



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

عنوان آزمون : بانک تست حسابان دوازدهم

ریاضی (فصل ۵ کاربردهای مشتق)

۱ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با طول وتر k ، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شوند تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین مقدار باشد؟

۴ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲ روی کدام بازه تقعر نمودار تابع $y = \frac{x^2}{2} + 3\sqrt{x+1}$ رو به بالاست؟

۴ $(0, +\infty)$

۳ $(3, +\infty)$

۲ $(-1, 3)$

۱ $(-1, 0)$

۳ وضعیت اکسترم‌های نسبی تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ; |x| \leq 1 \\ x & ; |x| > 1 \end{cases}$ کدام است؟

۲ فقط مینیمم نسبی دارد.

۱ فقط ماکزیمم نسبی دارد.

۴ اکسترم نسبی ندارد.

۳ یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد.

۴ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x - 1$ کدام است؟

۴ ۲

۳ -۱

۲ ۱

۱ -۲

۵ تابع $f(x) = 2x - [x]$ در بازه $[-1, 2]$ دارای چند نقطه اکسترم نسبی است؟

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

۱ صفر

۶ تابع درجه‌ی سوم $y = mx^2 + 3x^2 - 3x + 2$ اکسترم نسبی ندارد. حداکثر طول نقطه‌ی عطف آن کدام است؟

۴ $-\frac{1}{3}$

۳ $\frac{1}{3}$

۲ -۱

۱ ۱

۷ مجانب‌های تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در نقطه‌ی $W(2, -1)$ متقاطع‌اند. اگر $f(1) = 0$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۴ -۱

۳ $\frac{1}{2}$

۲ ۲

۱ ۱

۸ در مورد نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$ کدام صحیح است؟

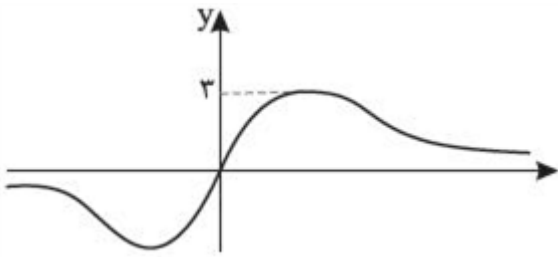
۲ min دارد ولی max ندارد.

۱ max دارد ولی min ندارد.

۴ نه max دارد و نه min

۳ هم max دارد و هم min

۹ اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + b}$ به شکل زیر باشد، طول مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



۴ $-\frac{1}{3}$

۳ $-\frac{1}{12}$

۲ $-\frac{1}{9}$

۱ $-\frac{1}{6}$

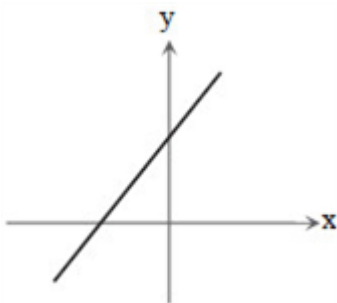
۱۰ فاصله نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۴ $2\sqrt{2}$

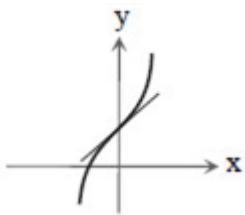
۳ ۲

۲ $\sqrt{2}$

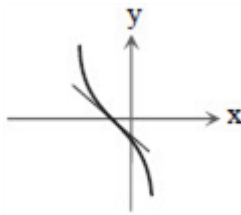
۱ ۱



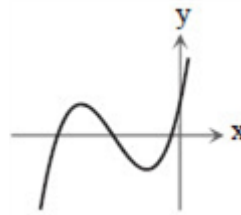
۱۱ نمودار تابع f'' به صورت مقابل است. نمودار f کدام می‌تواند باشد؟



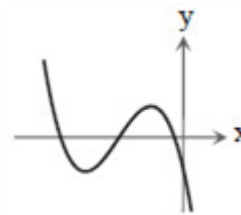
۴



۳



۲



۱

۱۲ طول نقطه‌ی عطف تابع $y = |x - a|\sqrt{x}$ در ناحیه‌ی اول برابر ۲ است. مقدار a کدام است؟

۴ ۴

۳ -۴

۲ ۲

۱ -۲

۱۳ تابع $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 4}$ در $A(1, 4)$ دارای ماکزیمم مطلق است. مقدار $a - b$ کدام است؟

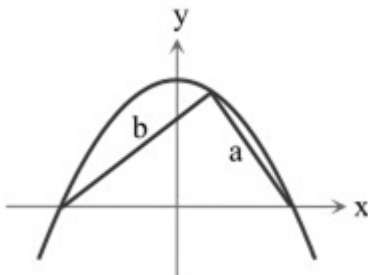
۴ -۴

۳ -۳

۲ -۲

۱ -۱

۱۴ نقطه‌ی A روی منحنی $y = 1 - x^2$ در ناحیه‌ی اول قرار دارد. اگر $a^2 + b^2$ ماکزیمم باشد، طول نقطه‌ی A کدام است؟



۴ $\frac{1}{3}$

۳ $\frac{1}{2}$

۲ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۵) تابع $f(x) = ax + |x - 2|$ دارای بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی است. در این صورت $f(3)$ کدام است؟ ($a > 0$)

