



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

عنوان آزمون : بانک تست ریاضیات گسسته

دوازدهم ریاضی (فصل ۱ آشنایی با نظریه اعداد)

۱ اگر رقم یکان دو عدد طبیعی $a^2 - 2a$ و $a + 2$ یکسان باشد، آنگاه نسبت کوچکترین عدد طبیعی دو رقمی a به بزرگترین عدد طبیعی یک رقمی a کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

۲ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست می‌باشد؟

الف) $ka \mid kb \Rightarrow a \mid b \quad k, a, b, \in \mathbb{Z}$

ب) $\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid bc + 2b - 5c \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$

ج) $\forall n \in \mathbb{Z}; 6 \mid n^2 + 5n$

د) هر عدد اول را می‌توان به فرم $(k \in \mathbb{Z}) 6k \pm 1$ نوشت.

هـ) $a^2 - b^2 \Rightarrow 8 \mid a^2 - b^2$ اگر a و b دو عدد فرد باشند.

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

۳ برای اینکه ثابت کنیم میانگین هندسی (مثبت) دو عدد مثبت $a + 1$ و $\frac{b}{a}$ بزرگتر از میانگین حسابی آنها نیست، به کدام نامساوی همواره درست می‌رسیم؟

$(\sqrt{a+2} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (۲)

$(\sqrt{a+1} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (۱)

$(\sqrt{a+1} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (۴)

$\left(\sqrt{a+2} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0$ (۳)

۴ باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۷ برابر ۱ و باقی‌مانده تقسیم عدد $2a$ بر ۱۱ برابر ۵ است. اگر اختلاف خارج‌قسمت‌های دو تقسیم برابر ۱۲ باشد، مجموع ارقام a کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۵ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست می‌باشد؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

الف- اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه $|a| \geq |b|$.

ب- اگر $a \mid b$ و $m \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $ma \mid mb$.

ج- اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه $a^n \mid b^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

د- اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه $(a, b) = a$.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۶ بزرگترین عدد دورقمی n که به ازای آن معادله $5 - 17n = 104y + 91x$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب داشته باشد، برچند عدد طبیعی بخشیدار است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱۲ (۱)

۷ چند نقطه با مختصات صحیح، روی تابع هموگرافیک $y = \frac{x+3}{x-1}$ قرار دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸ عدد 1401^{1401} به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۳ تعلق دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) [۱۱]

۹ اگر دو عدد $n^2 + 1$ و $n^2 + 4$ نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها کدام است؟

- ۱ (۱) ۱۷ (۲) ۱۹ (۳) ۲۳ (۴)

۱۰ کدام گزینه همواره درست است؟ (a, b, c) و d اعداد صحیح و n عددی طبیعی است.

- ۱ (۱) $a|b + c \Rightarrow a|b \vee a|c$ ۲ (۲) $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$
۳ (۳) $a|b^n \Rightarrow a|b$ ۴ (۴) $ab|d \Rightarrow a|d \wedge b|d$

۱۱ چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $xy = 2 + x^2 + y^2$ قرار دارد؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۲ عدد $A = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، کم‌ترین مقدار n کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴)

۱۳ اگر x و y دو عدد حقیقی مخالف صفر باشند، آنگاه $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ متعلق به کدام بازه است؟

- ۱ (۱) $(2, +\infty)$ ۲ (۲) $[2, +\infty)$
۳ (۳) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ۴ (۴) $R - [-2, 2]$

۱۴ برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \dots$ مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 20$ ، کدام است؟

- ۲۸ (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

۱۵ دو عدد $6m + 5$ و $6m + 6$ بر عدد صحیح و غیرصفر a بخش‌پذیرند. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 8931 بر a کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) صفر

۱۶ چند عدد طبیعی مانند n در بازه‌ی $[365, 398]$ وجود دارد که $\frac{n^{2(n+1)^2}}{4}$ عددی زوج شود؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)

۱۷ چند عدد سه رقمی وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد؟

- ۴۱۰ (۱) ۴۲۰ (۲) ۴۳۰ (۳) ۴۴۰ (۴)

