



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

عنوان آزمون : بانک تست حسابان دوازدهم

ریاضی (فصل ۴ مشتق)

۱ هرگاه $f(x) = \sqrt{\tan \frac{\pi}{2\sqrt{x+3}}}$ مقدار $f'(1)$ چه عددی است؟

- ۱ $-\frac{\pi}{64}$ ۲ $\frac{\pi}{16}$ ۳ $\frac{\pi}{64}$ ۴ $-\frac{\pi}{16}$

۲ اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، تابع $g(x) = \frac{x+1}{1+f'(x)}$ در چند نقطه تعریف نمی‌شود؟



- ۱ ۲ ۳ ۴

۳ اگر $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+4x+6}-x-2)(\sqrt{x^2+4x+6})}$ باشد، حاصل $f'(-2)$ چقدر است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ۴ $\sqrt{2}$

۴ تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ اگر تابع $g(x) = \begin{cases} f'(x) + f''(x) & ; x < k \\ f(x) & ; x \geq k \end{cases}$ با شرط $a + 2b = c$ در R مشتق‌پذیر باشد، مجموع مربعات مقادیر قابل قبول k کدام است؟

- ۱ ۸ ۲ ۱۲ ۳ ۶ ۴ ۱۰

۵ با فرض $f(x) = (x^2 - 8) \log \frac{(1+x+5)}{(x+3)}$ مقدار $f'(2)$ کدام است؟

- ۱ ۱۸ ۲ ۲۴ ۳ ۳۰ ۴ ۳۶

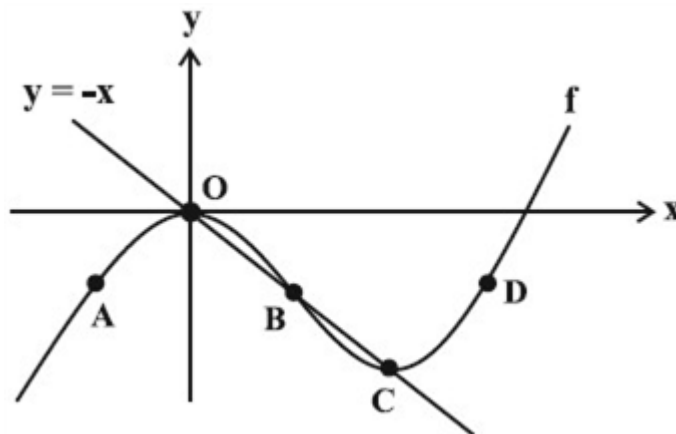
۶ در جدول مقابل، مقادیر تابع f و مشتق اول و دوم آن در $x = -1$ داده شده است. اگر $g(x) = f(x^2)$ مقدار $g''(-1)$ کدام است؟

$f(-1)$	$f'(-1)$	$f''(-1)$
۷	-۳	۲

- ۱ ۲۴ ۲ -۲۱ ۳ ۳۶ ۴ -۱۲

۷ نمودار تابع f و خط $y = -x$ در شکل زیر رسم شده است. تابع $g(x) = \sqrt{x + \frac{x}{f'(x)}}$ در چند نقطه از نقاط مشخص

شده روی نمودار تابع f تعریف می‌شود؟



۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۸ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{|x| - 1} & x \geq 0 \\ [x] & -2 < x < 0 \\ x^2 + 4x + 2 & x \leq -2 \end{cases}$ باشد، مجموع طول نقاط مشتق‌ناپذیری f کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)

-۳ (۴)

-۲ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

۹ اگر $f(x) = g(\cos x)$ و $g'(x) = \frac{x}{1-x^2}$ باشد، مقدار $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ چقدر است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

۱۰ تابع $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & x < \frac{1}{3} \\ \cos \pi x & x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$ مفروض است. مشتق چپ تابع $g(x) = \frac{|9x^2 - 1|}{f(x)}$ در نقطه‌ی $x = \frac{1}{3}$ چقدر است؟

۱۲ (۴)

-۱۲ (۳)

$-4\sqrt{3}$ (۲)

$4\sqrt{3}$ (۱)

۱۱ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ در نقطه $x = 4$ کدام است؟

$\frac{5}{27}$ (۴)

$\frac{4}{27}$ (۳)

$\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)

