



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

عنوان آزمون : بانک تست حسابان دوازدهم

ریاضی (فصل ۳ حد های نامتناهی) - حد در بی

۱) (نهایت) اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{m^2 x^2 - 6mx + 2m + n} = +\infty$ ، حاصل $m + n$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 2x})$ کدام است؟

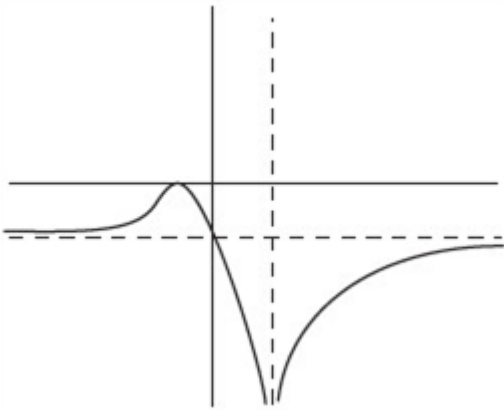
$-\frac{7}{6}$ (۴)

$-\frac{1}{6}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

صفر (۱)

۳) نمودار تابع $f(x) = \frac{-4x^2 - 8x + a}{x^2 + bx - c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f(2)$ کدام است؟



+۳۶ (۴)

-۳۶ (۳)

-۴ (۲)

+۴ (۱)

۴) نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و سپس سه واحد در راستای محور xها به سمت راست

انتقال می‌دهیم و آن را f می‌نامیم. مجانب قائم تابع $y = f\left(\frac{2-x}{3}\right)$ از مجانب قائم تابع $g(x)$ چقدر فاصله دارد؟

۸ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} - 6}{2^{x+2} + 2}$ کدام است؟

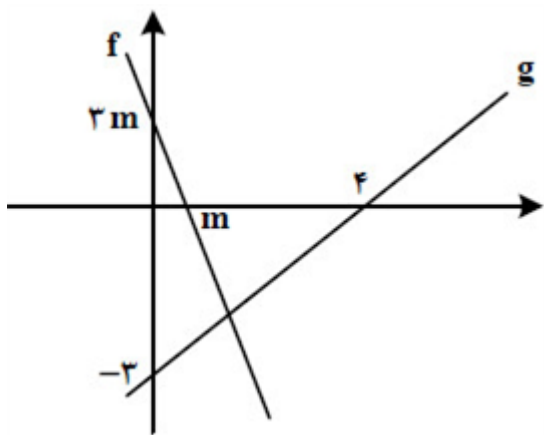
$+\infty$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\infty$ (۲)

-۳ (۱)

۶ شکل مقابل، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



۴ (۴)

-۴ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

۷ نمودار تابع $f(x) = \frac{(a^x + 1)x^x + 1}{x^x + ax + 1}$ مجانب قائم ندارد. کدام یک، خط مجانب افقی نمودار این تابع می‌تواند باشد؟

$y = 7$ (۴)

$y = 6$ (۳)

$y = 5$ (۲)

$y = 4$ (۱)

۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{x^x + 12}}{x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ باشد، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -2$ ، کدام است؟

۲ (۴)

$1/5$ (۳)

۱ (۲)

$0/5$ (۱)

۹ تابع $f(x) = \frac{|x| + |a|x}{|2x - 1| + b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر $y = \alpha$ و $y = 2\alpha$ مجانب‌های افقی و $x = \beta$ و $x = 2\beta$ مجانب‌های قائم باشند، کدام مورد برابر b است؟

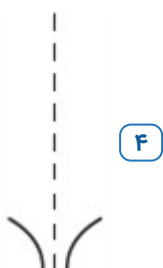
$-2|a|$ (۴)

$2|a|$ (۳)

$|a|$ (۲)

$-|a|$ (۱)

۱۰ نمودار تابع $f(x) = \frac{[x - 1] + \frac{1}{x}}{1 - x^x}$ در همسایگی $x = 1$ کدام است؟ (، []، نماد جزء صحیح است.)



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۱۱ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^x + x^x}{x^x + x + k}$ بر مجانب افقی آن مماس است. مقدار k کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۱۲ اگر $f(x) = \sqrt{4x^x + 2x + ax}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 10$ باشد، مقدار a کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۳ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + 1} - x^2}{x + 1}$ کدام است؟

- ۱ -۲ ۲ ۲ ۳ صفر ۴ $\frac{1}{2}$

۱۴ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3}$ در اطراف مجانب‌های افقی خود چگونه است؟



۱۵ تابع $f(x) = \frac{|ax + 1| + x^2}{|x| + b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ ۱ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{4}$

۱۶ اگر نمودار $y = \frac{1}{f(x)}$ در مجاورت $x = 1$ به شکل مقابل باشد، ضابطه‌ی $y = f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