۱۸ به‌ازای چند مقدار طبیعی و دورقمی برای n ، دو عدد $2n + 2$ و $5n + 7$ نسبت به هم اول نیستند؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۱۹ اگر a عددی زوج باشد، به گونه‌ای که خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر 30 ، با یک‌دیگر برابر باشند، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد ممکن برای a کدام است؟

- ۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۲۲ (۳) ۲۶ (۴)

۲۰ اگر دو رقم سمت راست دو عدد $(25a - 17)$ و $(27a + 36)$ یکسان باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $5a + 7$ بر 4 کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۲۱ به ازای کدام مقدار a معادله $(a^2 - a)x + 3y = 6$ در Z جواب دارد؟

- $a = 2k$ (۱) $a = 3k$ (۲) $a = 2k + 1$ (۳) برای هر $a \in Z$ (۴)

۲۲ قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به‌ترتیب 220 و 140 تومان است. با مبلغ 19000 تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۲۳ اگر $m > 1$ باشد، آن‌گاه حاصل $[2m + 2, m^2 - m]$ کدام است؟

- $m + 1$ (۱) $m^2 - m$ (۲) $m^2 - m$ (۳) $2(m^2 - m)$ (۴)

۲۴ اگر $1 = 5c + ab$ و $a \mid c(a + b)$ ، آن‌گاه $[a, b, c]$ کدام است؟

- $|ab|$ (۱) $|b|$ (۲) $|bc|$ (۳) $|c|$ (۴)

۲۵ چند عدد طبیعی کوچک‌تر از 50 مانند a وجود دارد که عدد $3^4 + a$ بر 11 بخش‌پذیر باشد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۲۶ باقیمانده تقسیم عدد طبیعی N بر عدد 31 برابر 26 می‌باشد. اگر این عدد را بر 43 تقسیم کنیم، باقیمانده برابر خارج‌قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر N ، کدام است؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۲۷ تعداد اعداد دو رقمی در مجموعه‌ی $\{x \mid x = 77r + 55s + 8 > 0, s \in Z\}$ کدام است؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴)

۲۸ این عبارت $(2a + 3, 2a - 6)$ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۹ رابطه‌ی هم‌نهشتی مجموعه‌ی Z را به 11 دسته هم‌نهشتی افراز کرده است. به‌طوری که اعداد $1a2b3$ و $a\overline{b}$ در یک دسته قرار دارند مقدار b کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۳۰ مجموع ارقام کوچک‌ترین عددی که مضرب 75 بوده و مکعب آن بر 640 بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۳۱ به ازای چند عدد صحیح a ، رابطه‌ی $72 \mid a$ برقرار است؟

- ۱۲ (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

۳۲ چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی‌مانده‌ی تقسیم‌های آن بر دو عدد ۴ و ۵ برابر ۱ باشد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۳۳ معادله‌ی سیاله‌ی $5x + 6y = a + 5$ ، به ازای کدام مقدار a جواب دارد؟

- ۱۲ (۱) ۱۷ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۳۴ معادله‌ی سیاله‌ی $1110 = 25x + 12y$ بر روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N) چند زوج جواب دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۳۵ رقم یکان عدد دورقمی x که در معادله $71x \equiv 1 \pmod{57}$ صدق می‌کند، کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴)

۳۶ در یک تقسیم، مقسوم ۹ برابر باقی مانده است. خارج قسمت تقسیم چند عدد طبیعی می‌تواند باشد؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۳۷ باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد طبیعی a و $3a$ بر عدد طبیعی b به ترتیب برابر ۱۷ و ۶ هستند. b کدام است؟

- ۳۹ (۱) ۴۲ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴)

۳۸ برای سه عدد اول و متمایز ($r > p > q$) رابطه‌ی $pqr \mid (p^r - q^r)$ برقرار است. مجموع این سه عدد اول در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده‌ای دارد؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۹ به ازای چند مقدار n ، عدد $n^2 - 1$ اول است؟