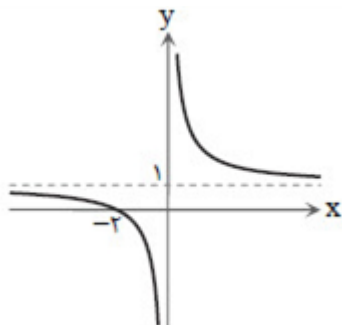
۲ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

۱۶) نمودار تابع $y = \frac{ax+b}{x}$ به صورت مقابل است. خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی $x = 1$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

۱۷) اگر $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ ، در کدام بازه تابع نزولی با تقعر رو به پایین است؟

$(-1, +\infty)$ (۴)

$(-1, 1)$ (۳)

$(-1, 3)$ (۲)

$(1, 3)$ (۱)

۱۸) اگر $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - a}$ اکسترمم نسبی نداشته باشد، حدود a کدام است؟

$R - \{0, 3\}$ (۴)

$[0, 3]$ (۳)

$(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ (۲)

$[3, +\infty)$ (۱)

۱۹) مبدأ مختصات برای تابع $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$ چگونه نقطه‌ای است؟

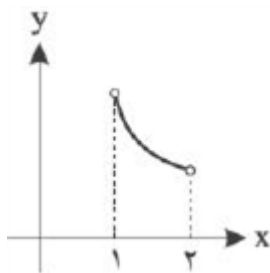
مشتق‌پذیر (۴)

بحرانی (۳)

مینیمم نسبی (۲)

ماکسیمم نسبی (۱)

۲۰) شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ را نشان می‌دهد. کدام گزینه در مورد تابع $y = f''(x)$ صحیح است؟



۲) اکیداً صعودی است.

۱) اکیداً نزولی است.

۴) دارای ماکزیمم نسبی است.

۳) دارای مینیمم نسبی است.

۲۱) در یک تابع هموگرافیک هرگاه $f(0) = 2$ و $f'(0) = 1$ به طوری که $A \Big|_{\beta}^{\alpha}$ نقطه تلاقی مجانب‌های تابع باشد، مقدار

$\alpha + \beta$ کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

۲۲) در کدام بازه، تابع $f(x) = x^2|x - 3|$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

$(0, 2)$ (۴)

$(1, 3)$ (۳)

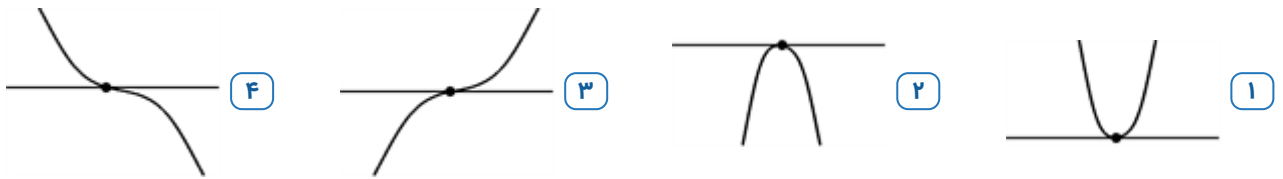
$(2, 3)$ (۲)

$(1, 2)$ (۱)

۲۳ نقطه $(2, -2)$ یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ است. طول نقطه ماکزیمم نسبی این تابع کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $-\frac{2}{3}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $-\frac{1}{3}$

۲۴ نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ در مجاورت $x = 2$ چگونه است؟



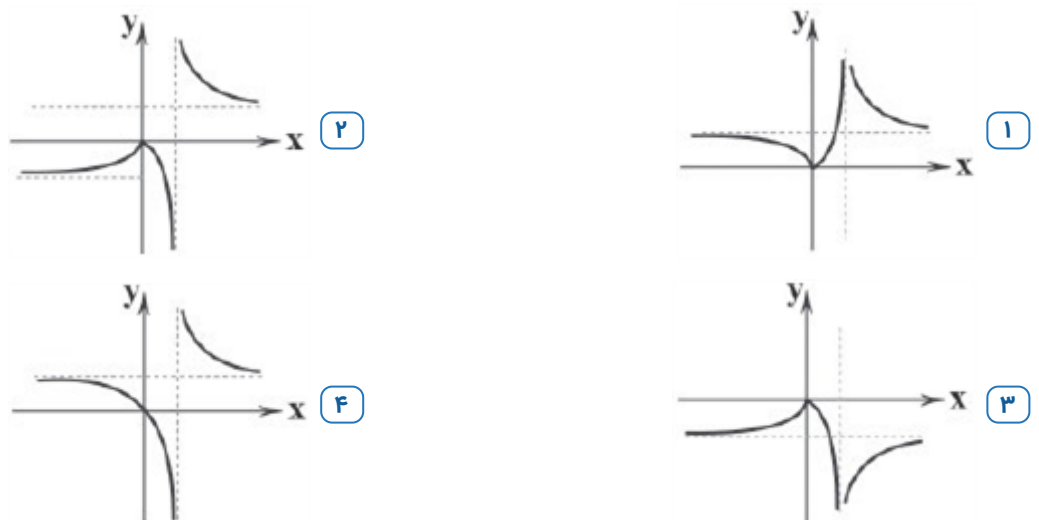
۲۵ استوانه‌ای به شعاع ۲، درون یک کره به شعاع ۴ محاط شده است. به ازای کدام مقدار r ، حجم استوانه بیش‌ترین مقدار را دارد؟

- ۱ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۲ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲۶ مجانب‌های نمودار تابع هموگرافیک $f(x) = ax + \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ ، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کنند. فاصله مبدأ مختصات از خط شامل نقاط A و B کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $\sqrt{3}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