۱۲ تابع $f(x) = (x^2 - 8x) \frac{1}{|x|}$ مفروض است. نمودار تابع f' نمودار f را در چند نقطه قطع می‌کند؟

چهار (۴)

سه (۳)

دو (۲)

یک (۱)

۱۳ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 4} = 2$ و f در $x = 2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار مشتق تابع $y = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ چقدر است؟

-۳ (۴)

-۵ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

۸ (۱)

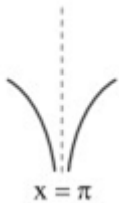
۱۴ فرض کنید $f(x) = (x[x])^2$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-4\sqrt{5})$ است؟ (نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۸ (۴)

۱۵ فرض کنید $f(x) = \left(x \left[x^2 + \frac{1}{2}\right]\right)^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

- ۱ (۱) -۴ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۱۶ اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x-4}{g(x)}$ حوالی نقطه‌ی $x = \pi$ مشابه شکل مقابل باشد، کدام تابع می‌تواند باشد؟



- ۱ (۱) $\sin x$ ۲ (۲) $-\sin x$ ۳ (۳) $1 + \cos x$ ۴ (۴) $-1 - \cos x$

۱۷ اگر $f(x) = |x^2 - 1|$ ، مشتق تابع $y = f\left(\frac{3x}{f(x)}\right)$ به‌ازای $x = \frac{1}{2}$ چه عددی است؟

- ۱ (۱) $\frac{16}{3}$ ۲ (۲) $-\frac{16}{3}$ ۳ (۳) $\frac{80}{3}$ ۴ (۴) $-\frac{80}{3}$

۱۸ با فرض $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - 4}{h}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ ۲ (۲) -۱ ۳ (۳) $\frac{1}{2}$ ۴ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۹ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه‌ی $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه‌ی $V = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید، آهنگ لحظه‌ای حجم مایع باقی‌مانده در لحظه‌ی $t = 50$ چه قدر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی $[0, 100]$ بیش‌تر است؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۲۰ ۳ (۳) ۱۰ ۴ (۴) ۳۰

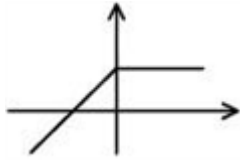
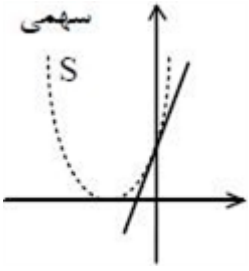
۲۰ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \cos h + \sin^2 x \sin h - \cos^2 x}{h}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $2 \sin^2 x$ ۲ (۲) $-2 \sin^2 x$ ۳ (۳) $\sin^2 x$ ۴ (۴) $-\sin^2 x$

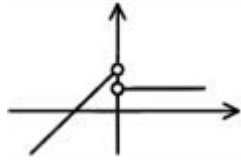
۲۱ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{2}{3}$ ۲ (۲) $-\frac{1}{3}$ ۳ (۳) $\frac{1}{3}$ ۴ (۴) $\frac{2}{3}$

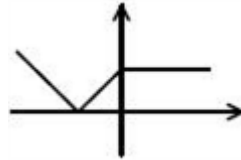
۲۲ نمودار تابع f به صورت مقابل است، نمودار f' کدام است؟



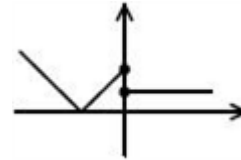
۴



۳

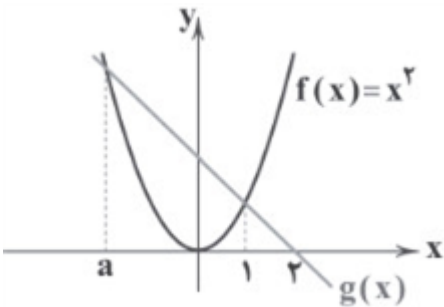


۲



۱

۲۳ با توجه به نمودار زیر، مشتق تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطه‌ی $x = a$ چه قدر است؟



۴ $\frac{3}{4}$

۳ $-\frac{4}{3}$

۲ $\frac{4}{3}$

۱ $-\frac{3}{4}$

۲۴ اگر f تابعی خطی باشد به طوری که $f'(1394) = 3$ و $f(2) = 5$ ، حاصل $f'(2016) \times f(1)$ کدام است؟

