A| \times |I + 2A|$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = |I + 2A| = |AA^{-1} + 2A| = |A| \times |A^{-1} + 2I| \Rightarrow |A^{-1}| = |A| \times |A^{-1} + 2I|$$

$$\xrightarrow{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}} |A^{-1} + 2I| = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{4}$$

۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از طرفین تساوی داده‌شده دترمینان می‌گیریم.

$$A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 20|A|^2 - 5|A| \Rightarrow 20|A|^2 = 5|A|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A|^2 = \frac{5}{20} \Rightarrow |A| = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} \end{cases}$$

پس $|A|^2 - 2$ مساوی ۲- یا مساوی $\pm \frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{10}}$ است. که عدد ۲- در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ -1 & |A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان می‌گیریم}} |2A| = |A|^2 + 3$$

$$\Rightarrow 4|A| = |A|^2 + 3 \Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (|A| - 1)(|A| - 3) = 0 \Rightarrow |A| = 1, |A| = 3$$

با فرض $|A| = 1$ داریم:

$$\left| -\frac{1}{2}A^{-1} \right| = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 |A^{-1}| = \frac{1}{4} \times \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

با فرض $|A| = 3$ داریم:

$$\left| -\frac{1}{2}A^{-1} \right| = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 |A^{-1}| = \frac{1}{4} \times \frac{1}{|A|} = \frac{1}{12}$$

۱۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس B را به دست می‌آوریم.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 3a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 3a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{از ستون دوم}} |B| = 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3|A|$$

$$\Rightarrow |-15| = 3|A| \Rightarrow |A| = -5$$

بنابراین:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2-1 \\ 0 & 1-2 \\ -1 & 1-0 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow (a-1)(-2) - 1(5) = -5 \Rightarrow a = 1$$

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر $|A| \neq 0$ باشد، آنگاه دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است. بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow k^2 - (-3) \neq 0 \Rightarrow k^2 + 3 \neq 0$$

همواره برقرار است، پس دستگاه به ازای تمام مقادیر k جواب منحصر به فرد دارد.

۲۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید ماتریس حاصل از افزودن ۴ واحد به درایه‌ی سطر اول و ستون دوم ماتریس A

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ a & b & 3 \\ 2 & c & 1 \end{bmatrix}$$

را ماتریس B بنامیم. در این صورت داریم:

دترمینان ماتریس‌های A و B را بر حسب سطر اول آن‌ها محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم:

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} b & 3 \\ c & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & c \end{vmatrix}$$

$$|B| = 1 \times \begin{vmatrix} b & 3 \\ c & 1 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & c \end{vmatrix}$$

$$|A| = |B| \Rightarrow -2 \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

۲۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} a + \frac{1}{|A|}d & b - \frac{1}{|A|}b \\ c - \frac{1}{|A|}c & d + \frac{1}{|A|}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \frac{d}{|A|} & b\left(1 - \frac{1}{|A|}\right) \\ c\left(1 - \frac{1}{|A|}\right) & d + \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

از آن‌جا که ماتریس $A + A^{-1}$ ماتریسی قطری است، پس درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن برابر صفر هستند. در

نتیجه با توجه به این‌که درایه‌های ماتریس A از جمله b و c مخالف صفر هستند، داریم:

$$1 - \frac{1}{|A|} = 0 \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow A + A^{-1} = \begin{bmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{bmatrix} \Rightarrow |A + A^{-1}| = (a + d)^2$$

۲۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[x \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & 2x & 1 \\ 2 & -1 & 3x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [x^2 - 4 \quad 5x + 1 \quad -x + 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 - 5x - 1 - x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow -3x - 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ماتریس B اسکالر است، پس به صورت $B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم.

ماتریس A قطری است.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 3b \end{bmatrix}$$

$$b + 2b + 3b = 18 \Rightarrow 6b = 18 \Rightarrow b = 3$$

مجموع درایه‌های ماتریس B ، برابر $3b$ ، یعنی ۹ می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ماتریس B را تشکیل می‌دهیم:

$$B = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 & 2 \times 1 + 2 & 2 \times 1 + 3 \\ 2 \times 2 + 1 & 2 \times 2 + 2 & 2 \times 2 + 3 \\ 2 \times 3 + 1 & 2 \times 3 + 2 & 2 \times 3 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2X = -(A + B) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -7 \\ -4 & -6 & -11 \\ -8 & -9 & -10 \end{bmatrix}$$

درایه‌های واقع در ستون سوم ماتریس X برابر $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$

$$-\frac{7}{2} \times \frac{11}{2} \times (-5) = -\frac{385}{4} = -96.25$$

البته برای صرفه در زمان می‌توانید فقط ستون سوم را حساب کنید.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$AB = -BA, (AB)^n = B^n A^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

بررسی گزینه‌ها:

$$\begin{aligned} 1) (A^\Delta + B^\Delta)^\top &= (A^\Delta + B^\Delta)(A^\Delta + B^\Delta) = A^{\Delta\top} + A^\Delta B^\Delta + B^\Delta A^\Delta + B^{\Delta\top} \\ &= A^{\Delta\top} + (BA)^\Delta + B^\Delta A^\Delta + B^{\Delta\top} = A^{\Delta\top} + (-AB)^\Delta + B^\Delta A^\Delta + B^{\Delta\top} \\ &= A^{\Delta\top} - B^\Delta A^\Delta + B^\Delta A^\Delta + B^{\Delta\top} = A^{\Delta\top} + B^{\Delta\top} \quad \text{درست} \end{aligned}$$