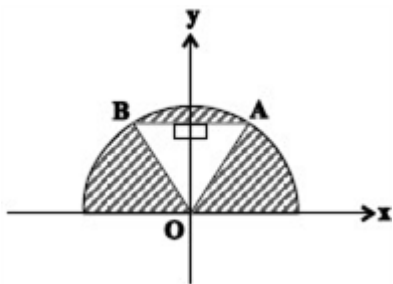
۲۷ نمودار تابع $y = \frac{|x|}{x - 1}$ کدام است؟



۲۸ معادله $x^3 - 6x^2 - k + 1 = 0$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. کم‌ترین مقدار صحیح k کدام است؟

- ۱ -30 ۲ -31 ۳ -32 ۴ -33

۲۹ مثلث OAB مطابق شکل، زیر نمودار $y = \sqrt{2-x^2}$ محاط شده است. به گونه‌ای که یک رأس آن روی مبدأ مختصات و رأس دیگر آن روی نمودار قرار دارند. اگر مساحت قسمت هاشور خورده در شکل کمترین مقدار ممکن باشد، اندازه میانه وارد بر ضلع AB کدام است؟



۱/۲ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

۳۰ تعداد نقاط بحرانی و Max نسبی نمودار $f(x) = |\cos^2 x|$ روی بازه $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ کدام است؟

۵ بحرانی - ۱ Max نسبی (۲)

۴ بحرانی - ۲ Max نسبی (۱)

۲ بحرانی - ۱ Max نسبی (۴)

۵ بحرانی - ۲ Max نسبی (۳)

۳۱ اگر $A(1, -3)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 - x^2 - 3x + b$ باشد. مقدار تابع در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

$\frac{8}{3}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

۳۲ اگر $(1, 2)$ مختصات نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع $y = \frac{ax^2 + b}{x}$ باشد، مختصات نقطه‌ی ماکسیمم نسبی آن کدام است؟

$(-1, -2)$ (۴)

$(-1, 3)$ (۳)

$(-2, 3)$ (۲)

$(-2, 1)$ (۱)

۳۳ در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & ; x \neq a \\ b & ; x = a \end{cases}$ نقطه‌ی $A(2, 10)$ ماکزیمم نسبی است. مقدار می‌نیمم نسبی تابع کدام است؟

۳ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۳۴ بیش‌ترین مساحت مستطیل‌هایی که در نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ مختصات محاط شده‌اند و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد، کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

۳۵ در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 3x^2$ صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

$(0, 1)$ (۴)

$(-1, 2)$ (۳)

$(-2, 1)$ (۲)

$(-2, 0)$ (۱)

۳۶ نمودار تابع $y = x^4 - 1$ چند می‌نیمم نسبی دارد؟

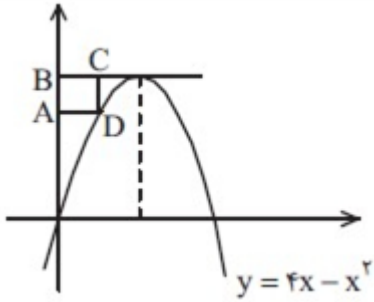
۱ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

۳۷ بیشترین مساحت مستطیل ABCD (مطابق شکل مقابل) چهقدر است؟



$\frac{32}{27}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{8}{27}$ (۲)

$\frac{16}{27}$ (۱)

۳۸ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

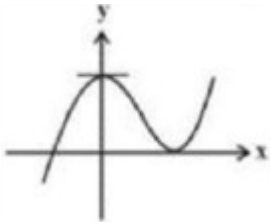
۸ (۴)

۶ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

۴ (۱)

۳۹ شکل زیر نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ است. طول نقطه‌ی عطف تابع کدام است؟



۱ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۴۰ بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکلی کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد، چهقدر است؟

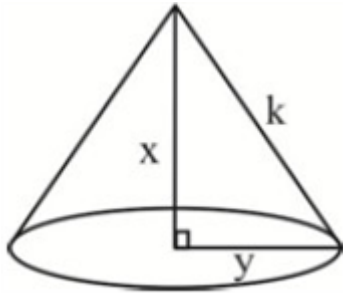
۲۴۰۰ (۴)

۱۴۰۰ (۳)

۱۸۰۰ (۲)

۱۵۰۰ (۱)

۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$V = \frac{1}{3} \pi y^2 x$$

$$x^2 + y^2 = k^2 \Rightarrow y^2 = k^2 - x^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi (k^2 - x^2) x = \frac{\pi}{3} (k^2 x - x^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3} (k^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow k^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{k^2}{3} \Rightarrow x = \frac{k}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$y^2 = k^2 - x^2 \Rightarrow y^2 = k^2 - \frac{k^2}{3} = \frac{2k^2}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3}}$$

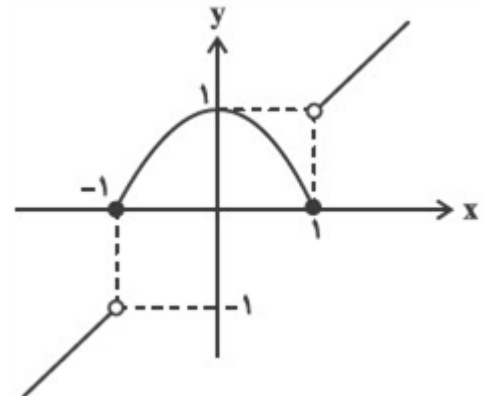
$$(1), (2) \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مشتق دوم باید مثبت باشد:

$$y' = x + \frac{16}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow y'' = 1 - \frac{8}{\sqrt{(x+1)^3}} \xrightarrow{y' > 0} \frac{8}{\sqrt{(x+1)^3}} < 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^3} > 8 \Rightarrow x+1 > 4 \Rightarrow x > 3$$

۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در $x = 0$ ماکزیمم نسبی و در $x = 1$ مینیمم نسبی دارد.

۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 4x^2 - 12x + 8 = 4(x^2 - 3x + 2) = 4(x-1)(x^2 + x - 2) = 4(x-1)^2(x+2)$$

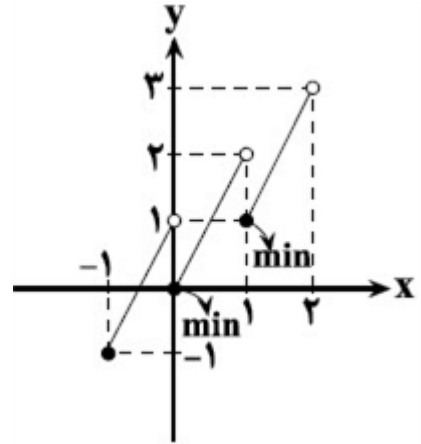
x	-2	1
f'	-	+
f	↘ min ↗	↗

تابع در $x = -2$ مینیمم نسبی دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} [-1, 0) \xrightarrow{[x]=-1} f(x) = 2x + 1 \\ [0, 1) \xrightarrow{[x]=0} f(x) = 2x \\ [1, 2) \xrightarrow{[x]=1} f(x) = 2x - 1 \end{cases}$$

تابع f در بازه $[-1, 2)$ فقط دارای ۲ مینیمم نسبی است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

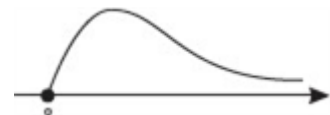
$$\begin{aligned} y' &= 3mx^2 + 6x - 3 \\ \begin{cases} y' = 0 \Rightarrow 3m + 3m \leq 0 \Rightarrow m \leq -1 \\ \Delta \leq 0 \\ y'' = 6mx + 6 \xrightarrow{m \leq -1} -\frac{1}{m} \leq 1 \\ y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{m} \end{cases} \end{aligned}$$

پس حداکثر طول نقطه‌ی عطف برابر $x = 1$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c} = 2 \Rightarrow d = -2c \\ y = \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c \end{cases} \\ f(1) = 0 \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = 0 \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a = c \\ \Rightarrow f(x) = \frac{-cx + c}{cx - 2c} = \frac{-x + 1}{x - 2} \\ f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(1) = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع در بازه $[0, +\infty)$ پیوسته است و هرگز منفی نمی‌شود. پس $\min = y(0) = 0$ است. با توجه به پیوسته بودن تابع و اینکه هرگز منفی نیست و همچنین $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ ، پس یک $\max$ هم دارد.

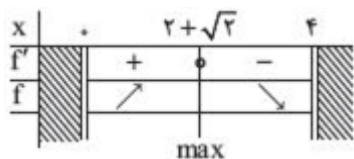


باید معادله $f(x) = 2$ دارای ریشه مضاعف باشد:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + b} = 2 &\Rightarrow 2x^2 + 2b = x \Rightarrow 2x^2 - x + 2b = 0 \\ \Rightarrow \Delta = 0 &\Rightarrow 1 - 4(2)(2b) = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{16} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{16}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(1)(x^2 + \frac{1}{16}) - 2x(x)}{(x^2 + \frac{1}{16})^2} = \frac{\frac{1}{16} - x^2}{(x^2 + \frac{1}{16})^2} \\ \Rightarrow f'(x) = 0 &\Rightarrow x = \pm \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طول مینیمم نسبی}} x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 1 + \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{\sqrt{4x - x^2} + 2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} \\ f' = 0 &\Rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2 \Rightarrow 4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \\ \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 &= 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 8 \\ \Rightarrow x &= \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

$2 - \sqrt{2}$ نادرست است چون $x - 2$ را منفی می‌کند.
تعیین علامت مشتق:



بنابراین طول نقطه ماکزیمم نسبی $x = 2 + \sqrt{2}$ است.

$$f(2 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \max(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$$

فاصله از $y = x$:

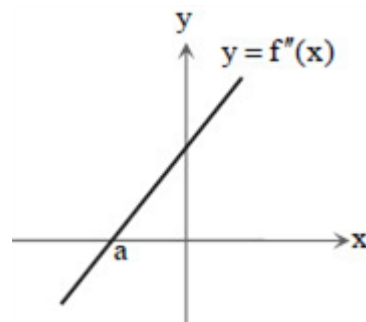
$$y - x = 0 \Rightarrow \frac{|2 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})|}{\sqrt{1+1}} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم علامت f'' جهت تقعر منحنی را نشان می‌دهد؛ به طوری که اگر در بازه‌ای

$f'' > 0$ ، آن‌گاه تقعر منحنی رو به بالاست و اگر در بازه‌ای $f'' < 0$ ، آن‌گاه تقعر منحنی رو به پایین است. با توجه به

شکل تقعر منحنی در بازه $(-\infty, a)$ رو به پایین و در بازه $(a, +\infty)$ رو به بالاست؛ پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست است

؛ ضمناً $a < 0$ پس گزینه‌ی ۴ نیز نادرست است.



۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. y'' در نقطه‌ی عطف تغییر علامت می‌دهد، پس y'' را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} (x-a)\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}} - ax^{\frac{1}{3}} & x \geq a \\ -(x-a)\sqrt[3]{x} = -x^{\frac{4}{3}} + ax^{\frac{1}{3}} & x < a \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}x^{-\frac{2}{3}} & x \geq a \\ -\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3}x^{-\frac{2}{3}} & x < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' = \begin{cases} \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2a}{9}x^{-\frac{5}{3}} & x \geq a \\ -\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2a}{9}x^{-\frac{5}{3}} & x < a \end{cases}$$

لازم است ۲ ریشه‌ی $y'' = 0$ تا y'' در این نقطه تغییر علامت دهد. از آنجا که دو ضابطه قرینه‌ی یکدیگرند، می‌توان نوشت:

$$\frac{4}{9} \times 2^{-\frac{2}{3}} + \frac{2a}{9} \times 2^{-\frac{5}{3}} = 0 \Rightarrow \frac{2^{-\frac{5}{3}}}{9} (4 \times 2 + 2a) = 0 \Rightarrow a = -4$$

توجه: از آنجا که دو ضابطه قرینه یکدیگرند، برای حل معادله $y''(2) = 0$ کافی بود از ابتدا فقط یکی از ضابطه‌ها را می‌نوشتیم.

توجه: در نقطه‌ی عطف یا y'' صفر است یا موجود نیست. در اینجا y'' در ۰ و a موجود نیست، اما اولاً $0 \neq 2$ و ثانیاً a نمی‌تواند نقطه‌ی عطف باشد، چون $x = a$ ریشه‌ی ساده قدرمطلق است و در نتیجه نمودار در این نقطه مماس ندارد و می‌دانیم در نقطه‌ی عطف لازم است نمودار دارای خط مماس باشد. توجه: $x = 0$ هم طول نقطه‌ی عطف تابع است.

۱۳

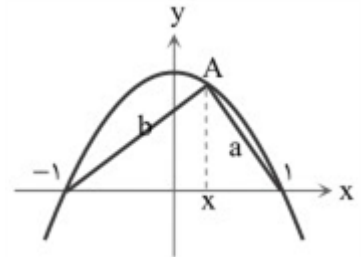
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی اکسترمم روی منحنی است، پس $f'(1) = 4$ ، ضمناً این نقطه، جزء نقاط بحرانی تابع است، پس $f'(1) = 0$ ، بنابراین:

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 4) - 2x(ax + b)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + 4a}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 4 \Rightarrow \frac{a+b}{5} = 4 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow -a - 2b + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 20 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow a - b = -4$$

۱۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی $A(x, y)$ را روی منحنی در نظر بگیرید:



$$S = a^2 + b^2 = y^2 + (1-x)^2 + y^2 + (1+x)^2$$

$$= 2y^2 + 2x^2 + 2 = 2(1-x^2)^2 + 2x^2 + 2 = 2x^4 - 2x^2 + 4$$

حال از حل معادله‌ی $S' = 0$ مقدار x را پیدا می‌کنیم:

$$S' = 4x^3 - 4x = 4x(2x^2 - 1)$$

$$S' = 0 \xrightarrow{x>0} 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع در بازه‌ای ثابت است و در این بازه دارای بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی (مشتق صفر) است:

$$f(x) = \begin{cases} ax + x - 2 & x \geq 2 \\ ax + 2 - x & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (a+1)x - 2 & x \geq 2 \\ (a-1)x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

با توجه به $a > 0$ ضریب $(a+1)$ صفر نیست، پس:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x) = x + |x-2| \Rightarrow f(3) = 3+1=4$$

۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $y=1$ مجانب افقی است و داریم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = a$ پس $a=1$. ضمناً منحنی از نقطه‌ی $(-2, 0)$

می‌گذرد؛ پس:

$$y(-2) = 0 \Rightarrow \frac{-2a+b}{-2} = 0 \Rightarrow b=2a \Rightarrow b=2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{x} \Rightarrow y' = \frac{-2}{x^2}$$

از آن‌جا که $y(1) = 2$ و $y'(1) = -2$ معادله‌ی خط مماس بر منحنی در $x=1$ چنین است:

$$y-2 = -2(x-1) \xrightarrow{x=5} y-2 = 2 \Rightarrow y=4$$

۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید دستگاه نامعادلات $\begin{cases} y' < 0 \\ y'' < 0 \end{cases}$ را حل کنیم:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} y' = x^2 - 2x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \\ y'' = 2x - 2 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

۱۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f' = \frac{(2x-3)(x-a) - x^2 + 2x}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax + 2a}{(x-a)^2}$$

در این تابع برای آن‌که اکسترمم نسبی داشته باشیم باید $f' = 0$ ریشه‌ی ساده نداشته باشد.

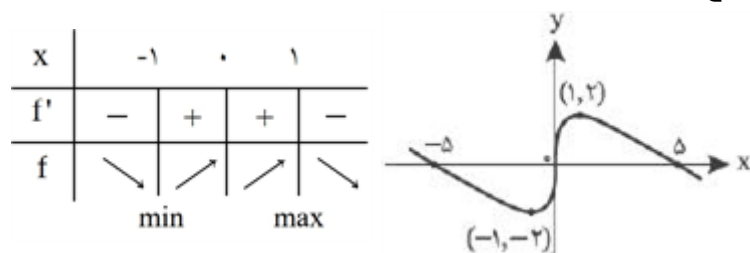
$$\Delta \leq 0 \quad a^2 - 2a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 2$$

دقت کنید در حالت $a=0$ و $a=2$ صورت و مخرج ساده شده و تابع خطی است و تابع خطی با شیب غیرصفر اکسترمم ندارد.