- بیش‌تر از ۲ (۱) ۲ (۲) یک (۳) صفر (۴)

۴۰ در اثبات نامساوی $a(4 - 4a) \leq 1$ به کمک اثبات بازگشتی، به کدام رابطه‌ی بدیهی می‌رسیم؟

- $(a - 2)^2 \geq 0$ (۱) $(a - 4)^2 \geq 0$ (۲) $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ (۳) $\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ (۴)

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو عدد وقتی رقم یکان یکسانی دارند که به پیمانه ۱۰ هم‌نهشت باشند، بنابراین داریم:

$$a^2 - 3a \equiv a + 2 \Rightarrow a^2 - 4a - 2 \equiv 0 \xrightarrow{+4} a^2 - 4a - 12 \equiv 0$$

$$\Rightarrow (a - 6)(a + 2) \equiv 0 \quad (*)$$

دو عدد $(a - 6)$ و $(a + 2)$ که ۸ واحد اختلاف دارند، یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد؛ از رابطه هم‌نهشتی (*) نتیجه

می‌گیریم که هر دو عدد فوق، زوج هستند، یعنی a نیز زوج می‌باشد. از طرفی زمانی حاصل‌ضرب این دو عدد مضرب ۵ می‌شود که یکی از آن‌ها مضرب ۵ باشد:

$$\begin{cases} a - 6 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 6 \xrightarrow{\text{زوج } a} a = 6, 16, \dots \\ a + 2 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -2 \xrightarrow{\text{زوج } a} a = 8, 18, \dots \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a برابر ۱۶ و بزرگ‌ترین عدد طبیعی یک رقمی a برابر ۸ بوده و نسبت خواسته

$$\text{شده برابر } \frac{16}{8} = 2 \text{ می‌باشد.}$$

۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

الف) درست نیست. اگر $k \neq 0$ باشد درست است. مثال نقض $k = 0$ و $a = 2$ و $b = 5$

ب) درست است.

$$\begin{aligned} a \mid b &\Rightarrow \begin{cases} a \mid bc \\ a \mid 2b \Rightarrow a \mid bc - 2c \\ a \mid 5c \end{cases} \end{aligned}$$

ج) درست است. می‌دانیم ضرب ۳ عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

$$\begin{aligned} 6 \mid n^2 - n &\Rightarrow 6 \mid n^2 + 5n \\ 6 \mid (n-1)n(n+1) &\Rightarrow 6 \mid n^2 + 5n \\ 6 \mid 6n &\end{aligned}$$

د) درست نیست. طبق متن کتاب درسی هر عدد اول به جز ۲ و ۳ را می‌توان به فرم $6k \pm 1$ نوشت.

ه) درست است. می‌دانیم طبق تمرین کتاب اگر a فرد باشد آنگاه $8 \mid a^2 - 1$

$$\begin{aligned} a \text{ فرد} &\Rightarrow 8 \mid a^2 - 1 \\ b \text{ فرد} &\Rightarrow 8 \mid b^2 - 1 \end{aligned}$$

پس گزینه ۴ درست است.

۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{میانگین حسابی} = \frac{a + 1 + \frac{b}{2}}{3} = \frac{\frac{2a+2+b}{2}}{3} = \frac{2a+2+b}{6}$$

$$\text{میانگین هندسی} = \sqrt{(a+1)\left(\frac{b}{2}\right)}$$

$$\frac{2a+2+b}{6} \geq \sqrt{(a+1)\frac{b}{2}} \Leftrightarrow 2a+2+b \geq \sqrt{2(a+1)b}$$

$$2a+2+b \geq \sqrt{2(a+1)b} \Leftrightarrow 2a+2+b \geq \sqrt{(2a+2)b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2a+2})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{2a+2}\sqrt{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2a+2} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{همواره درست}$$

۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a = 7q + 1 \\ 2a = 11q' + 5 \Rightarrow 2(7q + 1) = 11q' + 5 \\ 14q + 2 = 11q' + 5 \quad (*) \end{cases}$$

