



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

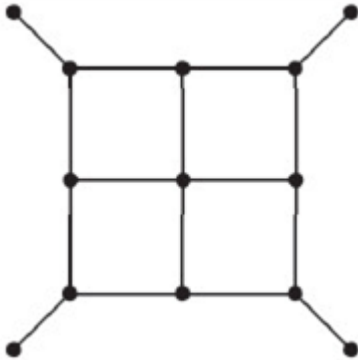
نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

عنوان آزمون : بانک تست ریاضیات گسسته

دوازدهم ریاضی (فصل ۲ گراف و مدل سازی)

۱ در گراف مقابل عدد احاطه‌گری m بوده و n دور به طول ۸ داریم. زوج مرتب (m, n) کدام است؟



(۴, ۴) ۴

(۴, ۵) ۳

(۵, ۴) ۲

(۵, ۵) ۱

۲ در گراف منتظم G از مرتبه p ، $N_G(a) = \{b, c, d, e, f\}$ و $\sum_{i=1}^p |N_{\bar{G}}(a)| = ۷۲$ می‌باشد. مرتبه گراف G کدام است؟

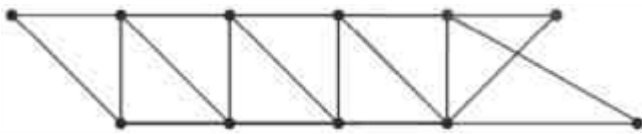
۱۴ ۴

۱۳ ۳

۱۲ ۲

۱۱ ۱

۳ گراف G به صورت زیر است. عدد احاطه‌گری گراف G کدام است؟



$\delta(P_n)$ ۴

$\Delta(C_n)$ ۳

$\frac{q(G)}{۹}$ ۲

$\frac{P(G)}{۴}$ ۱

۴ گراف C_7 چند زیرگراف متمایز دارد به طوری که هر زیرگراف فقط دارای دو y - مجموعه متمایز باشد؟

۸ ۴

۶ ۳

۵ ۲

۳ ۱

۵ در گراف ساده G که $V(G) = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_9\}$ داریم $\gamma(G) = ۱$. اگر $\forall i = 1, 2, \dots, ۸$ داشته باشیم $|N_G(V_i)| = ۲$ ، آن‌گاه چند یال به این گراف اضافه کنیم، تا تبدیل به یک گراف منتظم شود؟

۲۴ ۴

۲۳ ۳

۲۲ ۲

۱۹ ۱

۶ در گراف ساده‌ای، $pq = ۱۲$ باشد، تعداد رئوس از درجه ۲ کدام نمی‌تواند باشد؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۷ گرافی از مرتبه ۱۰ دارای ۴۲ یال است. اگر در این گراف $\Delta = \delta + ۱$ ، آن‌گاه چند رأس از درجه Δ دارد؟

۷ ۴

۶ ۳

۵ ۲

۴ ۱

۸ در گراف K_5 بین دو رأس c و d چند مسیر به طول ۳ موجود است؟

۳ ۴

۹ ۳

۱۸ ۲

۶ ۱

۹ حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجه رأس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\overline{G}) + q(\overline{G})$ کدام می‌تواند باشد؟

۱۳ (۴)

۱۹ (۳)

۱۱ (۲)

۱۷ (۱)

۱۰ با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e\}$ ، چند گراف ساده می‌توان ساخت به طوری که $N_G(a) - N_G(b) = \{c, d\}$ باشد؟

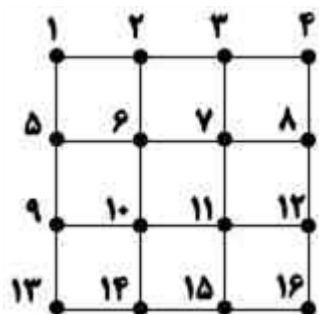
۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۱۱ گراف مقابل چند γ -مجموعه دارد؟



۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۲ گراف C_6 چند γ -مجموعه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۳ ۹ گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۹ و هم‌چنین ۹ گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۹ را درون یک ظرف ریخته و به تصادف دو گوی با هم از ظرف خارج می‌کنیم. اگر مجموع شماره‌های دو گوی ۱۰ باشد، با کدام احتمال هر دو گوی هم‌رنگ هستند؟

$\frac{10}{17}$ (۴)

$\frac{20}{33}$ (۳)

$\frac{8}{17}$ (۲)

$\frac{16}{33}$ (۱)

۱۴ در یک گراف r -منتظم، $qr = 18$ می‌باشد. برای r چند مقدار قابل قبول است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۵ دو گراف کامل K_m و K_n رأس مشترک ندارند. ۲۰ یال بین رأس‌های دو گراف اضافه می‌کنیم تا یک گراف کامل K_{m+n} ساخته شود. گراف کامل جدید حداقل چند یال دارد؟