۱۹

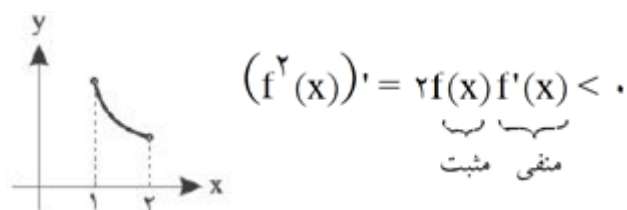
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

به‌علاوه $x=0$ هم نقطه‌ی بحرانی تابع است چرا که مخرج مشتق صفر می‌شود و مشتق در این نقطه موجود نیست. مشتقتابع در $x = \pm 1$ تغییر علامت می‌دهد، پس این نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع هستند و تنها نقطه‌ی بحرانی که اکسترممنسبی نیست، در $x=0$ رخ می‌دهد. به‌علاوه نمودار این تابع به شکل زیر است:

۲۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل می‌توان فهمید که اولاً: $f(x) > 0$ است چرا که نمودار تابع همواره بالای محور x ها است، به‌علاوه این نمودار اکیداً نزولی است پس $f'(x) < 0$ می‌شود. حالا برای تعیین وضعیت $y = f''(x)$ از آن مشتق می‌گیریم:



چون مقدار مشتق $f'(x)$ همواره منفی است، پس این تابع اکیداً نزولی است.

۲۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ در این صورت:

$$f(0) = 2 \Rightarrow b = 2c$$

$$f'(x) = \frac{ac-b}{(x+c)^2} \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{ac-2c}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{a-2}{c} = 1 \Rightarrow a = c+2$$

$$f(x) = \frac{(c+2)x+2c}{x+c}$$

$$\begin{cases} x = -c & \text{مجاانب قائم} \\ y = c+2 & \text{مجاانب افقی} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = -c + c + 2 = 2$$

۲۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x^2 & x \geq 3 \\ 3x^2 - x^2 & x < 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6x & x > 3 \\ 6x - 2x^2 & x < 3 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 4x - 6 & x > 3 \\ 6 - 4x & x < 3 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	
f'	-	+	+	-	+
f''	+	+	-	-	+

در بازه $(1, 2)$ تابع f صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

۲۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(2) = -2 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 + 4a + 2b = -2 \\ 12 + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, -\frac{2}{3}$$

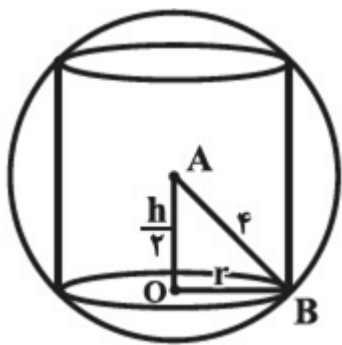
۲۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	+	+





ارتفاع استوانه را h در نظر می‌گیریم. مطابق شکل داریم:

$$\triangle OAB: r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 + \frac{h^2}{4} = r^2 \Rightarrow r^2 = r^2 - \frac{h^2}{4} \quad (1)$$

$$V = \pi r^2 \times h \xrightarrow{(1)} V(h) = \pi \times h \times \left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \frac{-\pi h^3}{4} + r^2 \pi h$$

$$\Rightarrow V'(h) = \frac{-3\pi h^2}{4} + r^2 \pi$$

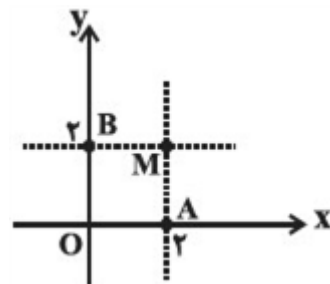
$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{-3\pi h^2}{4} + r^2 \pi = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} h^2 = r^2 \xrightarrow{h>0} h = \frac{2}{\sqrt{3}} r$$

$$\xrightarrow{(1)} r^2 = r^2 - \frac{h^2}{4} = r^2 - \frac{64}{12} = \frac{128}{12} = \frac{32}{3} \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(a+1)x^2 - 2ax + 1}{x-2} \xrightarrow[\text{است}]{\text{تابع هموگرافیک}} a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجاانب افقی: } y = 2 \\ \text{مجاانب قائم: } x = 2 \end{cases}$$



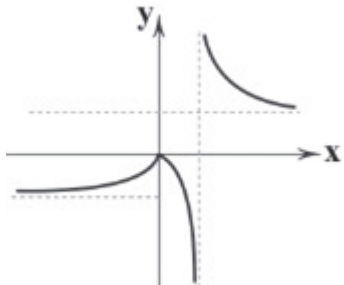
چهارضلعی AOBM مربع است، پس فاصله مبدأ از خط AB نصف قطر آن یعنی $\sqrt{2}$ خواهد بود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $x \geq 0$ باشد، تابع به صورت $y = \frac{x}{x-1}$ تبدیل می‌شود.

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ کمکی } A(0,0) \text{ ها}$$

اگر $x < 0$ باشد، تابع به صورت $y = \frac{-x}{x-1}$ تبدیل می‌شود که:

$$y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0, \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ مجانب ها}$$



توجه: در $x < 0$ ، مجانب قائم استفاده نمی‌شود.