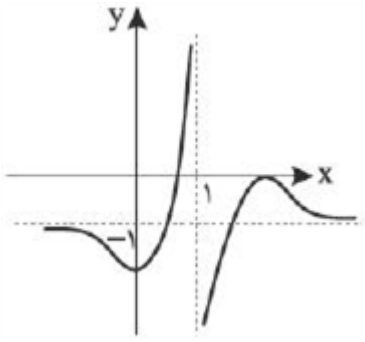


۱ $f(x) = 1 + \cos \pi x$ ۲ $f(x) = 1 + \sin \frac{\pi}{4} x$ ۳ $f(x) = (\cos 2\pi x) - 1$ ۴ $f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{4} x\right) - 1$

۱۷ خطوط مجانب $y = x(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4})$ تا یک‌دیگر به چه فاصله‌ای هستند؟

- ۱ ۴ ۲ ۱۲ ۳ ۸ ۴ ۱۶

۱۸ نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 + f \circ f(x)}$ کدام است؟



۴ صفر

۳ $+\infty$

۲ $-\infty$

۱ ۱

۱۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + bx})$ برابر ۳ است. مقدار b کدام است؟

۴ ۶

۳ -۶

۲ ۳

۱ -۳

۲۰ حد چپ توابع $f(x) = \frac{-x}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x}{\sin \pi x}$ به ترتیب در $x = -1$ کدام است؟

۴ $-\infty$ و $-\infty$

۳ $+\infty$ و $-\infty$

۲ $-\infty$ و $+\infty$

۱ $+\infty$ و $+\infty$

۲۱ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ و $f(x) = \frac{ax^n + 5}{3x - \sqrt{4x^2 + 21x}}$ باشد، حاصل $f'(1)$ کدام است؟

۴ $-\frac{5}{8}$

۳ $\frac{5}{8}$

۲ $-\frac{5}{2}$

۱ $\frac{5}{2}$

۲۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \sin \frac{1}{x} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} \right]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۴ ۱ و ۰

۳ ۱ و ۱

۲ ۱ و ۰

۱ ۰ و ۰

۲۳ با فرض $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{4}{x}\right)$ چه عددی است؟

۴ صفر

۳ ۴

۲ ۲

۱ ۱

۲۴ با فرض $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ ، نمودار تابع $y = f \circ f(x)$ در مجاورت مجانب افقی خود به کدام صورت است؟



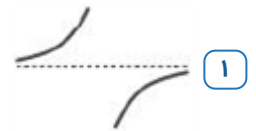
۴



۳



۲



۱

۲۵ مجانب‌های تابع $y = \frac{x + 4\sqrt{x^2 + 1}}{2x - \sqrt{x^2 + 3}}$ در نقاط A و B متقاطع هستند. اندازه AB چه قدر است؟

۴ $\sqrt{10}$

۳ ۶

۲ ۲

۱ $2\sqrt{10}$

۲۶ حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\sin x]}{|x|^2 - |x|}$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 10}{x^2 - 6x + 9}$ به ترتیب کدام است؟

- ۱ $-\infty$ و $+\infty$ ۲ $+\infty$ و $+\infty$ ۳ $-\infty$ و $+\infty$ ۴ $-\infty$ و $-\infty$

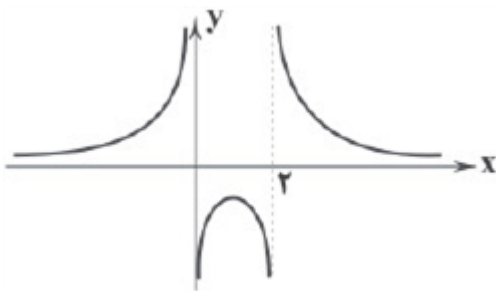
۲۷ جمله‌ی « $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی بزرگ انتخاب شود»، توصیف کدام حد زیر است؟

- ۱ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ۲ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ۳ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ۴ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

۲۸ اگر $f(x) = \frac{x^2 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $+\infty$ ۳ $-\infty$ ۴ صفر

۲۹ اگر نمودار زیر، مربوط به تابع $y = \frac{1}{ax^2 - bx + a - 1}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟



- ۱ -۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۱

۳۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{x^2 - 16}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ صفر ۲ $\frac{1}{8}$ ۳ $+\infty$ ۴ $-\infty$

۳۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x^2 - 1}{3x^2 - ax - b} = +\infty$ ، حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱ ۳۳ ۲ -۲۱ ۳ -۳۳ ۴ ۲۱

۳۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3}{x + 4} \right)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{5}$ ۲ $\frac{1}{5}$ ۳ $+\infty$ ۴ $-\infty$