۶۶ (۴)

۳۶ (۳)

۲۸ (۲)

۱۹۰ (۱)

۱۶ گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی ۶، فقط رئوسی با درجه‌ی Δ و δ دارد و می‌دانیم $\delta + \Delta = 6$. چند نوع گراف G وجود دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۷ برای تبدیل یک گراف C_n به گراف 5 -منتظم، ۱۲ یال باید اضافه کنیم، مکمل گراف P_n دارای چند یال است؟

۳۵ (۴)

۲۸ (۳)

۲۱ (۲)

۱۵ (۱)

۱۸ در گراف G از مرتبه‌ی ۱۲ و $\Delta = 6$ اگر حداکثر و حداقل مقدار $\gamma(G)$ را m و n بنامیم، حاصل $m^2 + n^2$ کدام است؟

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

۳۴ (۲)

۲۹ (۱)

۱۹ چند گراف ساده با مجموعه رئوس $v = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_8\}$ می‌توان رسم کرد به طوری که $|E(G)| = 5$ باشد؟ $N_G = [v_1] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

۲۳۰ (۴)

۲۲۵ (۳)

۲۱۲ (۲)

۲۱۰ (۱)

۲۰) گراف C_6 چند γ -مجموعه دارد؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴)

۲۱) درجات رئوس گراف ساده‌ای با اندازه ۲۰، تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. اگر در این گراف، $\Delta^2 + 2\delta + r = 36$ برقرار باشد، حاصل $p + \Delta$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۶ (۴)

۲۲) کدام گراف را نمی‌توان طوری رسم کرد که یال‌ها هم‌دیگر را (جز در رأس‌ها) قطع نکنند؟



۲۳) مجموع مرتبه و اندازه در یک گراف ۴ - منتظم مساوی ۲۴ است، مرتبه این گراف کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۲۴) چند گراف ساده با رأس‌های a, b, c, d و e وجود دارد که شامل ۵ یال باشد و $\deg(a) = 3$ باشد؟

- ۳۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۶۰ (۴)

۲۵) اگر در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۹، $\Delta = \delta + 1$ باشد، آنگاه δ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۲۶) در گراف ۳- منتظم مرتبه ۶ که دور به طول ۳ ندارد، چند دور به طول ۴ داریم؟

- ۳ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴)

۲۷) اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ باشد، چند گراف با مجموعه‌ی رئوس V می‌توان ساخت که سه یال داشته باشد و درجه‌ی رأس a برابر ۲ باشد؟

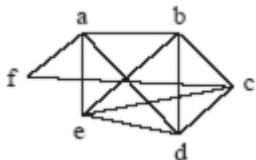
- ۱۶ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۶۰ (۴)

۲۸) دنباله‌ی درجه‌ی رئوس گرافی ساده به صورت $1, 2, 2, 3, y, x, 5, 6$ است. اگر اندازه‌ی گراف ۱۴ باشد، x چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

چنین گرافی وجود ندارد.

۲۹) در گراف شکل مقابل چند مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد؟



- ۵ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۳۰) اگر به گراف G ، ۲ یال اضافه کنیم، ۷- منتظم و اگر ۵ یال از G برداریم، ۶- منتظم می‌شود. G چند یال دارد؟

- ۴۷ (۱) ۴۲ (۲) ۴۸ (۳) ۴۶ (۴)

۳۱ در یک گراف کامل با بیش از یک رأس، رابطه‌ی $\delta + \Delta = q$ برقرار است، مرتبه‌ی گراف کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۳۲ چه تعداد گراف ساده با رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ از اندازه‌ی ۱۰ می‌توان تشکیل داد به طوری که $\deg(a) = 5$ و رئوس d و e و f دو به دو با یکدیگر غیر مجاور باشند؟

۴۵ (۴)

۳۶ (۳)

۲۸ (۲)

۲۱ (۱)

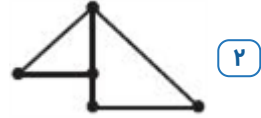
۳۳ کدامیک از گراف‌های زیر بازه‌ای می‌باشد؟



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۳۴ نمودار گراف پترسن در شکل زیر رسم شده است. این گراف دور به کدام طول را ندارد؟



۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

۳۵ از گراف کامل K_n ، حداکثر چند یال می‌توان حذف نمود تا در گراف حاصل، امکان داشته باشد که $\Delta = 6$ باشد؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۱۵ (۱)

۳۶ تعداد کل مسیرها در گراف کامل K_n از رأس مفروض a به رأس مفروض b کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۵ (۱)

۳۷ دنباله درجات رئوس یک گراف ساده به اندازه‌ی ۱۲ به صورت $\{2, 2, 3, 3, a, b, 5\}$ است. حاصل $2b + 3a$ کدام است؟

۲۵ (۴)

۱۸ (۳)

۲۳ (۲)

۲۰ (۱)

۳۸ در گراف ساده‌ی V -منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داریم $q = 2p + 6$. مجموع اندازه و مرتبه‌ی این گراف کدام است؟

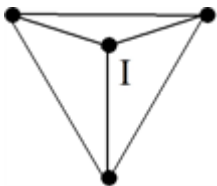
۱۶ (۲)

۱۴ (۱)

۴ چنین گرافی وجود ندارد.