توجه: در واقع تابع برای $x < 0$ نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت $x^3 - 6x^2 = k - 1$ بازنویسی می‌کنیم. برای بررسی جواب‌های این معادله، کافی است نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ و خط $y = k - 1$ را بررسی کنیم:

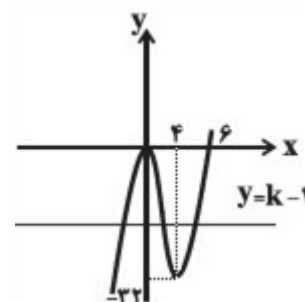
$$f(x) = x^3 - 6x^2 = x^2(x - 6)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0)=0 \\ x=4 \Rightarrow f(4)=-32 \end{cases}$$

با تعیین f' داریم:

	0	4	
f'	+	-	+
	↗	↘	↗
	max نسبی	min نسبی	

بنابراین نمودارهای مورد نظر، مطابق شکل زیر هستند:

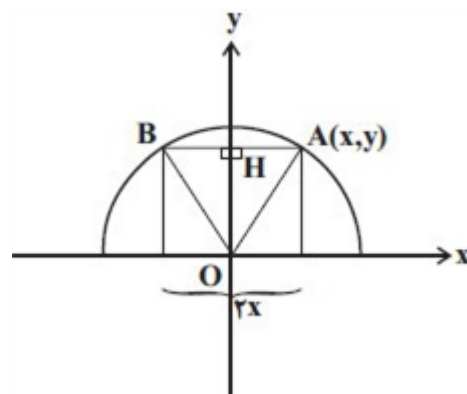


برای این که دو نمودار، سه نقطه برخورد داشته باشند، کافی است نامعادله $0 < k - 1 < -32$ برقرار باشد:

$$\Rightarrow -31 < k < 1$$

کمترین مقدار صحیح k ، -30 است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به ثابت بودن کل مساحت سطح محصور بین نمودار تابع و محور x ها، برای آنکه مساحت قسمت هاشور خورده، کمترین مقدار ممکن شود، لازم است که مساحت مثلث OAB بیشترین مقدار باشد.



اگر مختصات راس A از مثلث را (x, y) در نظر بگیریم، قاعده مثلث (AB) برابر $2x$ و ارتفاع مثلث (OH) برابر y خواهد بود.

پس مساحت این مثلث متساوی الساقین برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} (AB)(OH) = \frac{1}{2} (2x)(y) = xy$$

$$\Rightarrow S(x) = x\sqrt{2-x^2}$$

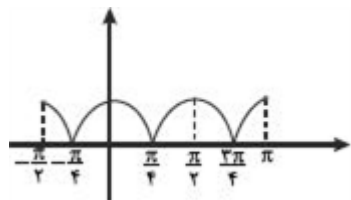
$$S'(x) = 0 \Rightarrow 1 \times \sqrt{2-x^2} + \frac{-2x}{\sqrt{2-x^2}} \times x = 0 \Rightarrow \frac{(2-x^2) - x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow[\text{مختصات است}]{\text{در ربع اول}} x = 1$$

$$\Rightarrow OH = y = \sqrt{2-x^2} \xrightarrow{x=1} y = 1$$

حال از آنجا که در مثلث متساوی الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق اند، مقدار میانه نیز برابر ۱ خواهد بود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = |\cos^2 x| \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Max نسبی: $x = 0$ و $\frac{\pi}{2}$

نقطه بحرانی: $x = -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$

$$y = ax^3 - x^2 - 3x + b \xrightarrow{A|_{-3}} -3 = a - 1 - 3 + b \Rightarrow a + b = 1 \xrightarrow{a=\frac{1}{3}} b = \frac{2}{3}$$

$$y' = 3ax^2 - 2x - 3$$

$$y'' = 6ax - 2 \xrightarrow{x=1} 6a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{a=\frac{1}{3}} y' = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به جدول}} f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y		$\frac{4}{3}$			

↗
↘
↗

max
min

راه اول: مختصات می نیمم نسبی، در تابع صدق می کند. طول نقطه می نیمم نسبی این تابع، مشتق را صفر می کند.

$$\begin{cases} y = \frac{ax^3+b}{x} \Rightarrow 3 = a + b \\ y' = \frac{ax^3-b}{x^2} \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \\ a = 1 \Rightarrow y = \frac{x^3+1}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^3-1}{x^2} \xrightarrow{y'=0} x = \pm 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

x	-1	0	1
y'	+	-	+
y	$\frac{2}{3}$	تعریف نشده	$\frac{2}{3}$

جدول تغییرات را تشکیل می دهیم:

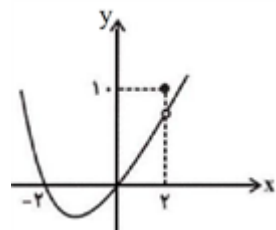
با توجه به آزمون مشتق اول: نقطه می نیمم نسبی تابع است.

