



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

عنوان آزمون : بانک تست ریاضیات گسسته

دوازدهم ریاضی (فصل ۳ ترکیبیات شمارش)

۱ اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند، حاصل  $x + y$  کدام است؟

A =

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۳ |

B =

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۱ |   |   |   |
| ۱ | x |   | ۳ |
|   |   | y |   |

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۲ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $\sum_{i=1}^4 x_i = 20$  با شرط  $x_1 x_2 = 4$  کدام است؟

۵۰ (۴)

۵۹ (۳)

۴۰ (۲)

۴۹ (۱)

۳ به چند روش می‌توان ۸ مسافر را در دو اتاق سه نفره و یک اتاق دو نفره یک هتل، اسکان داد؟

۲۸۰ (۴)

۵۶۰ (۳)

۸۴۰ (۲)

۱۱۲۰ (۱)

۴ در مربع لاتین مقابل حاصل  $x + y + z + t$  کدام است؟

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ |   |   |   |
|   | ۲ |   |   |
| x | y | ۲ |   |
| z | t |   | ۳ |

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۵ اگر دو مربع لاتین A و B متعامد باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع لاتین B

|   |  |   |
|---|--|---|
|   |  | ۲ |
|   |  |   |
| ۳ |  |   |

کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ چند تابع مانند f از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  وجود دارد که  $f(1) = 2$  و برد تابع B باشد؟

۶۰ (۴)

۲۰ (۳)

۴۰ (۲)

۵۰ (۱)

۷ چند عدد سه رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن حداکثر ۹ و حداقل ۵ باشد؟

۱۴۵ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۴۰ (۲)

۱۵۵ (۱)

۸) معادله‌ی  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80$  در اعداد طبیعی و فرد بزرگ‌تر از ۴ دارای چند جواب است؟

- ۱)  $\begin{pmatrix} 33 \\ 3 \end{pmatrix}$  ۲)  $\begin{pmatrix} 34 \\ 3 \end{pmatrix}$  ۳)  $\begin{pmatrix} 35 \\ 3 \end{pmatrix}$  ۴)  $\begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}$

۹) سه دانش‌آموز و دو معلم می‌خواهند در ردیفی کنار هم بنشینند. اگر بخواهیم هر دانش‌آموز با معلمی مجاور باشد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

- ۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۰) از اعضای مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, \dots, 77, 78\}$  حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو عدد در بین آنها وجود دارد به طوری که حاصل‌ضرب آنها بر ۳۵ بخش‌پذیر باشد؟

- ۱) ۵۹ ۲) ۶۲ ۳) ۶۳ ۴) ۶۸

۱۱) با حروف کلمه‌ی ENDLESS چند کلمه‌ی ۵ حرفی شامل E و S می‌توان ساخت؟

- ۱) ۵۴۰ ۲) ۵۵۰ ۳) ۵۶۰ ۴) ۵۷۰

۱۲) مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید. زوج مرتب  $(a, b)$ ، کدام است؟

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   |   | ۳ |   |   |
| b | ۳ | ۱ | ۴ |   |
|   | ۲ | ۵ | ۱ | ۳ |
|   | ۱ | ۴ | ۲ |   |
|   |   |   |   | a |

- ۱)  $(4, 5)$  ۲)  $(4, 2)$  ۳)  $(1, 5)$  ۴)  $(1, 2)$

۱۳) برای یک مجموعه‌ی ۱۰۰ نفری از شهروندان یک شهر یک کد شش رقمی به صورت زیر ساخته می‌شود: دو رقم سمت راست، سن شهروند (۸۵ تا ۸۰)، سه رقم بعدی تعداد افراد هم‌سن (۱۰۰ - ۰۰۰) و رقم ششم جنسیت (مرد ۱، زن ۲) اختصاص می‌یابد. سپس کدهای به دست آمده را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می‌دهیم. سن مورد انتظار برای ده هزارمین عضو مجموعه، کدام است؟ (اگر چه ممکن است شهروندی به آن اختصاص نیابد.)

- ۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

۱۴) علی، محمد و شش نفر از دوستان آنها را می‌خواهیم به یک گروه ۳ نفری و یک گروه ۵ نفری تقسیم کنیم. در چند حالت علی و محمد در یک گروه قرار می‌گیرند؟

- ۱) ۲۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۲۴

۱۵) با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان ساخت؟

- ۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۱۶) چند عدد سه رقمی وجود دارد که دارای رقم تکراری باشند؟

- ۱) ۲۴۶ ۲) ۲۵۲ ۳) ۲۷۵ ۴) ۲۹۴

۱۷) مجموعه‌ی A حداقل دارای چند عضو طبیعی باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۴ عدد در این مجموعه وجود دارد که در تقسیم بر عدد ۳۷ باقی‌مانده‌ی یکسان تولید نمایند؟

- ۱) ۱۰۹ ۲) ۱۴۵ ۳) ۱۱۲ ۴) ۱۴۹

۱۸ اگر مجموعه‌ی A دارای ۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۳ عضو باشد، تعداد توابع چون f از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B به طوری که  $R_f = B$  باشد، کدام است؟

- ۱) ۵۴۰      ۲) ۶۶۳      ۳) ۵۶۰      ۴) ۶۹۹

۱۹ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۹ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ‌کس بیش‌تر از یک کتاب دریافت نکند؟

- ۱)  $\frac{9!}{5!}$       ۲)  $5!$       ۳)  $5! \times \binom{9}{4}$       ۴)  $4! \times \binom{9}{5}$

۲۰ ۳ دانش‌آموز سال نهم، ۴ دانش‌آموز سال دهم، ۵ دانش‌آموز سال یازدهم و ۶ دانش‌آموز سال دوازدهم به چند طریق می‌توانند یک صف تشکیل دهند، به طوری که هر دانش‌آموز سال یازدهم جلوتر باشد؟

- ۱)  $P(18, 10) \times 8!$       ۲)  $P(18, 10) \times 6!$       ۳)  $P(18, 8) \times 8!$       ۴)  $P(18, 8) \times 6!$

۲۱ در یک برنامهٔ تلویزیونی، ۸ نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و مسابقه تنها یک برنده خواهد داشت. اگر تعداد جوایز این برنامه برابر ۴ باشد، آنگاه این جوایز را به چند طریق می‌توان بین شرکت‌کنندگان تقسیم کرد به گونه‌ای که هیچ‌کس بیش از یک جایزه دریافت نکند و برندهٔ مسابقه حتماً یک جایزه دریافت کرده باشد؟ (جوایز با هم متفاوت هستند.)

- ۱) ۸۴۰      ۲) ۱۱۲۰      ۳) ۱۲۶۰      ۴) ۱۶۸۰

۲۲ چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد به طوری که از بین اعداد ۲، ۳ و ۵، تنها بر ۲ بخش‌پذیر باشند؟

- ۱) ۳۴      ۲) ۲۴      ۳) ۲۷      ۴) ۳۶

۲۳ چند عضو از مجموعهٔ  $S = \{50, 51, 52, \dots, 80\}$  نسبت به ۶ اول هستند؟

- ۱) ۱۰      ۲) ۱۱      ۳) ۱۲      ۴) ۱۳

۲۴ ۸۳ کبوتر حداکثر در چند لانه قرار بگیرند تا مطمئن شویم در یک لانه حداقل ۴ کبوتر وجود دارد؟

- ۱) ۱۷      ۲) ۲۱      ۳) ۱۸      ۴) ۲۷

۲۵ به چند طریق می‌توان ۵ جایزه‌ی متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک جایزه برسد؟

- ۱) ۱۵۰      ۲) ۱۶۰      ۳) ۱۸۰      ۴) ۲۱۰

۲۶ از بین ۳۵ دانش‌آموز یک کلاس، حداقل چند نفر در ماه خرداد متولد شده‌اند؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) صفر

۲۷ به چند طریق می‌توان سه مهره‌ی قرمز، آبی و زرد را بین ۶ نفر تقسیم کرد، به طوری‌که به هر شخص حداکثر یک مهره برسد، مهره‌ی قرمز به نفر اول نرسد و مهره‌ی آبی به نفر دوم نرسد؟

- ۱) ۸۰      ۲) ۸۴      ۳) ۷۰      ۴) ۷۲

۲۸ ۷ توپ یکسان را در ۳ ظرف A، B و C می‌ریزیم. در چند حالت تعدد توپ‌های ظرف A از تعداد توپ‌های ظرف B بیش‌تر است؟

- ۱) ۱۴      ۲) ۱۶      ۳) ۱۸      ۴) ۲۰

۲۹ می‌خواهیم ۱۰ توپ یکسان را بین ۳ نفر تقسیم کنیم. در چند حالت هریک از افراد، حداقل ۱ و حداکثر ۵ توپ دریافت می‌کند؟