۱۸ (۳)

۳۹ اگر گراف بازه‌های $(0, 2), (1, 3), (2, 3)$ و بازه‌ی I به شکل زیر باشد، در این صورت I با کدامیک از بازه‌های زیر لزوماً اشتراک دارد؟



(۲, ۳) (۴)

(۲/۵, ۴) (۳)

(۱, ۲) (۲)

(۰, ۱) (۱)

۴۰ G گرافی ساده از مرتبه‌ی ۱۵ با ۴ مؤلفه‌ی هم‌بندی و ماکسیمم درجه‌ی ۶ است. حداکثر مقدار δ چند است؟

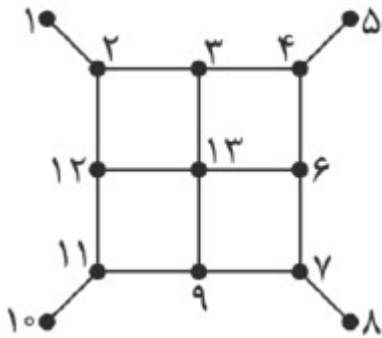
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

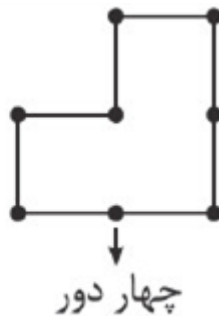
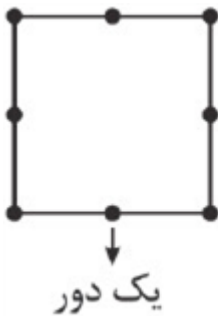
۱ (۱)

۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در گراف G ، $p = ۱۳$ و $\Delta = ۴$ می باشد.



$$\gamma(G) \geq \frac{p}{\Delta + 1} \Rightarrow \gamma(G) \geq ۳$$

هیچ مجموعه ۳ عضوی یا ۴ عضوی نمی تواند رؤس ۱، ۵، ۸، ۱۰ و ۱۳ را احاطه کند. پس $\gamma(G) \geq ۵$ است. حال چون $\{۱، ۵، ۸، ۱۰، ۱۳\}$ احاطه گر است پس $\gamma(G) = ۵$ است.



۲ مدل دور به طول ۸ در گراف G داریم.

پس ۵ دور به طول ۸ داریم و $n = ۵$ است.

۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم $|N_{\bar{G}}(a)| = \deg_{\bar{G}}(a)$ است، پس $\sum_{a \in V} |N_{\bar{G}}(a)| = ۲q(\bar{G}) = ۷۲ \Rightarrow q(\bar{G}) = ۳۶$ مجموع درجات گراف $\bar{G}$ است که $۲q(\bar{G})$ برابر است.

از طرفی $|N_G(a)| = ۵$ پس گراف G ، ۵-منتظم است و $q(G) = \frac{۵p}{۲}$ است.

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{2} \Rightarrow \frac{۵p}{۲} + ۳۶ = \binom{p}{2} \Rightarrow \frac{۵p}{۲} + ۳۶ = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p = ۱۲$$

۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $p(G) = ۱۱$ و $\gamma \geq \frac{p}{\Delta + 1} = \frac{۱۱}{۵ + 1} = ۲$ اما دو رأس مقابل کل رأس ها را احاطه می کنند، پس $\gamma = ۲$.

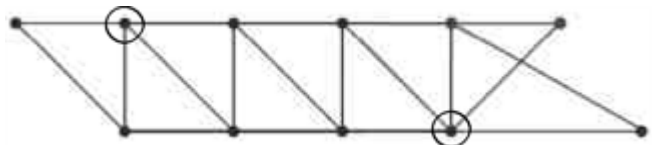
بررسی گزینه ها:

$$\frac{p(G)}{۴} = \frac{۱۱}{۴} = ۲:۱ \text{ گزینه ۱}$$

$$\frac{q(G)}{۹} = \frac{۱۹}{۹} = ۲:۲ \text{ گزینه ۲}$$

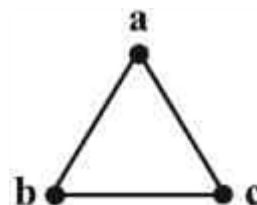
گزینه ۳: در گراف دوری C_n ، $\delta = \Delta = ۲$ پس همین گزینه درست است.