۴ ۱۲

۳ ۴

۲ ۹

۱ ۶

۲۵ اگر f پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{1 - x} = 3$ باشد، مقدار مشتق تابع $y = \frac{1}{x} f(\sqrt{x})$ به ازای $x = 1$ چه قدر است؟

۴ $-\frac{1}{2}$

۳ $-\frac{3}{2}$

۲ $-\frac{5}{2}$

۱ $-\frac{7}{2}$

۲۶ اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3x & \text{و } x < -1 \\ -x^2 + bx - 1 & \text{و } x \geq -1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -1$ مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

۴ $\frac{3}{2}$

۳ -۵

۲ صفر

۱ $\frac{1}{2}$

۲۷ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ نسبت به متغیر x در بازه‌ی $[4/25, 4/56]$ ، چه قدر است؟

۴ $\frac{5}{31}$

۳ $\frac{10}{31}$

۲ $\frac{10}{33}$

۱ $\frac{5}{33}$

۲۸ اگر $f(x) = |x| - x$ و $g(x) = 2x - |x + 1|$ باشد، آن گاه تابع $g \circ f$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۴ سه

۳ دو

۲ یک

۱ هیچ

۳۹ مشتق تابع $y = 2 \cos^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right)$ به ازای $x = \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۲ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۰ مشتق $y = \sqrt[5]{x^2}$ چگونه است؟

- ۱ $\frac{2x}{5\sqrt[5]{x^3}}$ ۲ $\frac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2)^3}}$ ۳ $\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ ۴ $\frac{2}{5\sqrt[5]{(x^2)^3}}$

۳۱ اگر $y = 2x + 3$ مماس بر نمودار تابع زوج f در $x = -1$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 4}{x - 1}$ کدام است؟

- ۱ -۸ ۲ ۸ ۳ ۱۰ ۴ -۱۰

۳۲ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \sqrt{3}$ ، آنگاه مشتق تابع $f(1 + 2 \sin x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{3}$ ۲ ۲ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ ۳

۳۳ تابع $f(x) = |x^5 - x^4| + x$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

۳۴ مشتق $y = \sin^2 \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ ، کدام است؟

- ۱ $\frac{9}{8\pi}$ ۲ $\frac{9}{4\pi}$ ۳ $\frac{27}{8\pi}$ ۴ $\frac{27}{4\pi}$

۳۵ اگر مشتق تابع $f(\sin x)$ برابر $\cot x$ باشد، مقدار مشتق تابع $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x = 2$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۶ خطی که دو نقطه به طولهای ۱ و -۱، از منحنی به معادله $y = x^2 + ax^2 + 2x$ را به هم وصل کند، بر این منحنی مماس است، a کدام است؟

- ۱ ۱، -۱ ۲ ۱، -۱ ۳ ۱، ۲ ۴ ۱، -۲

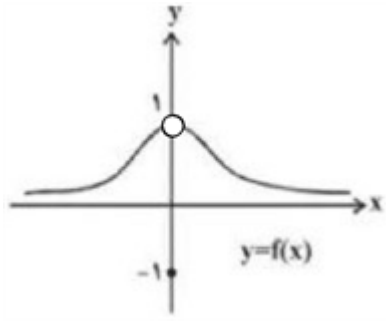
۳۷ مشتق دوم تابع $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + \sqrt[3]{x^6}}{x\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟

- ۱ $\frac{391}{36}$ ۲ $\frac{23}{6}$ ۳ $\frac{391}{6}$ ۴ $\frac{23}{36}$

۳۸ اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ -۱ ۴ $\frac{1}{2}$

۳۹ شکل زیر نمودار تابع f را نشان می‌دهد. مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ در $x = 0$ کدام است؟



۴ وجود ندارد.