- ۱) ۱۵      ۲) ۱۸      ۳) ۲۰      ۴) ۲۱

۳۰ هر زیرمجموعه‌ی  $n$  عضوی از مجموعه‌ی  $S = \{1, 2, 3, \dots, 21\}$  حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۸ است. حداقل مقدار  $n$  کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۳۱ چه تعداد از اعضای مجموعه  $\{n \in \mathbb{N} \mid 30 \leq n \leq 150\}$  نه مضرب ۵ است و نه مضرب ۷؟

- ۷۳ (۱) ۸۳ (۲) ۸۲ (۳) ۷۴ (۴)

۳۲ چند عدد شش رقمی با ارقام متمایز ۱ تا ۶ می‌توان نوشت به گونه‌ای که در هر کدام از آن‌ها، ارقام فرد به ترتیب صعودی و ارقام زوج به ترتیب نزولی قرار داشته باشند و در هیچ یک از دو دسته‌ی ارقام فرد یا زوج، ارقام لزوماً کنار یکدیگر نباشند؟

- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

۳۳ حداقل چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم دو مجموعه‌ی جدا از هم در میان آن‌ها موجود است؟

- ۹ (۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۲۱ (۴)

۳۴ حداقل چند عدد داشته باشیم تا مطمئن شویم دست‌کم دو عدد یافت می‌شود که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۷ و رقم یکان آن‌ها یکسان است؟

- ۷۰ (۱) ۷۱ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۴۱ (۴)

۳۵ معادله‌ی  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3 \end{cases}$ ، چند جواب صحیح دارد؟

- ۱۵ (۱) ۲۸ (۲) ۲۱ (۳) ۵۵ (۴)

۳۶ یک مدرسه دانش‌آموزان خود را در کلاس‌های المپیاد ریاضی، فیزیک، شیمی و نجوم در سه سطح عالی، خوب و متوسط و با شروع از دو مقطع زمانی تابستان و پاییز ثبت نام می‌کند. هر گاه ۱۲۵ دانش‌آموز در این کلاس‌ها شرکت کنند، دست کم چه تعداد از آن‌ها هم کلاس خواهند بود؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۳۷ حداقل چند دوتایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم تا به طور قاطع حداقل در دو جفت انتخاب شده‌ی  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  حاصل هر دو عدد  $x_1 + x_2$  و  $y_1 + y_2$  زوج باشند؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۳۸ در هر زیر مجموعه‌ی  $n$  عضوی از مجموعه‌ی  $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ ، حداقل دو عضو وجود دارد که حاصل جمع آن‌ها برابر ۲۰ است، کم‌ترین مقدار  $n$  کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۳۹ با ارقام ۱ تا ۷ چند عدد ۷ رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت بطوریکه هیچ ۲ رقم زوجی کنار هم نباشد؟

- ۴۳۲ (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۴۰ (۳) ۱۴۴۰ (۴)

۴۰ یک تاس را حداقل چند بار پرتاب کنیم، تا مطمئن باشیم دست کم ۴ نتیجه‌ی یکسان به دست آمده است؟

- ۱۳ (۱) ۱۹ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴)

۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به وجود ۳ در سطر سوم و ۴ در ستون دوم،  $x$  نمی‌تواند ۳ یا ۴ باشد. از طرفی اگر  $x = ۲$  باشد، آنگاه درایه‌های واقع در سطر اول ستون چهارم و سطر سوم ستون دوم در مربع لاتین A برابر ۲ و در مربع لاتین B نیز برابر ۲ است که خلاف متعامد بودن این دو مربع لاتین است، پس  $x = ۱$  است. با توجه به شرط متعامد بودن این دو مربع می‌توان سطر دوم و ستون‌های دوم و چهارم مربع لاتین B را به طور کامل پر کرد و در نتیجه مربع زیر حاصل می‌شود. با توجه به وجود ۱ و ۳ در سطر چهارم،  $y$  باید یکی از مقادیر ۲ یا ۴ را داشته باشد ولی اگر  $y = ۴$  باشد، آنگاه درایه‌های سطر اول ستون دوم و سطر چهارم ستون سوم در مربع لاتین A برابر ۴ و در مربع لاتین B نیز برابر ۴ است که خلاف متعامد بودن این دو مربع است، پس  $y$  لزوماً برابر ۲ و در نتیجه  $x + y = ۳$  است.

|   |   |     |   |
|---|---|-----|---|
| ۳ | ۴ | ۱   | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳   | ۴ |
|   | ۱ |     | ۳ |
|   | ۳ | $y$ | ۱ |

۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از رابطه  $x_1 \cdot x_2 = ۴$  سه حالت زیر نتیجه می‌شود:

حالت اول:  $x_1 = ۱, x_2 = ۴$

حالت دوم:  $x_1 = ۴, x_2 = ۱$

حالت سوم:  $x_1 = ۲, x_2 = ۲$

تعداد جواب‌های سه معادله زیر را شمرده و با هم جمع می‌زنیم:

حالت اول:  $۱ + ۴ + x_3 + x_4 = ۲۰ \Rightarrow x_3 + x_4 = ۱۵$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی  $= \binom{۱۵+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۱۶}{۱} = ۱۶$

حالت دوم:  $۴ + ۱ + x_3 + x_4 = ۲۰ \Rightarrow x_3 + x_4 = ۱۵$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی  $= ۱۶$

حالت سوم:  $۲ + ۲ + x_3 + x_4 = ۲۰ \Rightarrow x_3 + x_4 = ۱۶$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی  $= \binom{۱۶+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۱۷}{۱} = ۱۷$

تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی  $= ۱۶ + ۱۶ + ۱۷ = ۴۹$

۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک فرمول جایگشت‌های با تکرار، داریم:

$$O = \frac{۸!}{۳!۳!۲!} = \frac{۸ \times ۷ \times \cancel{۶} \times ۵ \times \cancel{۴} \times \cancel{۳}!}{\cancel{۳}! \cancel{۳}! \cancel{۲}!} = ۵۶۰$$

۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون در ستون‌های اول و دوم مربع لاتین نباید عدد تکراری وجود داشته باشد، پس هیچ‌یک از  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $t$  برابر ۱ نیستند و چون عدد ۱ باید در سطر سوم و چهارم مربع لاتین ظاهر شود، پس عدد ۱ فقط در خانه چهارم سطر سوم و در خانه سوم سطر چهارم می‌تواند قرار گیرد. در نتیجه یکی از  $x$  و  $y$  برابر ۳ و دیگری برابر ۴ و از طرف دیگر نیز یکی از  $z$  و  $t$  برابر ۲ و دیگری برابر ۴ است. بنابراین:

$$x + y + z + t = ۳ + ۴ + ۲ + ۴ = ۱۳$$

۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. درایه‌های واقع در سطر اول ستون اول و سطر سوم ستون سوم مربع لاتین A لزوماً برابر یک هستند، پس درایه‌ی واقع در سطر دوم ستون دوم این مربع لاتین نیز برابر یک خواهد بود و در نتیجه تمامی درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع لاتین A برابر یک هستند.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

حال با توجه به این‌که دو مربع لاتین A و B متعامد هستند، درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع لاتین B باید شامل سه عدد متمایز ۱، ۲ و ۳ باشند (بدون درنظر گرفتن ترتیب خاصی برای آن‌ها)، پس مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی مربع لاتین B برابر ۶ است.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم  $f(1) = 2$  باشد:

الف) پس اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ باید ۱ را بپوشانند. دو حالت هستند: (۴ عضوی به ۲ عضوی پوشا: ۱۴ تا)  
ب) ۲، ۳، ۴ و ۵ علاوه بر ۳ و ۱، عدد ۲ را هم بپوشانند (۴ عضوی به ۳ عضوی پوشا: ۳۶ تا)  
جواب می‌شود:  $2^4 - 2 + 3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 50$

۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عدد سه رقمی موردنظر را  $\overline{abc}$  می‌نامیم مطابق فرض باید  $5 \leq a+b+c \leq 9$

$$1) a+b+c \leq 9 \Rightarrow a+b+c+t = 9 \xrightarrow{a \geq 1} a'+1+b+c+t = 9 \Rightarrow a'+b+c+t = 8$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{8+4-1}{3} = \binom{11}{3} = 165$$

$$2) a+b+c \leq 4 \Rightarrow a+b+c+t' = 4 \xrightarrow{a \geq 1} a'+1+b+c+t' = 4$$

$$\Rightarrow a'+b+c+t' = 3$$

$$\text{تعداد جوابها} = \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$$

بنابراین جواب سؤال  $165 - 20 = 145$  می‌باشد.

۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اعداد فرد بزرگ‌تر از ۴ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_1 = 2k_1 + 1 \text{ و } x_2 = 2k_2 + 1 \text{ و } x_3 = 2k_3 + 1 \text{ و } x_4 = 2k_4 + 1 \\ k_1 \text{ و } k_2 \text{ و } k_3 \text{ و } k_4 \geq 2 \end{cases}$$

حال این مقادیر را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + (2k_3 + 1) + (2k_4 + 1) = 80 \\ k_1 \text{ و } k_2 \text{ و } k_3 \text{ و } k_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 38 \\ k_1 \text{ و } k_2 \text{ و } k_3 \text{ و } k_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_1 = k'_1 + 2, k_2 = k'_2 + 2, k_3 = k'_3 + 2, k_4 = k'_4 + 2$$

$$\Rightarrow k'_1 + k'_2 + k'_3 + k'_4 = 38 - 4 \times 2 = 30$$

$$\text{تعداد جوابهای صحیح نامنفی} = \binom{33}{3}$$

۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

DMDMD, DMDDM, MDDMD

جایگشت‌های دانش‌آموزان در جای خود ۳! و معلمان ۲! است، پس داریم:

$$3 \times 3! \times 2! = 36$$

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بدترین شرایط آن است که ابتدا همه‌ی اعدادی که مضرب ۷ نیستند را برداریم که

تعدادشان برابر  $67 = \left[ \frac{78}{7} \right]$  است. پس اگر عدد دیگری برداریم، قطعاً مضرب ۷ خواهد بود. از طرفی در بین آن ۶۷ عدد حتماً عددی وجود دارد که مضرب ۵ باشد. در نتیجه اگر حداقل  $68 = 67 + 1$  عدد انتخاب کنیم می‌توان مطمئن بود که حداقل دو عدد در بین آنها وجود دارد که مضرب ۳۵ باشد.

۱۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{c} \text{N} \\ \swarrow \uparrow \searrow \\ \text{L} \quad \text{D} \end{array} & \begin{array}{l} \text{حالت اول: EE SS} \\ \text{حالت دوم: EE S} \quad \text{OO} \\ \text{حالت سوم: SS E} \quad \text{OO} \\ \text{حالت چهارم: S E} \quad \text{OOO} \end{array} \\
 \begin{array}{l} \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \frac{5!}{2!2!} = 90 \\ \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \frac{5!}{2!} = 180 \\ \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \frac{5!}{2!} = 180 \\ \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) 5! = 120 \end{array} \\
 \hline
 570
 \end{array}$$

۱۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مربع لاتین را مطابق شکل پر می‌کنیم (در هیچ سطر یا ستونی نباید عدد تکراری داشته باشیم).

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۴ | ۳ | ۵ | ۱ |
| ۵ | ۳ | ۱ | ۴ | ۲ |
| ۴ | ۲ | ۵ | ۱ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۴ | ۲ | ۵ |
| ۱ | ۵ | ۲ | ۳ | ۴ |

بنابراین  $a = 4$  و  $b = 5$  است.

۱۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اعضای مجموعه را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد:

$$\underbrace{100001}_{\text{عضو ۱}}, \dots, \underbrace{100085}_{\text{عضو ۸۵}}, \underbrace{100101}_{\text{عضو ۸۶}}, \dots, \underbrace{100185}_{\text{عضو ۱۷۰}}, \underbrace{100201}_{\text{عضو ۱۷۱}}, \dots$$

عدد ۱۰۰۰۰ را می‌توان به صورت  $55 + 85 \times 117$  نوشت، بنابراین ده هزارمین عضو مجموعه به صورت ۱۱۱۷۵۵ نوشته می‌شود و سن این فرد برابر ۵۵ است.

۱۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو حالت وجود دارد. حالتی که علی و محمد در گروه سه نفره باشند و حالتی که علی و محمد در گروه ۵ نفره باشند. در حالت اول یک نفر از شش نفر باقی مانده را به  $\binom{6}{1}$  حالت انتخاب می‌کنیم تا با علی و محمد گروه سه نفره تشکیل دهند. در حالت دوم سه نفر از شش نفر باقی مانده را به  $\binom{6}{3}$  حالت انتخاب می‌کنیم تا با علی و محمد گروه پنج نفره تشکیل دهند. پس:

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{3} = 6 + 20 = 26$$

۱۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{2}{2} = 18$$

اعداد زوج که رقم یکان آنها ۲ یا ۴ باشد

$$\frac{4}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{1} = 12$$

اعداد زوج که رقم یکان آنها صفر باشد

$$18 + 12 = 30 = \text{تعداد اعداد مطلوب}$$

۱۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$900 = 100 \times 100 \times 9$$

تعداد کل اعداد سه رقمی

$$900 - 648 = 252 \Rightarrow \text{تعداد مطلوب} = 648 = 80 \times 80 \times 10$$

تعداد اعداد سه رقمی با ارقام غیرتکراری (طبق اصل متمم)

۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده بر ۳۷ دارای ۳۷ حالت می‌باشد. طبق اصل لانه کبوتری اگر  $1 + 37 \times 3$  عدد طبیعی در مجموعه‌ی A باشد حداقل ۴ عدد از آن‌ها باقی‌مانده‌ی یکسان بر ۳۷ دارند.