راه دوم: تابع $y = \frac{ax^3+b}{x}$ یک تابع فرد است و چون $(1, 2)$ نقطه می نیمم نسبی آن است. پس نقطه می نیمم نسبی $(-1, -2)$ نقطه می ماکزیمم نسبی آن خواهد بود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ضابطه می نیمم نسبی تابع f ، معادله می نیمم نسبی دارد و محور x ها را در دو

نقطه می قطع می کند. با توجه به این که نقطه می نیمم نسبی $(2, 10)$ ماکزیمم نسبی تابع است بنابراین با توجه به

شکل تابع $a = 2$ و $b = 10$ است. برای پیدا کردن می نیمم نسبی تابع از $y = x^2 + 2x$ مشتق می گیریم.



$$y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -1$$

۳۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل مسئله را حل می‌کنیم:

معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک $x^2 + y^2 = 1$ است. معادله نیم‌دایره بالایی $y = \sqrt{1 - x^2}$ می‌باشد. نقطه‌ی A را در نظر می‌گیریم که مختصات آن به صورت $(x, \sqrt{1 - x^2})$ خواهد بود بنابراین:

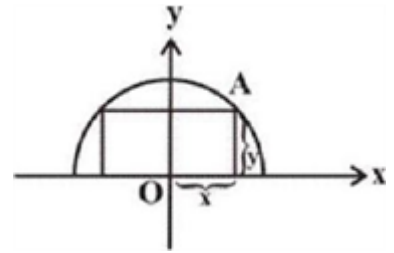
$$S = 2xy \Rightarrow S = 2x\sqrt{1 - x^2} \xrightarrow{x > 0} S = 2\sqrt{x^2 - x^4}$$

$$S'(x) = \frac{2(x - 2x^3)}{2\sqrt{x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 2x - 4x^3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(1 - 2x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = 1$$



۳۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای آن که تابع صعودی باشد، باید $f'(x) > 0$ و برای آن که تقعر آن رو به پایین باشد، باید

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{1}{2}x - 6x > 0 \Rightarrow 2x^3 + x^2 - 12 = 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$\Rightarrow x(2x^2 + x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 96}}{4} = \begin{cases} x' \cong \frac{3}{4} \\ x'' \cong -\frac{12}{4} \end{cases}$$

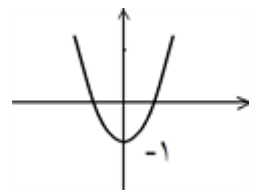
x	$-\infty$	$-\frac{12}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
y'	-	+	+	-	+

تابع در بازه‌ی $\left(-\frac{12}{4}, 0\right)$ و $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ صعودی است.

$$f''(x) = 2x^2 + x - 6 < 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 < 0 \Rightarrow -3 < x < 1$$

در بازه‌ی $(-3, 1)$ تقعر تابع به طرف پایین است. اشتراک $f' > 0$ و $f'' < 0$ بازه‌ی $(-2, 0)$ می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $y = x^2 - 1$ با توجه به نمودار نقطه‌ی $A(0, 1)$ نقطه‌ی min نسبی تابع است.



۳۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $D(x, y)$ آنگاه:

$$\begin{cases} AD = x \\ AB = 4 - y \end{cases} \Rightarrow S = x(4 - y) = x(4 - 4x + x^2)$$

$$\Rightarrow S' = 4 - 4x + x^2 + x(-4 + 2x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$S' = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow S = \frac{32}{27}$$

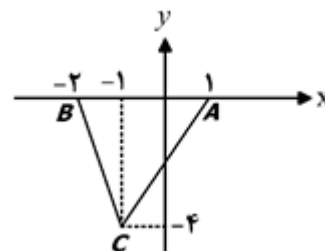
۳۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $x = -2$ و $x = 1$ نقاط بحرانی می‌باشند، برای تعیین نقطه‌ی بحرانی دیگر از تابع مشتق می‌گیریم: (برای تعیین $f' = 0$ می‌توانیم قدرمطلق را برداریم.)

$$f(x) = (x-1)|x-1||x+2| \Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x+2) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} (4 \times 2) = 4$$



۳۹

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. $x = 0$ طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع است:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{y'(0)=0} b = 0$$

$$y_{\text{عطف}} = \frac{y_{\text{max}} + y_{\text{min}}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

در تابع درجه‌ی ۳ داریم:

(دقت کنید عرض می‌نیمم تابع صفر و عرض ماکزیمم به ازای $x = 0$ حاصل می‌شود که برابر ۴ است.)

هم‌چنین طول نقطه‌ی عطف $\left(\frac{-a}{3}\right)$ است بنابراین:

$$\left(\frac{-a}{3}, 2\right) \in f \rightarrow f\left(\frac{-a}{3}\right) = 2 \Rightarrow \left(\frac{-a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + 4 = 2 \Rightarrow \frac{2a^3}{27} = -2 \Rightarrow a^3 = -27$$

$$\Rightarrow a = -3 \Rightarrow \text{طول عطف} = \frac{-a}{3} = 1$$

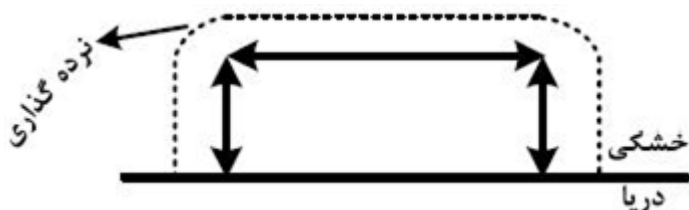
۴۰

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. طول مستطیل را x در نظر می‌گیریم پس عرض آن می‌شود $\frac{120-x}{2}$ پس مساحت زمین

برابر است با:

$$A = x\left(60 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 60x = -\frac{1}{2}\left[(x-60)^2 - 3600\right] = -\frac{1}{2}(x-60)^2 + 1800$$

بیش‌ترین مقدار A وقتی است که $x - 60 = 0$ گردد پس مترمربع $\text{Max } A = 1800$



1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