از طرفی $12 = |q - q'|$ ، پس دو حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) $q - q' = 12$ ، پس $q = q' + 12$ ، با جایگذاری در (*) داریم:

$$14(q' + 12) + 2 = 11q' + 5 \Rightarrow 3q' = -165 \Rightarrow q' = -\frac{165}{3} = -55$$

(۲) $q' - q = 12$ ، پس $q' = q + 12$ ، با جایگذاری در (*) داریم:

$$14q + 2 = 11(q + 12) + 5 \Rightarrow 3q = 135 \Rightarrow q = 45$$

چون a طبیعی است، فقط حالت دوم قابل قبول است پس:

$$a = 7(45) + 1 = 316 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 10$$

۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مورد «الف» درست نمی‌باشد. اگر $a = 5$ و $b = 0$ باشد، اما $|a| > |b|$ است. بقیه موارد طبق کتاب درسی درست است.

۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

شرط وجود جواب صحیح برای معادله‌ی سیاله‌ی $ax + by = c$ آن است که $(a, b) | c$ بنابراین:

$$(91, 104) = (7 \times 13, 8 \times 13) = 13$$

$$\Rightarrow 13 | 17n - 5 \Rightarrow 17n - 5 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 17n \equiv 5 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 4n \equiv -8 \pmod{13} \xrightarrow{(2,13)=1} n \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow n = 13k - 2$$

بزرگ‌ترین عدد دو رقمی ممکن به ازای $k = 7$ برابر ۸۹ است. ۸۹ عددی اول است و فقط بر اعداد طبیعی ۱ و ۸۹ بخشپذیر است.

۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y \in \mathbb{Z} \rightarrow 2x - 1 | x + 3 \begin{matrix} \times 2 \\ \times -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x - 1 | 7 \\ 2x - 1 | 2x - 1 \end{matrix} \rightarrow 2x - 1 = \begin{cases} 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 4 \\ -1 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \\ 7 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 1 \\ -7 \rightarrow x = -3 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

۴ نقطه

۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1401 \equiv -3 \pmod{13} \xrightarrow{\text{توان } 3} (1401)^3 \equiv -27 \equiv -1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow (1401)^3 \equiv -1 \pmod{13} \xrightarrow{\text{توان } 467} 1401^{1401} \equiv -1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 1401^{1401} \equiv -1 + 13 \Rightarrow 1401^{1401} \equiv 12 \pmod{13}$$

۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $d = (n^r + 4, n^r + 1)$. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{matrix} d | n^r + 1 \Rightarrow d | n(n^r + 1) = n^r + n \\ d | n^r + 4 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(-)} d | (n^r + n) - (n^r + 4) = n - 4$$

$$\Rightarrow d | (n - 4)(n + 4) = n^2 - 16$$

$$\left. \begin{matrix} d | n^2 - 16 \\ d | n^r + 1 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(-)} d | (n^r + 1) - (n^2 - 16) = 17 \xrightarrow{d \neq 1} d = 17$$

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $2 \mid 3+5 \Rightarrow 2 \nmid 3, 2 \nmid 5$ نادرست

۲) $6 \mid 3 \times 4 \Rightarrow 6 \nmid 3, 6 \nmid 4$ نادرست

۳) $8 \mid 2^4 \Rightarrow 8 \nmid 2$ نادرست

۴) $ab \mid d \Rightarrow d = (ab)q \Rightarrow \begin{cases} d = a(bq) \Rightarrow a \mid d \\ d = b(aq) \Rightarrow b \mid d \end{cases}$ درست

۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2 + 3xy = 4x + 2y \Rightarrow 3xy - 2y = 4x - 2 \Rightarrow y(3x - 2) = 4x - 2 \Rightarrow y = \frac{4x - 2}{3x - 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2 \mid 4x - 2 \xrightarrow{\times 2} 3x - 2 \mid 8x - 4 \\ 3x - 2 \mid 3x - 2 \xrightarrow{\times 4} 3x - 2 \mid 12x - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{-} 3x - 2 \mid 10$$

$$3x - 2 = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ و } y = 6 \\ 3x - 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \times \\ 3x - 2 = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \times \\ 3x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ و } y = 1 \\ 3x - 2 = 5 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \times \\ 3x - 2 = -5 \Rightarrow x = -1 \text{ و } y = 2 \\ 3x - 2 = 10 \Rightarrow x = 4 \text{ و } y = 3 \\ 3x - 2 = -10 \Rightarrow x = -\frac{8}{3} \times \end{array} \right.$$