۱۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(1, -), (2, -), \dots, (6, -)\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$3^6 = 729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

کل توابع

$$n(\bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3}) = 2^6 + 2^6 + 2^6 - 1^6 - 1^6 - 1^6 + 0 = 189$$

غیر پوشا

$$729 - 189 = 540 \Rightarrow \text{پوشا}$$

۱۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد توابع یک به

یک از مجموعه‌ی ۵ عضو به مجموعه‌ی ۹ عضو یعنی:

$$P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9!}{4! \times 5!} \times 5! = \binom{9}{4} \times 5!$$

۲۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. صف تشکیل شده از دانش‌آموزان ۱۸ جا دارد که ۱۰ جای آن توسط دانش‌آموزان کلاس دهم

و دوازدهم اشغال شده که این عمل به  $10! \times \binom{18}{10}$  طریق قابل انجام است، سپس از ۸ جای باقی‌مانده ۳ جای اول را به کلاس نهمی‌ها و ۵ جای باقی‌مانده را به کلاس یازدهمی‌ها اختصاص می‌دهیم.

$$\text{تعداد کل} = \binom{18}{10} \times 10! \times 5! \times 3! = \frac{18!}{8!} \times 5! \times 6 = P(18, 10) \times 6!$$

۲۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا یکی از جوایز را به دلخواه انتخاب کرده و به برنده‌ی مسابقه می‌دهیم که این کار به ۴

طریق امکان‌پذیر است. سپس جوایز باقی‌مانده را بین سایر افراد توزیع می‌کنیم که اولین جایزه به ۷ طریق و جوایز

بعدی به ۶ و ۵ طریق قابل توزیع هستند. در نتیجه تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$$



۲۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که به ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |A \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ &= \left[ \frac{100}{2} \right] - \left[ \frac{100}{6} \right] - \left[ \frac{100}{10} \right] + \left[ \frac{100}{30} \right] = 50 - 16 - 10 + 3 = 27 \end{aligned}$$

۲۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عددی نسبت به ۶ اول است که نه مضرب ۲ باشد و نه مضرب ۳، اگر مجموعه اعدادی که مضرب ۲ هستند را با  $A$  و مجموعه اعدادی که مضرب ۳ هستند را با  $B$  نمایش دهیم  $(A, B \subseteq S)$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |A| &= \left[ \frac{80}{2} \right] - \left[ \frac{49}{2} \right] = 40 - 24 = 16 \\ |B| &= \left[ \frac{80}{3} \right] - \left[ \frac{49}{3} \right] = 26 - 16 = 10 \\ |A \cap B| &= \left[ \frac{80}{6} \right] - \left[ \frac{49}{3} \right] = 13 - 8 = 5 \\ |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 10 - 5 = 21 \\ |\bar{A} \cap \bar{B}| &= |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 31 - 21 = 10 \end{aligned}$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض این که  $n$  تعداد لانه‌ها باشد، طبق اصل لانه‌کبوتری، اگر  $3n > 83$  باشد، آنگاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل ۴ کبوتر قرار داشته باشد، پس  $n = 27$ .

۲۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هر جایزه ۳ حالت} \\ \text{کل} \xrightarrow{\quad} 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \Rightarrow \text{جواب: } 243 - 93 = 150 \\ \text{غ ق ق ق ق: } n(\bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3}) = 3 \times 2^5 - 3 \times 1^5 + 0 = 93 \end{array} \right.$$

اولی نگیرد یا دومی نگیرد یا سومی نگیرد

۲۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این مسئله مربوط به اصل لانه‌کبوتری است، اما در مسئله‌ی اصل لانه‌کبوتری باید دقت کنید که نباید به لانه‌ی خاصی اشاره شود. مثلاً در این‌جا چون حداقل نفرات متولد شده در ماه خرداد سؤال شده است، می‌توانیم فرض کنیم که همه‌ی نفرات در فروردین متولد شده‌اند و در نتیجه حداقل نفرات متولد شده در ماه خرداد برابر صفر خواهد بود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مهره‌های قرمز، آبی و زرد را با مجموعه‌ی  $\{۱, ۲, ۳\}$  نمایش دهیم، آن‌گاه خواسته‌ی مسئله دقیقاً برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ی  $A = \{۱, ۲, ۳\}$  به مجموعه‌ی  $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ ، به طوری‌که این توابع نه زوج  $(۱, ۱)$  را داشته باشند و نه زوج  $(۲, ۲)$  را. با توجه به اصل عدم شمول،  $A$  را تعداد توابع یک به یکی در نظر می‌گیریم که در آن‌ها  $(۱, ۱)$  باشد و  $B$  را تعداد توابع یک به یکی در نظر می‌گیریم که در آن‌ها زوج  $(۲, ۲)$  وجود داشته باشد، یعنی ما به دنبال یافتن تعداد عضوهای  $A' \cap B'$  هستیم:

$$|S| = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰ \quad \text{کل توابع } ۱ - ۱$$

$$\begin{aligned} |A| &= ۱ \times ۵ \times ۴ = ۲۰ && \text{توابع } ۱ - ۱ \text{ شامل } (۱, ۱) \\ &\downarrow \\ f(۱) &= ۱ \\ |B| &= ۱ \times ۵ \times ۴ = ۲۰ && \text{توابع } ۱ - ۱ \text{ شامل زوج } (۲, ۲) \\ &\downarrow \\ f(۲) &= ۲ \\ &\uparrow \\ |A \cap B| &= ۱ \times ۱ \times ۴ = ۴ \\ &\downarrow \quad \downarrow \\ f(۱) &= ۱ \quad f(۳) = ۳ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۶ \\ |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| = ۲۰ + ۲۰ - ۴ = ۳۶ \\ |A' \cap B'| &= |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = ۱۲۰ - ۳۶ = ۸۴ \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است ابتدا جواب‌های معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = ۷$  با شرط  $x_1 = x_2$  را پیدا کنیم، تا از طریق آن جواب‌های معادله با  $x_1 \neq x_2$  را پیدا کرده و بر ۲ تقسیم کنیم.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow ۲x_1 + x_3 = ۷ \Rightarrow x_1 = ۰, ۱, ۲, ۳$$

به ازای هر مقدار  $x_1$ ، یک و تنها یک مقدار برای  $x_3$  پیدا می‌شود، پس تعداد جواب‌های معادله با این شرایط برابر ۴ است. حال تعداد کل جواب‌ها را می‌یابیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۷$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{۷+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

پس در  $۳۶ - ۴ = ۳۲$  حالت مقدار  $x_1$  با  $x_2$  فرق می‌کند. بنا به تقارن مسئله در نصف این حالات  $x_1 < x_2$  و در نصف دیگر حالات  $x_2 < x_1$  است، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد کل جواب‌های مطلوب} = \frac{۳۶ - ۴}{۲} = \frac{۳۲}{۲} = ۱۶$$

نکته: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

با توجه به این که توپها یکسان هستند، کافی است تعداد جوابهای صحیح معادله‌ی زیر را بیابیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 1 \leq x_i \leq 5 \end{cases} \xrightarrow{y_i = x_i - 1} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 7 \\ 0 \leq y_i \leq 4 \end{cases}$$

$$|S| = \binom{7+3}{3}$$

اگر مجموعه‌ی کل جوابها با شرط  $y_i \geq 0$  را با  $S$  نمایش دهیم، آنگاه داریم:

اگر  $A_i$  مجموعه‌ی جوابهایی باشد که  $y_i \geq 5$  است، آنگاه تعداد جوابها با شرط  $0 \leq y_i \leq 4$  برابر است با:

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)'|$$

$$= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)$$

$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (*)$$

حال هریک از مقادیر فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = (\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله } y_1 + y_2 + y_3 = 7 \text{ با شرط } y_i \geq 5)$$

$$= (y_1' \geq 0 \text{ با شرط } y_1' + y_2 + y_3 = 2) = \binom{2+3}{3}$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$$

$$= (y_1, y_2 \geq 5 \text{ با شرط } y_1 + y_2 + y_3 = 7) = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= (y_1, y_2, y_3 \geq 5 \text{ با شرط } y_1 + y_2 + y_3 = 7) = 0$$

با جای‌گذاری این مقادیر در (\*) داریم:

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = \binom{9}{3} - 3\binom{4}{3} + 3(0) = 36 - 18 = 18$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالت‌هایی که مجموع دو عضو از مجموعه‌ی  $S$  برابر ۱۸ باشند، عبارت است از:

$$\{1, 17\}, \{2, 16\}, \{3, 15\}, \{4, 14\}, \{5, 13\}, \{6, 12\}, \{7, 11\}, \{8, 10\}$$