گزینه ۴: در گراف مسیر P_n ، $\delta = ۱$.

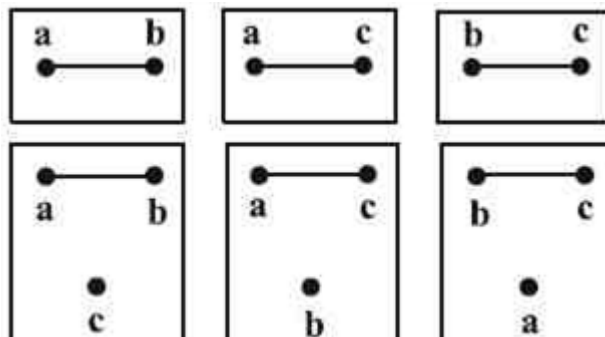


۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر گراف C_3 را به صورت زیر در نظر بگیریم:

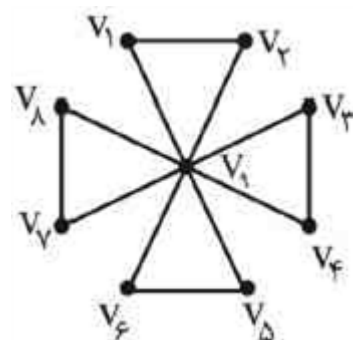


زیرگراف‌هایی که دارای دو v - مجموعه متمایز هستند عبارتند از:



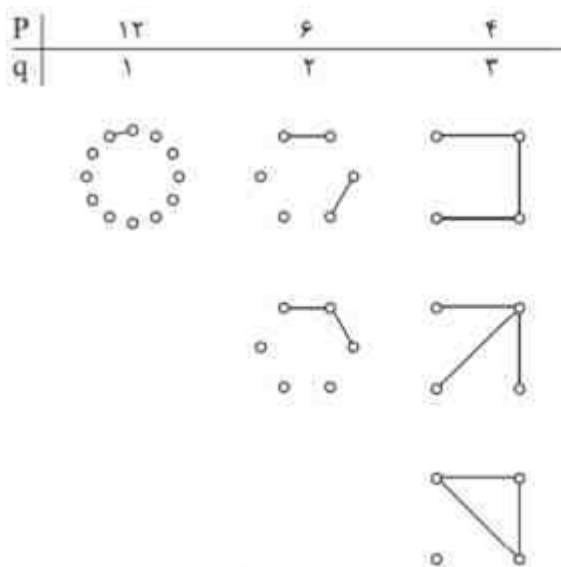
۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $\gamma(G) = 1$ پس رأسی از G وجود دارد که به همه رأس‌های دیگر وصل است و آن‌ها را احاطه می‌کند (پوشش می‌دهد). با توجه به داده‌های سؤال، در اینجا رأس v_1 این ویژگی را دارد و همسایگی باز بقیه رأس‌ها ۲ عضوی است و از این رو گراف G به صورت روبه‌رو است. (به هر فرم دیگری باشد، تنها کافی است برخی رأس‌ها را جابه‌جا کنیم). درجه رأس v_1 برابر ۸ است، پس برای اینکه G منتظم شود، باید داشته باشیم $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \dots = \deg(v_8) = 8$ یعنی G باید تبدیل به گراف کامل K_9 شود. چون $q(G) = 12$ و $q(K_9) = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ ، بنابراین باید به تعداد $36 - 12 = 24$ یال به G بیفزاییم.



۶

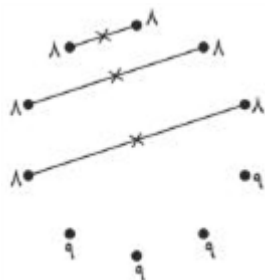
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این گراف به یکی از صورت‌های زیر است:



۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

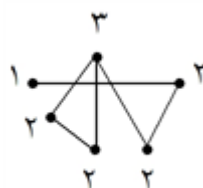
این گراف ۳ یال از گراف k_1 کمتر دارد. این یال‌ها باید طوری از گراف کامل حذف شوند که درجه رأس‌ها حداکثر یک واحد کاهش پیدا کند، بنابراین ۳ یال دوبه‌دو غیرمجاور را از گراف k_1 حذف می‌کنیم. درجات رؤس این گراف در شکل زیر مشخص شده است.



همان‌طور که دیده می‌شود گراف ما دارای ۴ رأس Δ و ۶ رأس δ است.

۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مسیر $6 = 15 - 9 = 6$ به طول ۳، ۴ رأس دارد. مسیرهای از d به e با e به d فرقی ندارد.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۹

$$\begin{aligned}
 & 3 \times 4 \times 4 \\
 & \text{یا} \\
 & 48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2
 \end{aligned}
 \begin{aligned}
 & \Rightarrow \text{گراف اول } 3, 2, 2, 2, 2, 1 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 4 + 9 = 13 \\
 & \Rightarrow \text{گراف دوم } 4, 3, 2, 2, 1 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7
 \end{aligned}$$

$5 - 1 = 4$ $15 - 6 = 9 \Rightarrow \binom{6}{2}$
 $4 - 1 = 3$ $\binom{5}{2} - 6 = 10 - 6 = 4$



۱۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. یال‌های ۱۰ گانه قابل رسم با این مجموعه رؤس را بررسی می‌کنیم.

(۱) گراف شامل یال ac و ad بوده اما فاقد یال‌های bc و bd است. از طرفی فاقد یال ab است.

(۲) ممکن است هر دو رأس a و b مجاور با رأس e باشند و یا هیچ‌کدام با رأس e مجاور نباشند. همچنین ممکن است

فقط رأس b با رأس e مجاور باشد، پس ۳ حالت متفاوت در مورد ارتباط رؤس a و b با رأس e وجود دارد.

(۳) یال‌های cd ، ce و ed هر کدام می‌توانند در گراف باشند یا نباشند.

بنابراین: $24 = 3 \times 2^2 =$ تعداد گراف‌های مطلوب

۱۱

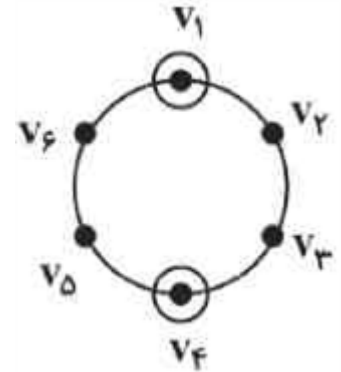
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\gamma = 4$ است. مجموعه‌های $\{2, 8, 9, 15\}$ و $\{3, 5, 12, 14\}$ احاطه‌گر مینیمم هستند.

۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عدد احاطه‌گری گراف C_6 برابر $\left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil = 2$ می‌باشد پس هر مجموعه احاطه‌گر گراف C_6 آن را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که هر کدام دارای دو رأس دیگر است پس اگر v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 و v_6 رئوس گراف باشند، آنگاه مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم به صورت زیر خواهند بود:

$$\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_6\}$$

توجه: در C_{2k} ها، k و تعداد γ مجموعه برابر ۳ می‌باشد.



۱۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گوی‌های قرمز را به صورت ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ و گوی‌های آبی را به صورت ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ در نظر می‌گیریم. فضای نمونه‌ای کاهش یافته عبارت است از این‌که مجموع شماره‌های دو گوی خارج شده ۱۰ باشد:

$$S = \{\{1, 9\}, \{1, 9\}, \{1, 9\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{2, 8\}, \{2, 8\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{3, 7\}, \{3, 7\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 6\}, \{4, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}\}$$

اینک پیشامد این‌که هر دو گوی هم‌رنگ باشند، عبارت است از:

$$A = \{\{1, 9\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 6\}\}$$

$$n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{8}{17}$$

بنابراین احتمال حاصل، برابر است با:

۱۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$qr = 18 \xrightarrow{q=\frac{rp}{r}} r^2 p = 36 \Rightarrow r^2 | 36 \Rightarrow r | 6 \Rightarrow$$

$$r = 1, p = 36$$

$$r = 2, p = 9$$

$$r = 3, p = 4$$

$$r = 6, p = 1 \text{ غ ق ق ۱}$$

۱۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

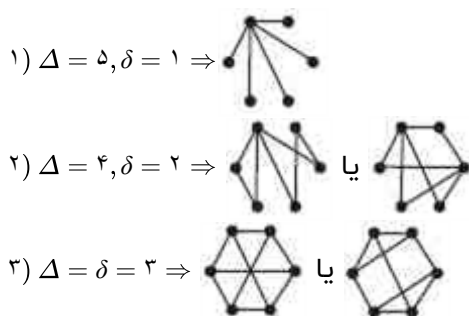
باید هر رأس گراف K_m با هر رأس گراف K_n مجاور شود. بنابراین به mn یال نیاز داریم تا گراف کامل از مرتبه‌ی $m+n$ ساخته شود.

$$mn = 20 = 20 \times 1 = 10 \times 2 = 5 \times 4$$

پس کمترین مقدار $m+n$ برابر است با $5+4$

$$\binom{m+n}{9} = \binom{9}{2} = 36$$

$$\Delta + \delta = 6$$



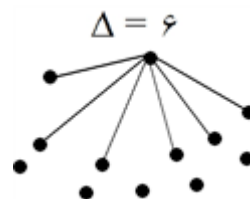
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گراف C_n در واقع یک گراف ۲-منتظم از مرتبه n است و دارای $\frac{2n}{2} = n$ یال است و گراف ۵-منتظم مرتبه n دارای $\frac{5n}{2}$ یال است. بنابراین داریم:

$$\frac{5n}{2} - \frac{2n}{2} = 12 \Rightarrow \frac{3n}{2} = 12 \Rightarrow 3n = 24 \Rightarrow n = 8$$