۳ -۱

۲ ۱

۱ صفر

۴۰ اگر $f(x) = \frac{x - |x|^3}{2}$ و $g(x) = \sin x$ و $-\pi < x < 0$ باشد، مشتق تابع $f(g(x))$ کدام است؟

۴ $2 \sin x$

۳ $2 \cos x$

۲ $\cos x$

۱ $-2 \cos x$

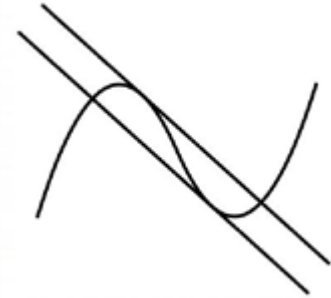
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tan^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{x+3}} \right) \times \frac{-\pi}{(x+3)\sqrt{x+3}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} \times 1 \times \frac{-\pi}{1 \times \sqrt{1}} = \frac{-\pi}{1}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲

در نقاطی که $f'(x) = -1$ باشد، تابع g تعریف نمی‌شود، بنابراین در نقاطی که مماس بر $f(x)$ شیب -1 دارد، تابع g تعریف نمی‌شود.
بنابراین در دو نقطه A و B این شرایط رخ می‌دهد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم: ۳

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+4x+6}-x-2)(\sqrt{x^2+4x+6})}$$

$$\text{مزدوج} = \frac{\sqrt{x^2+4x+6}+x+2}{(\cancel{x^2+4x+6}-x-2)(\sqrt{x^2+4x+6})} = \frac{\sqrt{x^2+4x+6}+x+2}{(+2)\sqrt{x^2+4x+6}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+4x+6}}$$

$$f'(-2) = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع g را می‌سازیم: ۴

$$g(x) = \begin{cases} 2ax + 2a + b & ; x < k \\ ax^2 + bx + c & ; x \geq k \end{cases} \xrightarrow{c=a+2b} g(x) = \begin{cases} 2ax + 2a + b & ; x < k \\ ax^2 + bx + a + 2b & ; x \geq k \end{cases}$$

هر کدام از ضابطه‌ها در دامنه‌ها در دامنه‌شان مشتق‌پذیراند، پس کافی است مشتق‌پذیری را فقط در $x = k$ بررسی کنیم. برای این کار شرط پیوستگی را ابتدا بررسی می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2ak + 2a + b = ak^2 + bk + a + 2b \Rightarrow ak^2 + (b-2a)k - a + b = 0 \quad (1)$$

شرط دیگر این است که مشتق‌های چپ و راست با هم برابر باشند:

$$g'(x) = \begin{cases} 2a & ; x < k \\ 2ax + b & ; x \geq k \end{cases} \xrightarrow{g(k)=g_+(k)} 2a = 2ak + b \Rightarrow 2ak + b - 2a = 0 \quad (2)$$

با قرار دادن تساوی ۲ در تساوی ۱ داریم:

$$ak^2 + (-2ak)k - a + 2a - 2ak = 0 \Rightarrow k^2 + 2k - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب حقیقی دارد که مجموع مربعات آن‌ها برابر است با:

$$k_1^2 + k_2^2 = (k_1 + k_2)^2 - 2k_1k_2 = (-2)^2 - 2(-1) = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵

$$f(x) = \underbrace{(x^3 - 8)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\log_{(x+3)}(10x+5)}_{h(x)}$$

$$f'(2) = g'(2) \cdot h(2) + g(2) \cdot h'(2) = \left(3x^2 h(2) + 1 \cdot h'(2) \right) \Big|_{x=2}$$

$$= 3 \times 2^2 \times \log_{\frac{25}{5}} = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به قوانین مشتق‌گیری، مشتق دوم $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم: ۶

$$g(x) = f(x^3) \Rightarrow g'(x) = f'(x^3) \times 3x^2$$

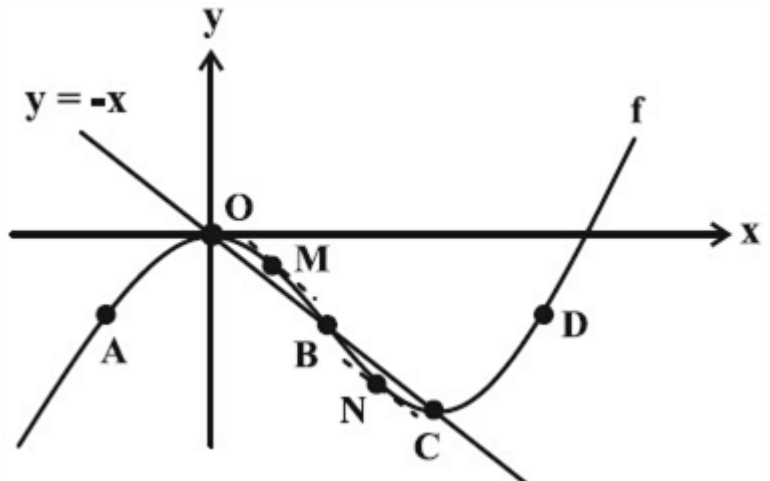
$$\Rightarrow g''(x) = \left(f''(x^3) \times 3x^2 \right) \times 3x^2 + f'(x^3) \times 6x$$