بدترین حالت برای انتخاب یک زیر مجموعه از  $S$ ، برای آن که مجموع دو عضو آن برابر ۱۸ شود، آن است که از هر یک از گروه‌های بالا (هشت گروه) یک عضو و همچنین اعداد ۹، ۱۸، ۱۹، ۲۰ و ۲۱ که در هیچ کدام از این گروه‌ها نیستند، انتخاب کردند. یعنی با انتخاب ۱۳ عضو، می‌توان زیرمجموعه‌ای داشت که جمع هیچ دو عضو آن برابر ۱۸ نشود ولی با انتخاب عضو چهاردهم برای این زیرمجموعه، قطعاً دو عضو با مجموع ۱۸ وجود دارد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: تعداد مضارب  $k$  در مجموعه  $\{m+1, m+2, \dots, n\}$  برابر است با:  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$

A: حداقل یکی از تاس‌ها ۶ بیاید.

B: حاصل‌ضرب اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشد.

نه مضرب ۵

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(S) - n(A \cup B) = n(S) - (n(A) + n(B)) - n(A \cap B)$$

نه مضرب ۷

$$= 121 - \left( \left\lfloor \frac{150}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{29}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{150}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{29}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{150}{35} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{29}{35} \right\rfloor \right)$$

$$= 121 - (30 - 5 + 21 - 4 - 4 + 0) = 121 - 38 = 83$$

۳۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است ابتدا از میان ۶ مکان (رقم)، ۳ مکان را انتخاب کنیم و مثلاً ارقام فرد را در آن‌ها قرار دهیم. با توجه به این که سه رقم ۱، ۳ و ۵ باید به طور صعودی باشند، پس برای هر سه مکان انتخابی، فقط یک حالت برای چیدن ارقام در این مکان‌ها وجود دارد. به طور کلی این کار به  $\binom{6}{3} = 20$  طریق امکان‌پذیر است. واضح است که بعد از قرار دادن سه رقم فرد، سه رقم زوج را در ۳ مکان باقیمانده به طور منحصر به فرد می‌توان به صورت نزولی قرار داد.

۳۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی عبارت است از  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  که دارای  $2^5 = 32$  زیرمجموعه می‌باشد. در بین این ۳۲ زیرمجموعه، می‌توان ۱۶ دسته ایجاد کرد که هر دسته شامل ۲ زیرمجموعه بوده که اشتراک آن‌ها تهی است مانند  $\{1, 3\}, \{5, 7, 9\}$  یا  $\{1, 3, 5, 7, 9\}, \{\}$  بنابراین با انتخاب  $1 + 16 = 17$  زیرمجموعه از مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی، حداقل ۲ زیرمجموعه متعلق به یک دسته خواهد داشت که اشتراک آن‌ها تهی باشد.

تذکر: دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا گوییم هر گاه اشتراک آن‌ها تهی باشد.

۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد باقی‌مانده‌ها در تقسیم بر ۷ برابر ۷ و تعداد ارقام یکان برابر ۱۰ است، بنابراین طبق اصل ضرب  $7 \times 10 = 70$  لانه داریم. برای اینکه حداقل در یکی از لانه‌ها دست کم دو کبوتر قرار بگیرد، باید حداقل  $70 + 1 = 71$  کبوتر داشته باشیم.

۳۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی بالا برابر است با:  $\binom{5+2}{2} = 21$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3 \end{cases} \xrightarrow[y_2 = x_2 - 2]{y_1 = x_1 - 1, y_3 = x_3 - 3} \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 5 \\ y_i \geq 0 (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

۳۶

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.  $24 = 4 \times 3 \times 2 =$  حالات مختلف کلاس‌های تشکیل شده

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{125-1}{24} \right\rfloor + 1 = 6$$

۳۷

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. هر زوج مرتبی یکی از چهار حالت (فرد و فرد) و (زوج و فرد) و (فرد و زوج) و (زوج و زوج) را دارد، زوج مرتب پنجم حتماً یکی از حالت‌های فوق را تکرار می‌کند، بنابراین جمع  $x$  ها و  $y$  های زوج‌هایش، زوج می‌شود.

۳۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. خانه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۲,۱۸ ۴,۱۶ ۶,۱۴ ۸,۱۲ ۱۰

اگر حداقل ۶ عضو از مجموعه‌ی  $S$  انتخاب شود آن‌گاه با توجه به ۵ خانه‌ی بالا، طبق اصل لانه کبوتری، ۲ عضو در یکی از ۴ خانه‌ی اول خواهند بود که مجموعشان برابر ۲۰ است، پس  $\min(n) = 6$ .



|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۱  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۳۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