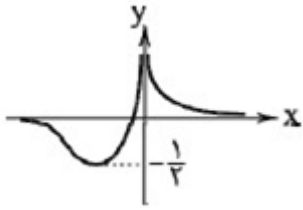
۳۳ اگر $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ و $g(x) = \frac{x - 1}{2x + 1}$ ، آن‌گاه فاصله‌ی محل تلاقی مجانب‌های تابع $g \circ f$ تا مبدأ مختصات چه قدر است؟

- ۱ $\frac{2}{5}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ۳ $\sqrt{2}$ ۴ $\frac{1}{5}$

۳۴ حد عبارت $\frac{1}{1 - \cos x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $+\infty$

۳۵ شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \frac{ax + \frac{1}{x}}{x^2 + bx}$ است. $a + b$ کدام است؟



- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -۱

۳۶ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + a - \sqrt{x^2 + bx}) = \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۷ منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^2 + 3x}{ax^2 + 4x - 1}$ و $a \neq 0$ فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ۲ (۲) $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ ۳ (۳) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ۴ (۴) $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

۳۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{3}$ ۲ (۲) $-\frac{1}{4}$ ۳ (۳) $\frac{1}{3}$ ۴ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۹ اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos ax}{x^2}$ برابر $\frac{3}{4}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + \sqrt{x^2 + x}}{3x - 1}$ کدام است؟ ($a > 0$)

- ۱ (۱) ۲ ۲ (۲) -۱ ۳ (۳) $\frac{1}{3}$ ۴ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۰ کدام خط مجانب قائم تابع $y = \frac{\tan x}{2 \sin x - 1}$ نیست؟

- ۱ (۱) $x = \frac{\pi}{6}$ ۲ (۲) $x = \frac{\pi}{3}$ ۳ (۳) $x = \frac{5\pi}{6}$ ۴ (۴) $x = \frac{\pi}{2}$

۱) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به حد داده شده متوجه می‌شویم که $x = \frac{3}{4}$ ریشه مضاعف مخرج است. در نتیجه داریم:

$$m^2 x^2 - 6mx + 2m + n = m^2 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = m^2 x^2 - \frac{3}{2} m^2 x + \frac{9m^2}{16}$$

$$6m = \frac{3}{2} m^2 \xrightarrow{m \neq 0} m = 4 \quad \text{از تساوی نظیر به نظیر ضرایب داریم:}$$

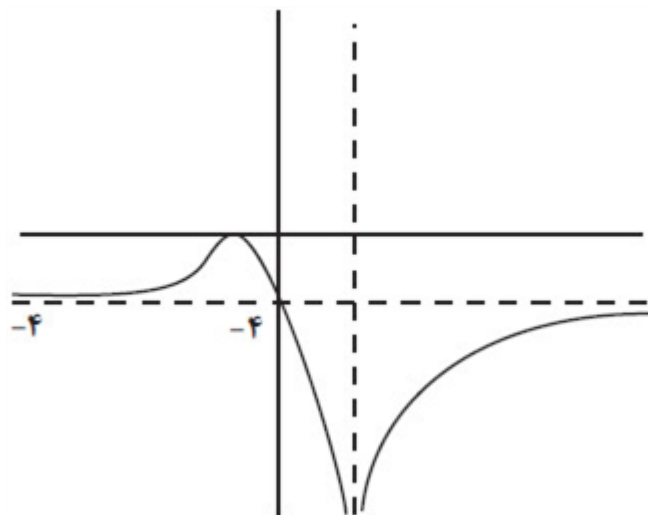
$$2m + n = \frac{9m^2}{16} \xrightarrow{m=4} 8 + n = 9 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m + n = 5$$

دقت کنید که اگر $m = 0$ باشد، عبارت مخرج، مقدار ثابت می‌شود و در آن صورت حاصل حد نیز مقداری ثابت شده و نمی‌تواند بی‌نهایت شود.

۲) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \dots} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[p]{a} \left|x + \frac{b}{pa}\right|$ (قدرمطلق فقط برای P زوج است)، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{1} \left| x + \frac{-1}{2 \times 1} \right| - \sqrt{1} \left(x + \frac{2}{2 \times 1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \left(x + \frac{-1}{2} \right) - x - \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

۳) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. صورت تابع باید ریشه مضاعف منفی داشته باشد پس:



$b = +2$ (ریشه مضاعف منفی)

$$f(x) = \frac{-(x+2)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f(2) = \frac{-(2+2)^2}{(2-1)^2} = -16$$