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر n زوج باشد عدد $\underbrace{11\dots 1}_n$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است چون:

$$11\dots 1 \equiv (1-1) + (1-1) + (1-1) = 0$$

اما اگر n فرد باشد، باقی‌مانده عدد $\underbrace{11\dots 1}_n$ بر ۱۱ برابر ۱ است پس داریم:

$$A \equiv 1 + 0 + 1 + 0 + \dots$$

اگر $n = 21$ باشد دقیقاً بازده عدد یک در رابطه وجود داشته و A بر ۱۱ بخش‌پذیر می‌شود.

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حالت کلی می‌دانیم جمع هر عدد با معکوس عدد، یا بزرگ‌تر مساوی ۲ می‌شود یا

کوچک‌تر مساوی ۲.

الف) $xy < 0, \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \leq -2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy$

بدهی: $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 0$

ب) $xy > 0, \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

بدهی: $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$20! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 20$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^2 \times 3^2 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5)$$

$$\times 2^4 \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5) = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 18 + 8 + 4 + 2 + 4 \times 1 = 36$$

روش دوم: تعداد عوامل عدد اول p در $n!$ برابر است با $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots$ پس کافی است عوامل عدد اول ۲ تا ۱۹ در $20!$ را تعیین کنیم. به طور مثال تعداد عوامل اول ۲ برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{16} \right\rfloor = 10 + 5 + 2 + 1 = 18 = a_1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$\begin{cases} a \mid 7m + 6 \\ a \mid 6m + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid 42m + 36 \\ a \mid 42m + 35 \end{cases} \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی ۸۹۳۱ بر عدد a برابر صفر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶

نکته: $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ و $\frac{n(n+1)}{2}$ فقط و فقط وقتی زوج هستند که n به یکی از فرم‌های $4k$ یا $4k-1$ باشد.

در بین اعداد داده‌شده اعداد زیر به این فرم هستند:

$$367, 368, 371, 372, 375, 376, \dots, 395, 396$$

$$2 \times \left(\frac{396 - 368}{4} + 1 \right) = 16 \text{ آن‌ها برابر است با } 16$$

نکته: برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی یک عدد چندرقمی بر ۴، کافی است باقی‌مانده‌ی دو رقم سمت راست آن عدد را بر ۴ بیابیم.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$\begin{aligned} n(2 \cap (3 \cap 5)') &= n(2 - (3 \cap 5)) = n(2) - n(2 \cap (3 \cap 5)) \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ \text{بر } 2 \text{ بخشپذیر} & \quad \text{ضرب } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ که مضرب } 30 \text{ م آنهاست} \\ \text{بر } 3 \text{ و } 5 \text{ بخشپذیر نباشد} & \\ = \left(\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{30} \right\rfloor \right) &= 450 - 30 = 420 \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$(5n + 7, 3n + 2) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 5n + 7 \Rightarrow d \mid 3(5n + 7) \\ d \mid 3n + 2 \Rightarrow d \mid 5(3n + 2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{تفاضل را می شمارد}]{d \nmid 1} d \mid 11 \xrightarrow{d \neq 1} d = 11$$

در یکی از روابط بالا قرار می‌دهیم:

$$11 \mid 3n + 2 \Rightarrow 3n + 2 \equiv 0 \Rightarrow 3n \equiv -2 \equiv 9 \Rightarrow 3n \equiv 9$$

$$\xrightarrow[\text{تفاضل را می شمارد}]{\div 3} n \equiv 3 \Rightarrow n = 11k + 3$$

$$\Rightarrow n = 11k + 3 \Rightarrow n = 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80, 91$$

۸ عدد دورقمی برای n وجود دارد.