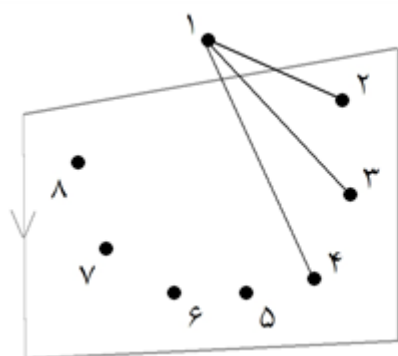
گراف P_8 به صورت است و دارای ۷ یال است و گراف مکمل آن دارای $\left(\frac{8 \times 7}{2} - 7 = 28 - 7 = 21 \right)$ یال است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کران پایین $\gamma(G)$ از رابطه $\gamma(G) \geq \frac{12}{6+1}$ برابر ۲ می‌شود. ($n = 2$) از طرف دیگر رأس با درجه $\Delta = 6$ خودش و ۶ رأس دیگر را یعنی دقیقاً ۷ رأس را احاطه می‌کند. در بدترین شرایط (که ۵ رأس دیگر ایزوله باشند) با ۶ رأس ($\Delta + 1$ رأس تنها) احاطه می‌شود. بنابراین حداکثر $\gamma(G) = 6 = m$ می‌شود.

$$m^2 + n^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

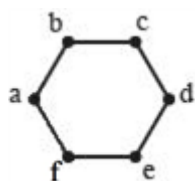


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون همسایگی رأس v_1 شامل رئوس v_2, v_3, v_4 می‌باشد. پس باید v_1 را به آن‌ها وصل کرد و به رئوس دیگر وصل نکرد. که این خود ۳ یال گراف را شامل می‌شود. حال باید ۲ یال دیگر را با رئوس $\{v_2, v_3, \dots, v_8\}$ تأمین کرد.



$$\Rightarrow \text{کل یال جزیره} = \binom{7}{2} = 21 \xrightarrow[\text{باید برداریم}]{\text{۲ یال}} \binom{21}{2} = 210$$

۲۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گراف دور C_6 به صورت زیر است:



γ - مجموعه‌ها عبارتند از: $\{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}$

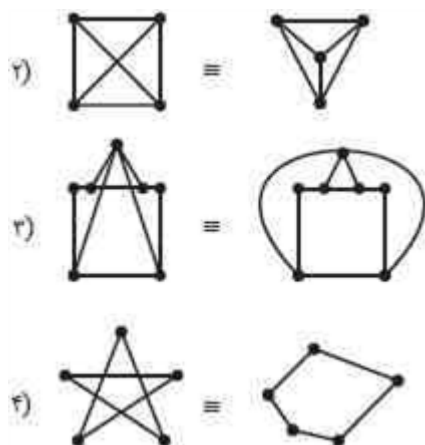
۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این گراف باید منتظم باشد (دنباله ثابت)، پس $r = 1$ است و می‌دانیم در گراف منتظم $\Delta = \delta = k$ است.

$$k^2 + 2k + 1 = 36 \Rightarrow k^2 + 2k - 35 = 0 \Rightarrow k = 5$$

در گراف منتظم داریم:

$$kp = 2q \Rightarrow 5 \times p = 40 \Rightarrow p = 80 \Rightarrow p + \Delta = 8 + 5 = 13$$

۲۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گراف گزینه (۱) در کتاب درسی بحث شده است. این گراف را نمی‌توان طوری رسم کرد که خط‌ها یک‌دیگر را قطع نکنند، اما سایر گراف‌ها را می‌شود طوری رسم کرد که یال‌ها جز در رأس‌ها یک‌دیگر را قطع نکنند.

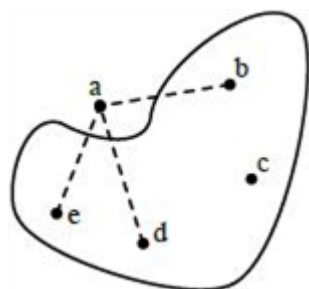


۲۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$rp = 2q \Rightarrow 4p = 2q \Rightarrow q = 2p$$

$$p + q = 24 \Rightarrow 3p = 24 \Rightarrow p = 8$$

۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا به تعداد $\binom{4}{2} = 6$ حالت سه رأس را انتخاب کرده و به رأس a وصل می‌کنیم، سپس دو یال دیگر را از کل یال‌های قابل رسم بین رأس‌های b, c, d, e که $\binom{4}{2} = 6$ است انتخاب می‌کنیم، پس تعداد گراف‌ها برابر است با: $6 \times 6 = 36$.