$$g''(-1) = f''(-1) \times 9 + (-6) f'(-1) \Rightarrow g''(-1) = 2 \times 9 - 6(-2) \Rightarrow g''(-1) = 18 + 12$$

$$g''(-1) = 30$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷

$$g(x) = \sqrt{x \left(\frac{f'(x)+1}{f'(x)} \right)} \Rightarrow D_g = \left\{ x \left(\frac{f'(x)+1}{f'(x)} \right) \geq 0 \right\}$$



اگر $x \leq 0$ باشد، باید $\frac{f'(x)+1}{f'(x)} \leq 0$ یا $-1 \leq f'(x) < 0$ باشد که در x های منفی امکان‌پذیر نیست.

اگر $x > 0$ باشد، باید $f'(x) > 0$ یا $f'(x) \leq -1$ باشد که با توجه به شکل بالا این مجموعه $(x_C, +\infty) \cup [x_M, x_N]$ است. نقاط B و D در مجموعه موردنظر حضور دارند.

نقاط M و N نقاطی روی نمودار هستند که مشتق در آن‌ها دقیقاً برابر ۱- می‌شود.

۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{|x|} - 1 & x \geq 0 \\ [x] & -2 < x < 0 \\ x^2 + 4x + 2 & x \leq -2 \end{cases}$$

$x = 1$ ریشه‌ی زیر رادیکال است که مشتق در آن نامتناهی است. تابع در $x = 0$ پیوسته نیست و مشتق‌پذیر نیست.

تابع در $x = -1$ (عدد صحیح داخل جزء صحیح) ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

تابع در $x = -2$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f(-2)^+ = -2 \Rightarrow f(-2)^- = 4 - 8 + 2 = -2 \Rightarrow \text{پیوسته است}$$

$$f'_+(-2) = 0, f'_-(-2) : 2x + 4 \xrightarrow{x=-2} 0 \Rightarrow \text{مشتق چپ و راست برابر است}$$

مجموع طول نقاط مشتق‌ناپذیری برابر است با:

$$1 + 0 + (-1) = 0$$

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{نکته: } (f(u))' = u' f'(u)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x g'(x) = -\sin x \times \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \Rightarrow f''(x) = 1 + \cot^2(x) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \end{aligned}$$

۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

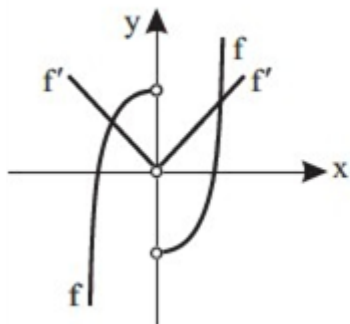
در یک همسایگی چپ $x = \frac{1}{3}$ ، فقط از عامل صفرکننده (یعنی صورت کسر) مشتق می‌گیریم.

$$g(x) = \frac{1 - 9x^2}{f(x)} \Rightarrow g'_-\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-18x}{f\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{-18 \times \frac{1}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = -6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -4\sqrt{3}$$

۱۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2x+1} - \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \times x}{2x+1} \Rightarrow f'(4) = \frac{3 - \frac{4}{3}}{9} \Rightarrow f'(4) = \frac{5}{27}$$

۱۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8x}{x} & x > 0 \\ \frac{x^3 - 8x}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & x > 0 \\ -x^2 + 8 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حاصل حد داده شده، متناهی و حد مخرج صفر است، پس حد صورت نیز صفر است. با توجه به مشتق‌پذیری و در نتیجه پیوستگی تابع f در $x = 2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$

با توجه به تعریف مشتق و نتیجه‌ی بالا، حد داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 2} = f'(2) \times \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} f'(2) = 2 \Rightarrow f'(2) = 8$$

$$y = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$$

حال می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow y' = 2xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2xf\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) f(2) - f'(2) = 3 - 8 = -5$$