۱۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[b=r]{b=30} a = 30r + r = 31r$$

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq r < 30$$

با توجه به رابطه‌ی $a = 31r$ ، a تنها در صورتی زوج است که r زوج باشد. بزرگ‌ترین مقدار زوج ممکن برای r برابر ۲۸

$$a_{\max} = 31 \times 28 = 868 \rightarrow \text{مجموع ارقام} = 22$$

است، بنابراین داریم:

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر دو رقم سمت راست دو عدد یکسان باشد، آن دو عدد به پیمانه ۱۰۰ هم‌نهشت هستند.

$$25a - 17 \equiv 36a + 27 \pmod{100} \Rightarrow 11a \equiv -44 \pmod{100} \xrightarrow{(11,100)=1} 11a \equiv -44$$

$$a \equiv -4 \pmod{100} \Rightarrow a \equiv -4 \Rightarrow a \equiv -4 + 100 = 96$$

$$a \equiv 96 \Rightarrow 5a \equiv 480 \Rightarrow 5a + 7 \equiv 487 \equiv 7 \pmod{100} \Rightarrow 5a + 7 \equiv 7$$

۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} (a^2 - a, 3) | 6 \\ a^2 - a = a(a-1)(a+1) = 6k \end{cases}$$

می‌دانیم ضرب ۳ عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

$$\Rightarrow (6k, 3) | 6 \Rightarrow 3 | 6 \text{ عبارت بدیهی}$$

بنابراین به ازای جمیع مقادیر صحیح a ، معادله جواب دارد.

۲۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$220x + 140y = 19000 \xrightarrow{\div 20} 11x + 7y = 950 \xrightarrow{\text{پیمانه ۷}} 4x + 7y \equiv 190 \pmod{7}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow x = 7q + 3$$

$$x \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y = -11q + 131 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 7q + 3 \geq 0 \Rightarrow q \geq -\frac{3}{7} \\ y \geq 0 \rightarrow -11q + 131 \geq 0 \Rightarrow q \leq \frac{131}{11} = 11/0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} q = 0, 1, 2, \dots, 11 \Rightarrow 12 \text{ حالت}$$

۲۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$[2(m+1), m(m+1)(m-1)] = m+1 [2, m(m-1)] \xrightarrow{2 \mid m(m-1)} (m+1)m(m-1) = m^2 - m$$

۲۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{نکته: } [a, b, c] = [[a, b], c]$$

نکته: اگر $a \mid b$ و $(a, b) = a$ آن‌گاه $a \mid b$ و $[a, b] = b$

$$ab + 5c = 1 \Rightarrow (ab, c) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (a, c) = 1 \\ (b, c) = 1 \end{cases}$$

$$a \mid c(a+b) \xrightarrow{(a,c)=1} a \mid a+b \xrightarrow{a \mid a} a \mid b$$

$$[a, b, c] = [[a, b], c] \xrightarrow{a \mid b} [b, c] = \frac{|bc|}{(b, c)} \xrightarrow{(b,c)=1} |bc|$$

۲۵

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باقی‌مانده‌ی تقسیم 3^9 بر ۱۱ را می‌یابیم:

$$3^2 \equiv 9 \equiv -2 \Rightarrow (3^2)^{41} \equiv (-2)^4 \equiv 16 \equiv 5 \Rightarrow 3 \times (3^2)^4 \equiv 15 \equiv 4 \Rightarrow 3^9 \equiv 4$$

طبق فرض $a + 3^9 \equiv 0$ پس:

$$a \equiv -3^9 \equiv -4 \equiv 7 \Rightarrow a = 11k + 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

باید تعداد k هایی را بیابیم که به‌ازای آن‌ها $1 \leq a < 50$ باشد:

$$1 \leq 11k + 7 < 50 \Rightarrow -6 \leq 11k < 43 \Rightarrow -\frac{6}{11} \leq k < \frac{43}{11} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