۲۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در این سؤال چون اختلاف δ و Δ برابر با یک می باشد، پس درجه هر رأس Δ یا δ است.

پس اگر x رأس از درجه Δ باشد، نگاه $x - \gamma$ رأس از درجه δ وجود دارد و داریم:

$$\underbrace{\Delta, \Delta, \dots, \Delta}_x, \underbrace{\delta, \delta, \dots, \delta}_{\gamma - x}$$

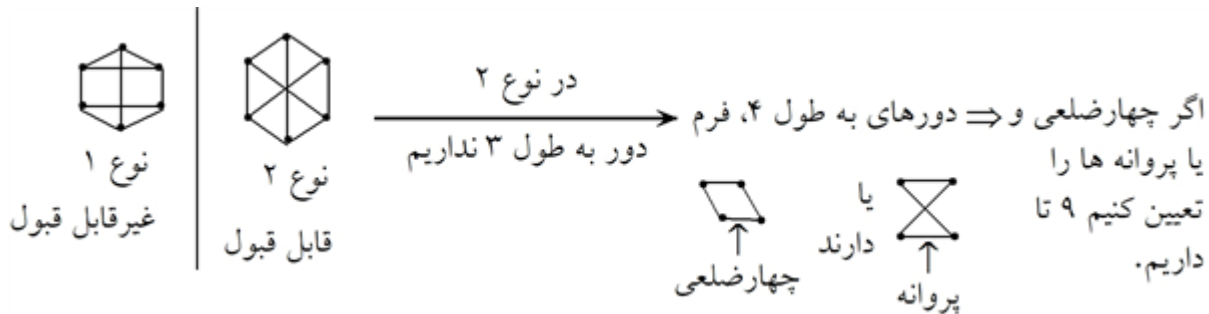
$$\text{مجموع درجات رئوس گراف} = 2q \Rightarrow x(\Delta) + (\gamma - x)(\delta) = 2 \times 9$$

$$\Rightarrow x(\delta + 1) + (\gamma - x)(\delta) = 18$$

$$\Rightarrow x(\delta) + x + \gamma(\delta) - x(\delta) = 18 \Rightarrow x = \gamma\delta = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta - 1 \text{ و } x = 11 \text{ (غلقی.. باشد)} \\ \delta = 2 \text{ و } x = 4 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در تمرین کتاب درسی ۲ نوع ۳ منتظم مرتبه ۶ داریم:



۲۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{مجموعه ی یال های گراف مورد نظر: } E \subseteq \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \dots, \{d, e\}\}$$

$$\underbrace{\left(\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right)}_{\text{برای درجه ی ۲ شدن } a} \times \underbrace{\left(\begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right)}_{\text{برای یال سوم}} = 36$$

۲۸

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{مجموع درجه ی رئوس} = 2q \Rightarrow 6 + 5 + x + 3 + y + 2 + 2 + 2 + 1 = 28$$

$$\Rightarrow x + y = 7$$

چون سوال گفته دنباله ی درجه ی رئوس پس $3 \leq x \leq 5$ و $2 \leq y \leq 3$ است، لذا داریم:

$$x = 3, y = 4 \quad x = 4, y = 3 \quad x = 5, y = 2$$

پس x دو مقدار می تواند داشته باشد که در هر دو حالت نیز گراف قابل رسم است.

۲۹

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. مسیرهای به طول ۳ از a به e در گراف داده شده مسیرهای زیر هستند که تعداد آنها ۵

است:

$$a, f, c, e \quad (4)$$

$$a, d, b, e \quad (3)$$

$$a, b, d, e \quad (2)$$

$$a, b, c, e \quad (1)$$

$$a, d, c, e \quad (5)$$

نکته: یک مسیر به طول m دنباله ای از رئوس به تعداد $m + 1$ رأس متمایز است که رئوس کنار هم با هم مجاورند.

۳۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اختلاف تعداد یال‌های گراف ۷- منتظم مرتبه p و ۶- منتظم مرتبه p برابر ۷ یال می‌باشد. با توجه به این که در گراف r - منتظم، داریم $rp = 2q$ ، می‌توان نوشت:

$$\frac{7p}{2} - \frac{6p}{2} = 7 \Rightarrow p = 14$$

$$q = \Delta + 2\delta \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 3(p-1) \xrightarrow{p \geq 2} \frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$$

G تعداد یال‌های $= \frac{6 \times 14}{2} + 5 = 47$

۳۱

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در گراف کامل K_p که بیش از یک رأس دارد. رابطه‌ی $\Delta = \delta = p - 1$ برقرار است. مطابق فرض داریم:

$$q = \Delta + 2\delta \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 3(p-1) \xrightarrow{p \geq 2} \frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$q_{\text{Max}} = \binom{6}{2} = 15$$