۱۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left(\log\left(\frac{\sqrt{\delta} - 1}{\delta}\right)\right)' = g'\left(\frac{\sqrt{\delta} - 1}{\delta}\right) \times f'\left(g\left(\frac{\sqrt{\delta} - 1}{\delta}\right)\right)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2} (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{\delta} - 1}{\delta}\right) = \frac{-1}{2} \times \underbrace{\left(\frac{\delta}{\delta} - 1\right)^{-\frac{3}{2}}}_{2^{-2}} \times \sqrt{\delta} = \frac{-1}{2} \times 8 \times \sqrt{\delta} = -4\sqrt{\delta}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{\delta} - 1}{\delta}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta}{\delta} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\delta}\right) - 1}} = \left(\frac{1}{\delta}\right)' = 2^+$$

$$f'(2^+) \Rightarrow ((2x)^2)' = (8x^2)' = 24x^2 = 24 \times 4 \Rightarrow \frac{24 \times 4 \times 4 \times \cancel{\delta}}{\cancel{4} \times \cancel{8} \times \cancel{\delta}} = 8$$

۱۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(\log)' \left(\frac{2}{\sqrt{8}} \right) = g' \left(\frac{2}{\sqrt{8}} \right) f' \left(g \left(\frac{2}{\sqrt{8}} \right) \right)$$

$$g'(x) = \frac{-1}{2} (2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \Rightarrow g'\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right) = \frac{-2 \frac{1}{\sqrt{8}}}{\frac{1}{16}} = -\frac{32}{\sqrt{8}} = -8\sqrt{2}$$

$$f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\Rightarrow (\log)' \left(\frac{2}{\sqrt{8}} \right) = -8\sqrt{2} \times f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = -512\sqrt{2}$$

که حاصل چهار برابر $-128\sqrt{2}$ است.

$$\frac{-512\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4$$

۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق شکل حد تابع در $x \rightarrow \pi$ ، برابر $-\infty$ است (هم از راست و هم از چپ) بنابراین باید مخرج کسر، دارای ریشه‌ی مضاعف باشد (زیرا فقط در این صورت است که هم حد چپ و هم حد راست تابع در ریشه‌ی مخرج، هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ می‌شوند) توجه شود که حد صورت کسر عدد منفی است، زیرا برابر $(\pi - 4)$ می‌شود که با توجه به مقدار تقریبی $3/14$ برای π ، حاصل حد، عددی منفی می‌شود. پس باید حد مخرج برابر 0^+ باشد تا حاصل کل حد برابر $-\infty$ شود. در بین گزینه‌های داده‌شده، فقط تابع $1 + \cos x$ است که حد آن در $x \rightarrow \pi^+$ و در $x \rightarrow \pi^-$ هر دو برابر 0^+ می‌شود. یعنی داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x-4}{1+\cos x} = \frac{\pi-4}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x-4}{1+\cos x} = \frac{\pi-4}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

زیرا اگر $x \rightarrow \pi^+$ یا $x \rightarrow \pi^-$ در هر صورت $\cos x \rightarrow 1^-$ میل می‌کند.

۱۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $y = f\left(\frac{3x}{f(x)}\right)$ در یک همسایگی $x = \frac{1}{3}$ داریم، $f(x) = 1 - x^2$ ، پس:

$$\begin{aligned} y &= f\left(\frac{3x}{1-x^2}\right) \text{ و } f'(x) = -2x \\ \Rightarrow y' &= \frac{3(1-x^2) - (-2x)3x}{(1-x^2)^2} f'\left(\frac{3x}{1-x^2}\right) = \frac{3(1+x^2)}{(1-x^2)^2} f'\left(\frac{3x}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{3(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \times (-2) \left(\frac{3x}{1-x^2}\right) \\ y' &= \frac{-18x(1+x^2)}{(1-x^2)^3} \Rightarrow y'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-18}{3} \end{aligned}$$

۱۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هدف محاسبه $f'(3)$ است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3\sqrt{x+1} - \frac{3x-1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{3x+7}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \\ f'(3) &= \frac{16}{2 \times 4 \times 2} = 1 \end{aligned}$$

۱۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تابع درجه دوم، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی $[a, b]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در لحظه $x = \frac{a+b}{2}$ برابر است. پس آهنگ متوسط تغییر حجم در بازه‌ی $[0, 100]$ با آهنگ تغییر حجم در لحظه‌ی $t = 50$ برابر است.