$$2) BA^\top = (\cancel{BA})A = (\cancel{-AB})A \quad \text{غلط}$$

$$BA^\top = (BA) \cdot A = (-AB) \cdot A = -A \cdot (BA) = -A(-AB) = A^\top B$$

$$BA^\top = A^\top B \quad \text{درست}$$

$$\begin{aligned} 3) (A^\top - B^\top)(A^\top + B^\top) &= A^\top + A^\top B^\top - B^\top A^\top - B^\top \\ &= A^\top + (BA)^\top - (B^\top A^\top) - B^\top = A^\top + (-AB)^\top - B^\top A^\top - B^\top \\ &= A^\top - B^\top A^\top - B^\top A^\top - B^\top \quad \text{غلط} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) (A^\vee - B^\vee)^\top &= (A^\vee - B^\vee)(A^\vee - B^\vee) = A^{\vee\top} - A^\vee B^\vee - B^\vee A^\vee + B^{\vee\top} \\ &= A^{\vee\top} - (BA)^\vee - B^\vee A^\vee + B^{\vee\top} = A^{\vee\top} - (-AB)^\vee - B^\vee A^\vee + B^{\vee\top} \\ &= A^{\vee\top} + B^\vee A^\vee - B^\vee A^\vee + B^{\vee\top} = A^{\vee\top} + B^{\vee\top} \quad \text{درست} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ است، پس داریم:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = A$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس $A^\top$ را به دست می‌آوریم.

$$A^\top = A \times A = \begin{bmatrix} m & 1-m \\ m & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 1-m \\ m & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = mI$$

$$A^{\top\top} = (A^\top)^{\Delta} = (mI)^{\Delta} = m^{\Delta} I \quad \text{بنابراین:}$$

حال بنابر فرض سؤال داریم:

$$A^{\top\top} + I = 0 \Rightarrow A^{\top\top} = -I \Rightarrow m^{\Delta} I = -I \Rightarrow m^{\Delta} = -1 \Rightarrow m = -1$$

پس فقط یک مقداری برای m وجود دارد.

۲۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از فرض سؤال و تعریف ماتریس وارون به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$A^T = \delta I \Rightarrow A(A^T) = \delta I \Rightarrow A\left(\frac{A^T}{\delta}\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\delta} A^T$$

۳۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حاصل هر دو دترمینان را در حالت خاص $a = 0$ و $b = 0$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} a & b & -1 \\ c & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = k \xrightarrow{a=b=c=0} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = k \xrightarrow{\text{برحسب سطر اول}} -1(-2) = k \Rightarrow k = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ b & 1 & -1 \\ a & c & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{a=b=c=0} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

تنها گزینه‌ی ۱ به‌ازای $k = 2$ برابر ۳- است.

۳۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ماتریس A وارون‌پذیر نیست هرگاه $|A| = 0$ باشد

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ 2m+5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m+3-4m-10=0 \Rightarrow m=-7$$

$$B = \begin{bmatrix} -7+2 & 1+7 \\ -14-1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -15 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 35 + 120 = 155$$

بنابراین:

در نتیجه:

$$B^{-1} = \frac{1}{155} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} \text{ های درایه های } = \frac{1}{155} (-7-8+15-5) = \frac{-5}{155} = \frac{-1}{31}$$

۳۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = 1(x(x^2+1)-2) = x^3+x-2 = (x^3-1) + (x-1)$$

$$P(x) = (x-1)(x^2+x+1) + (x-1) = (x-1)(x^2+x+2)$$

پس $P(x)$ بر دو چندجمله‌ای $x-1$ و x^2+x+2 بخش‌پذیر است.

۳۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{نکته: دترمینان ماتریس } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ برابر است با: } ad-bc$$

طبق فرض $A = A^{-1}$ ، پس:

$$A^T = AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 1 \\ -1 & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m^2-1 & m-1 \\ m^2-1 & m^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow m^2-1=1 \Rightarrow m^2=2$$

$$|A| = -m^2 + 1 = -2 + 1 = -1 \text{ بنابراین:}$$

۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{نکته: } r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

$$\text{نکته: } [a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$3A + B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & -8 & -9 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 6-2 & 9-3 \\ 12-7 & 15-8 & 18-9 \\ 21-4 & 24-5 & 27-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \\ 17 & 19 & 21 \end{bmatrix}$$

۳۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای حل این دستگاه به کمک روش ماتریس وارون می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

طبق فرض $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$ ، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ -۱۹ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$x + y = -۶ - ۱۹ = -۲۵$$

۳۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر ماتریس‌های A و B معکوس یک‌دیگر باشند، داریم: $AB = BA = I$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$A(A - ۴I) = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - ۴ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a(a - ۴) + ۴ & ۲a - ۲ \\ ۲(a - ۴) + ۶ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - ۴a + ۴ = ۱ \Rightarrow a = ۱ \text{ یا } ۳ \\ ۲a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \\ ۲a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} a = ۱$$

۳۷

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^T = I \Rightarrow \begin{cases} A \times A = I \\ A \times A^{-1} = I \end{cases} \Rightarrow A = A^{-1}$$

$${}^T A + A^{-1} = ۴A = ۴A^{-1}$$

۳۸

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد.به سادگی و با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان نشان داد $A^n = \begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و در نتیجه $A^{۱۳۸۷} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱۳۸۷ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۱۳۸۹ است.

۳۹

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$(A - I)^T = -۴A \Rightarrow A^T - ۲AI + I^T = -۴A \Rightarrow A^T - ۲A + I = -۴A \Rightarrow A^T + I = -۲A$$

$$\Rightarrow |A^T + I| = |-۲A| = (-۲)^T \times |A| = (-۸) \times (-۴) = ۳۲$$

۴۰

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\alpha A + \beta B = \begin{bmatrix} -۵ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha & ۳\alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & ۲\beta \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = -۵ \\ \alpha = ۲ \end{cases} \Rightarrow \beta = -۳$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