شامل یال‌های: ab, ac, ad, ae, af

فاقد یال‌های: ef, de, df

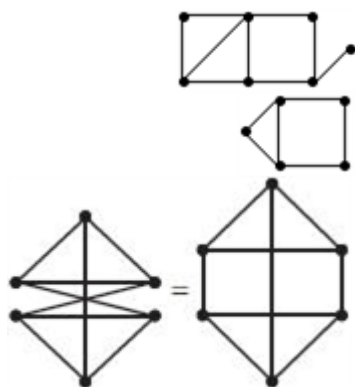
طرق انتخاب K شی از n شی به طوری که شامل x شی به خصوص و فاقد y شی به خصوص باشد از رابطه‌ی

$$\binom{n-x-y}{k-x}$$
 بدست می‌آید.

$$\binom{15-5-3}{10-5} = \binom{7}{5} = 21$$

۳۳

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شکل ظاهری گراف اهمیتی ندارد پس سعی می‌کنیم تا جایی که امکان دارد پیچ و قالب گراف را باز کنیم.



گزینه‌ی (۱): حفره داریم بازه‌ای نیست.

گزینه‌ی (۲): حفره داریم بازه‌ای نیست.

گزینه‌ی (۳): حفره داریم بازه‌ای نیست.

۳۴

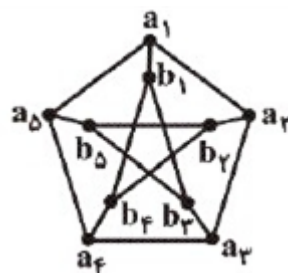
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. گراف پترسن تنها دوره‌ای به طول ۵، ۶، ۸ و ۹ دارد.

۵ دوری به طول: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_1$

۶ دوری به طول: $a_1 a_2 a_3 b_3 b_5 a_5 a_1$

۸ دوری به طول: $a_1 a_2 a_3 b_3 b_1 b_4 a_4 a_1$

۹ دوری به طول: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b_5 b_2 b_4 a_1$



۳۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گراف کامل K_v دارای $\frac{v \times v}{2} = 21$ یال می‌باشد. برای این‌که گراف مرتبه‌ی ۷، رأسی با درجه‌ی ۶ داشته باشد، حداقل نیاز به وجود ۶ یال است که همگی در یک رأس مشترک باشند. پس می‌توان حداکثر $15 = 21 - 6$ یال از گراف K_v حذف کرد.

۳۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{تعداد مسیرها در گراف کامل } K_P \text{ از رأس مفروض } a \text{ به رأس مفروض } b = \sum_{k=1}^{P-1} \frac{(P-1)!}{k!}$$

$$\text{تعداد کل مسیرها در گراف } K_5 \text{ از رأس } a \text{ به رأس } b = \sum_{k=1}^4 \frac{3!}{k!} = \frac{3!}{1!} + \frac{3!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!} = 6 + 6 + 3 + 1 = 16$$

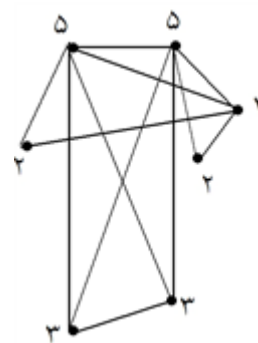
۳۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sum \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 + a + b + 3 + 3 + 2 + 2 = 24$$

$$\Rightarrow a + b = 9 \xrightarrow{3 \leq a, b \leq 5} a = 5, b = 4$$

$$\Rightarrow 3a + 2b = 15 + 8 = 23$$



۳۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \text{گراف } r - \text{منتظم از مرتبه } p: rp = 2q \xrightarrow{r=7} 7p = 2q \\ \text{طبق فرض سوال: } q = 2p + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7p = 2(2p + 6) = 4p + 12 \Rightarrow 3p = 12 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow q = 14$$

اما چنین گرافی وجود ندارد چرا که حداکثر درجه‌ی رئوس باید $3 = p - 1$ باشد که این‌طور نیست.

۳۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجایی که طبق گراف داده شده، a با هر سه بازه‌ی $(0, 3), (1, 3), (0, 2)$ اشتراک دارد، پس a با اشتراک این سه بازه، یعنی بازه‌ی $(1, 2)$ نیز دارای اشتراک است.

۴۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $\Delta = 6$ ، پس مؤلفه‌ای همبند شامل حداقل ۷ رأس وجود دارد، لذا سه مؤلفه‌ی دیگر در مجموع حداکثر ۸ رأس دارند و در نتیجه مؤلفه‌ای با حداکثر دو رأس وجود دارد، پس: $\delta \leq 1$.

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