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

صورت سؤال به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(3x-h) - \cos 3x}{h}$ است. فرض کنید $f(x) = \cos x$ ، پس:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \\ f'(x) &= -\sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ \Rightarrow -\sin 3x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(3x-h) - \cos 3x}{h} \end{aligned}$$

۲۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم و سپس مشتق‌پذیری را حساب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{5-2(-2)} = -\frac{1}{4}(-2)^2 - 2b + c \Rightarrow 3 = -2 - 2b + c$$

$$\Rightarrow -2b + c = 5$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = -x + b \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{6} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

$$-2b + c = 5 \Rightarrow \frac{14}{3} + c = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

۲۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در نقطه برخورد سهمی با محور y ها، خط مماس بر سهمی رسم شده است، پس نمودار f' در $x = 0$ پیوسته است. تا قبل از رأس، شیب مماس بر f منفی است، پس f' منفی است و بعد از آن f' مثبت است تا $x = 0$ و از $x = 0$ به بعد f' ثابت است، پس گزینه (۴) صحیح است.

۲۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $g(x)$ یک تابع خطی گذرا از دو نقطه‌ی $(1, 1)$ و $(2, 0)$ است، ضابطه‌ی آن $g(x) = 2 - x$ خواهد بود. حال f و g را قطع می‌دهیم.

$$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$y = \frac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow y = \frac{2-x}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 - 2x(2-x)}{(x^2)^2} \quad \text{پس } a = -2 \text{ است.}$$

$$\Rightarrow y'(-2) = \frac{-4 + 4(4)}{16} = \frac{3}{4}$$

۲۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ضابطه‌ی تابع خطی f به صورت $f(x) = ax + b$ است. اکنون با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} f'(x) = a \xrightarrow{f'(1)=3} a = 3 \quad (*) \\ f(x) \xrightarrow{f(2)=5} 5 = 2a + b \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

پس ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = 3x - 1$ است، بنابراین:

$$f(1) \times f'(2) = 2 \times 3 = 6$$

۲۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از فرض مسئله متوجه می‌شویم: $f'(1) = -3, f(1) = 2$

$$y' = -\frac{1}{x^2}f(\sqrt{x}) + \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$$

$$y'(1) = -f(1) + \frac{1}{1} f'(1) = -\frac{7}{2}$$

۲۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آن‌که تابع f در $x = -1$ مشتق‌پذیر باشد، اولاً باید در این نقطه پیوسته باشد:

$$\Rightarrow a + 3 = -b - 2 \Rightarrow a + b = -5$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = a + 3 \\ f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -b - 2 \end{cases}$$

ثانیاً باید در این نقطه مشتق راست تابع با مشتق چپ آن برابر باشد:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 3 & \text{و } x < -1 \Rightarrow f'_-(-1) = -2a - 3 \\ -2x + b & \text{و } x > -1 \Rightarrow f'_+(-1) = 2 + b \end{cases} \Rightarrow -2a - 3 = 2 + b \Rightarrow 2a + b = -5$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \begin{cases} a + b = -5 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -5 \end{cases}$$

۲۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ نسبت به متغیر x در بازه‌ی $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

با توجه به نکته‌ی بالا، آهنگ متوسط برابر است با:

$$\frac{f(4/56) - f(4/25)}{4/56 - 4/25} = \frac{\sqrt{2/56} - \sqrt{2/25}}{0/31} = \frac{1/6 - 1/5}{0/31} = \frac{0/1}{0/31} = \frac{10}{31}$$

۲۸

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \quad \text{gof}(x) = \begin{cases} g(0) & x \geq 0 \\ g(-2x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{gof}(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ -2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین gof فقط در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

۲۹

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نکته: $y = u^a \Rightarrow y' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

بنابراین در این تست داریم:

$$2 \times 2 \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\sin \left(\frac{x - \pi}{3} \right) \right) \cos \left(\frac{x - \pi}{3} \right) \xrightarrow[\frac{x - \pi}{3} = \frac{\pi}{6}]{x = \frac{7\pi}{3}} -\frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \left(-\frac{4}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y' = \frac{2}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. این تابع $y = x^{\frac{2}{5}}$ پس داریم:توجه کنید که مشتق $\sqrt[m]{u}$ به صورت $\frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$ است:

$$y = \sqrt[5]{x^2} \Rightarrow y' = \frac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2)^{5-1}}} = \frac{2x}{5\sqrt[5]{x^8}} = \frac{2x}{5\sqrt[5]{x^5 x^3}} = \frac{2x}{5x\sqrt[5]{x^3}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