۲۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به متن سؤال داریم:

$$N = 31q + 26$$

$$N = 43r + r = 44r \Rightarrow N \equiv 0 \Rightarrow 31q + 26 \equiv 0 \Rightarrow -13q + 26 \equiv 0 \Rightarrow -q + 2 \equiv 0$$

$$\Rightarrow q \equiv 2$$

$$q = 44m + 2 \quad (1) \quad \text{پس:}$$

با توجه به شرایط الگوریتم تقسیم $42 \leq r$ ، پس:

$$N \leq 44 \times 42 = 1848$$

بنابراین:

$$N = 31q + 26 \leq 1848 \Rightarrow q \leq \frac{1848 - 26}{31} \simeq 58/7 \quad (2)$$

با توجه به نتیجه‌ی (۱) و (۲) به m مقدار یک می‌دهیم در نتیجه داریم:

$$q = 44 \times 1 + 2 = 46 \Rightarrow N = 31 \times 46 + 26 = 1452$$

۲۷

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $d = (a, b)$ ، آن‌گاه به ازای هر $s, r \in \mathbb{Z}$ و r داریم:

$$ra + sb = k(a, b) = k.d$$

$$(77, 55) = (7 \times 11, 5 \times 11) = 11(7, 5) = 11 \times 1 = 11$$

بنابراین:

$$S = \{x | x = 77r + 55s + 11 \geq 0, r, s \in \mathbb{Z}\} = \{x | x = 11k + 11, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$10 \leq 11k + 11 \leq 99 \Rightarrow 2 \leq 11k \leq 91 \Rightarrow \frac{2}{11} \leq k \leq \frac{91}{11} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 1 \leq k \leq 8$$

بنابراین ۸ عدد دو رقمی در این مجموعه وجود دارد.

۲۸

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(3a+2, 6a-2) = 2 \Rightarrow d | 3a+2 \xrightarrow{\times 2} d | 6a+4 \Rightarrow d | 6 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 6$$

$$d | 6a-2$$

با توجه به این‌که $6a-2$ مضرب ۳ و ۶ نیست پس ۳ و ۶ غیرقابل قبول‌اند پس تنها $d = 1$ یا $d = 2$ می‌تواند باشد.

$$\overline{a^2 b^3} \equiv \overline{ab} \Rightarrow 3 - b + 2 - a + 1 \equiv b - a \Rightarrow 2b \equiv 6$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow b \equiv 3 \Rightarrow b = 3$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۳۰

$$\left. \begin{aligned} \forall a \mid a \rightarrow 3 \times 2^2 \mid a \\ 640 \mid A^3 \rightarrow 2^7 \times 5 \mid a^2 \end{aligned} \right\} a_{\min} = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 600$$

مجموع ارقام = ۶ + ۰ + ۰ + ۰ = ۶

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۳۱

توجه: اگر $N = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ باشد تعداد مقسوم علیه طبیعی N برابر است با ۷۲:

$$T(N) = (\alpha_1 + 1) \times \dots \times (\alpha_n + 1)$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$\left. \begin{aligned} a \equiv 1 \pmod{4} \\ a \equiv 1 \pmod{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a \equiv 1 \pmod{20} \Rightarrow a \equiv 1 + 6 \times 20 = 121 \\ a \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 0 + 11 \times 11 = 121 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \equiv 121 \pmod{220}$$

$$a = 220k + 121$$

$$100 \leq 220k + 121 \leq 999$$

$$-21 \leq 220k \leq 878 \Rightarrow \frac{-21}{220} \leq k \leq \frac{878}{220} \Rightarrow \dots \Rightarrow k \leq 3 \text{ / ...} \Rightarrow \text{۴ مقدار برای } k \text{ وجود دارد.}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. شرط لازم و کافی برای این که معادله‌ی سیاله‌ی $az + by = c$ در Z دارای جواب باشد آن

است که $c \mid (a, b)$. بنابراین معادله‌ی $3x + 6y = a + 5$ در صورتی در Z جواب دارد که:

$$(3, 6) \mid (a + 5) \Rightarrow 3 \mid (a + 5) \Rightarrow (a + 5) \equiv 0 \pmod{3} : a \equiv -5 \equiv 1 \pmod{3}$$