۳۰

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی تماس هم در خط مماس صدق می‌کند و هم در ضابطه‌ی تابع.

$$A \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right. \in f \Rightarrow f(-1) = 1 \xrightarrow[\text{فرد}]{\text{زوج} f} f(1) = 1 \quad \text{مماس } m = 2 \Rightarrow f'(-1) = 2 \xrightarrow[\text{فرد}]{\text{زوج} f'} f'(1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 1) \cdot (f(x) + 4)}{x - 1} = f'(1) \cdot (4 + f(1)) = -2 \times (4 + 1) = -10$$

۳۱

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \sqrt{3} \Rightarrow f'(2) = \sqrt{3}$$

$$(f(1 + 2 \sin x))' \Big|_{x = \frac{\pi}{6}} = 2 \cos x f'(1 + 2 \sin x) \Big|_{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) f' \left(1 + 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times f'(2) = 3$$

۳۲

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌توان نوشت:

$$f(x) = |x^2(x - 1)| + x = x^2|x - 1| + x$$

$$= \begin{cases} x^3 - x^2 + x & x \geq 1 \\ x^2 - x^3 + x & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & x > 1 \\ 2x - 3x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید که $f'_+(1) = 2$ و $f'_-(1) = 0$ لذا تابع در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$y = \sin^r \sqrt{rx} \Rightarrow y' = r \left(\frac{1}{\sqrt{rx}} \cos \sqrt{rx} \right) \sin^r \sqrt{rx}$$

$$\Rightarrow y' \left(\frac{\pi^r}{18} \right) = r \left(\frac{1}{\frac{\pi}{r}} \cos \frac{\pi}{r} \right) \sin^r \left(\frac{\pi}{r} \right) = r \left(\frac{r}{\pi} \right) \left(\frac{1}{r} \right)^r = \frac{r^r}{\pi}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$(f(\sin x))' = \cot x \Rightarrow \cos x f'(\sin x) = \cot x \Rightarrow f'(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y'(2) = -\frac{1}{4} f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} (2) = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$m_{AO} = \frac{f(+1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{a + 3 - a + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

با توجه به این که تابع درجه ۳ است پس نقطه‌ی تماس، یکی از نقاط $x = 1$ یا $x = -1$ است. بنابراین:

$$f'(1) = 3 \rightarrow 3 + 2a + 2 = 3 \rightarrow a = -1$$

یا

$$f'(-1) = 3 \rightarrow 3 - 2a + 2 = 3 \rightarrow a = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$y = \frac{(x-1)^3 + x^{\frac{16}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{(x-1)^3}{x^{\frac{2}{3}}} + x^{\frac{16}{3} - \frac{2}{3}} \Rightarrow y = \frac{(x-1)^3}{x^{\frac{2}{3}}} + x^{\frac{14}{3}}$$

مشتق اول و دوم f در $x = 1$ صفر است فقط کافی است که از $x^{\frac{14}{3}}$ مشتق بگیریم.

$$y' = \frac{14}{3} x^{\frac{11}{3}} \Rightarrow y'' = \frac{11}{3} x^{\frac{8}{3}} \Rightarrow y''(1) = \frac{11}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow b + 1 = 1 + a \cos \pi \Rightarrow b = -a$$

$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin \pi x & x > 1 \\ 2bx + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -a\pi \sin \pi x = 2b + 1 \Rightarrow 2b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از تعریف مشتق داریم: ۳۹

$$g'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{g(x) - g(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{xf(x) - \cdot}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = 1$$

روش دوم:

$$g'(\cdot) = 1 \times f(\cdot) = 1 \times 1 = 1$$

کافی است از عامل صفر، مشتق گرفته و در $f(\cdot)$ ضرب کنیم:

$$f(x) = \frac{x - |\sqrt{x}|}{\sqrt{x}} = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ \sqrt{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(f(g(x)))' = g'(x) f'(g(x)) = (\cos x) f'(\sin x)$$

$$-\pi < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow f'(\sin x) = \frac{1}{2}$$

$$(f'(g(x)))' = (\cos x)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos x$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