تنها گزینه‌ی ۳ در این شرط صدق می‌کند.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$25x + 12y = 1110 \Rightarrow x = \frac{1110 - 12y}{25} \Rightarrow x = 12k + 6 \Rightarrow x = 12k + 6$$

$$25x + 12y = 1110 \Rightarrow 25(12k + 6) + 12y = 1110 \Rightarrow 12y = 960 - 25 \times 12k$$

$$\Rightarrow y = 80 - 25k$$

$$\left. \begin{aligned} x > 0 \Rightarrow 12k + 6 > 0 \Rightarrow k > -0.5 \\ y > 0 \Rightarrow 80 - 25k > 0 \Rightarrow 25k < 80 \Rightarrow k < 3.2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \text{جواب ۴}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$71x \equiv 1 \pmod{57} \Rightarrow 14x \equiv 1 \pmod{57} \Rightarrow 14x \equiv 58 \pmod{57}$$

$$7x \equiv 29 \pmod{57} \Rightarrow 7x \equiv -28 \pmod{57} \Rightarrow x \equiv -4 \pmod{57} \Rightarrow x = 57k - 4$$

۵۳ = عدد دورقمی موردنظر $10 \leq 57k - 4 \leq 99$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$a = 9r \Rightarrow 9r = bq + r \Rightarrow bq = 8r$$

$$\xrightarrow{r < b} 8r < 8b \xrightarrow{bq = 8r} bq < 8b \Rightarrow q < 8 \xrightarrow{q \in \mathbb{N}} q \in \{1, 2, \dots, 7\} \Rightarrow$$

q هفت مقدار دارد.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مطابق فرض سؤال داریم: ۳۷

$$\left\{ \begin{aligned} a = bq + 17, 17 < b \quad (1) \\ 3a = bq' + 6, 6 < b \quad (2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 3a = b(3q) + 51 \\ 3a = bq' + 6 \end{aligned} \right. \Rightarrow b(3q) + 51 = bq' + 6$$

$$\Rightarrow b(q' - 3q) = 45 \Rightarrow b \mid 45 \xrightarrow{b > 17} b = 45$$

۳۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. به راحتی می‌توان نشان داد که $p^2 - q^2$ نسبت به هر دو عدد اول p و q اول است، پس $(p^2 - q^2, pq) = 1$ داریم:

$$\begin{cases} p^2 - q^2 \mid pqr \\ (p^2 - q^2, pq) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} p^2 - q^2 \mid r$$

$$\xrightarrow{r, p^2 - q^2 \neq 1 \text{ عدد اول}} r = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) \quad (*)$$

چون r عددی اول است، پس با توجه به $(*)$ نتیجه می‌شود که $p - q = 1$ ، یعنی اعداد اول p و q متوالی‌اند، در نتیجه:

$$p = 3, q = 2, r = p + q = 5 \quad \text{لذا:}$$

مجموع این سه عدد اول برابر ۱۰ خواهد بود که در تقسیم بر ۴، باقیمانده‌ی ۲ می‌آورد.

۳۹

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در تجزیه‌ی $n^5 - 1$ داریم:

$$n^5 - 1 = (n - 1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$$

بنابراین اگر قرار است این عدد اول باشد یا $n - 1$ باید برابر ۱ باشد یا $n^4 + \dots + 1$. چون سر و کارمان با اعداد صحیح است،

$$n^4 + \dots + 1 \text{ برابر ۱ نمی‌شود، پس } n - 1 \text{ باید برابر ۱ شود. داریم } n = 2 \Rightarrow n - 1 = 1 \text{ به ازای } n = 2 \text{ حاصل } n^5 - 1 \text{ برابر ۳۱}$$

می‌شود که یک عدد اول نیست، پس هیچ مقداری برای n وجود ندارد که $n^5 - 1$ اول می‌شود.

۴۰

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a(4 - 4a) \leq 1 \Rightarrow 4a - 4a^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (2a - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow 4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0. \text{ این رابطه بدیهی است.}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