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\Rightarrow 6^2 + 16a = 0 \Rightarrow a = -6 \\ -4x^2 - 8x - 4 &= -(x+2)^2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(x+2)^2}{x^2 + bx - c} &= \frac{-4x^2}{x^2} = -4 \\ f(0) = -4 &\Rightarrow \text{با توجه به شکل} \frac{-4}{-c} = -4c = -1 \\ f(x) &= \frac{-(x+2)^2}{x^2 + bx + 1} \xrightarrow{\text{ضریب ریشه مضاعف مثبت دارد}} \\ b^2 - 4 &= 0 \Rightarrow b = \pm 2 \quad b = -2 \end{aligned}$$

۴) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{1}{-2x-1} \quad \text{قرینه نسبت به } y$$

$$y = \frac{1}{-2(x-2)-1} = \frac{1}{5-2x} = f(x) \quad \text{انتقال به راست}$$

$$y = f\left(\frac{2-x}{2}\right) = \frac{1}{5-2\left(\frac{2-x}{2}\right)} = \frac{2}{11+2x}$$

فاصله‌ی $x = -\frac{11}{2}$ از خط $x = \frac{1}{2}$ برابر ۶ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} - 6}{2^{x+2} + 2} = \frac{2^{-\infty} - 6}{2^{-\infty} + 2} = \frac{0 - 6}{0 + 2} = -3$$

توجه شود که $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$ بنابراین حد فوق حالت مبهم ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x|}{\frac{2}{3}x} = \frac{-3x}{\frac{2}{3}x} = -\frac{9}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در دو حالت نمودار تابع f مجانب قائم ندارد؛ یکی این که مخرج تابع ریشه نداشته باشد و دیگری این که صورت مضربی از مخرج باشد.

$$\Delta = a^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < a < 2$$

در حالت اول Δ ی مخرج منفی است:

در حالت دوم هم به ازای $a = 0$ ، صورت مضربی از مخرج است که تابع ثابت $y = 1$ را تولید می کند و مجانب افقی ندارد.

پس به ازای $-2 < a < 2$ نمودار f مجانب قائم ندارد. خط مجانب افقی نمودار هم $y = a^2 + 1$ است. داریم:

$$-2 < a < 2 \Rightarrow 0 \leq a^2 < 4 \Rightarrow 1 \leq a^2 + 1 < 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |x|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{x} = a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 + 12}}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 - x^2 - 12}{x + 2} \times \frac{1}{-4 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \times \frac{1}{-6} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |a|x}{2x - 1 + b} = \frac{1 + |a|}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + |a|x}{-2x + 1 + b} = \frac{1 - |a|}{2} \Rightarrow \frac{1 + |a|}{2} = 2 \times \frac{1 - |a|}{2} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3}$$

$$|2x - 1| = -b \xrightarrow{b < 0} \begin{cases} 2x - 1 = -b \Rightarrow x = \frac{1-b}{2} \\ 2x - 1 = +b \Rightarrow x = \frac{1+b}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1-b}{2} = 2 \times \frac{1+b}{2} \Rightarrow b = \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow b = -|a|$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است حد راست و چپ در نقطه $x = 1$ را محاسبه کنیم: ۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x - 1] + \frac{1}{x}}{1 - x^2} = \frac{0 + \frac{1}{1}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x - 1] + \frac{1}{x}}{1 - x^2} = \frac{-1 + \frac{1}{1}}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

پس پاسخ گزینه ۴ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجانب افقی را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x^2}{x^2 + x + k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

پس خط $y = 1$ مجانب افقی است. طول نقطه برخورد نمودار تابع و مجانب افقی آن از معادله $f(x) = 1$ به دست می‌آید که باید ریشه مضاعف داشته باشد تا خط مجانب بر نمودار تابع مماس شود.

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + x^2}{x^2 + x + k} = 1 \Rightarrow x^2 + x^2 = x^2 + x + k \Rightarrow x^2 - x - k = 0$$

$$\Delta = 1 + 4k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

برای داشتن ریشه مضاعف باید $\Delta = 0$ باشد:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + ax}}{x} = 10$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x| + ax}{x} = 10 \Rightarrow (2 + a) = 10 \Rightarrow a = 8$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x^2 - 1} - x^2}{x + 1} + \frac{-\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} \right) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x^2}{x + 1} + \frac{2x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2 - 1}{(x + 1)(\sqrt{x^2 - x^2 - 1} + x^2)} + \frac{-\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{x(x^2 + x^2)} + \frac{-(-2x)}{x + 1} \right) = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا برای یافتن مجانب‌های افقی f حد این تابع را وقتی $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ را محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

می‌کنیم.

حال برای اینکه رفتار تابع را در اطراف خط $y = 1$ مشخص کنیم، حاصل $f(x) - 1$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} - 1 = \frac{-1}{x^2 + x + 3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1 < 0 \Rightarrow f(x) < 1$$

با توجه به این مطلب وقتی $x \rightarrow +\infty$ مقادیر تابع از ۱ کمتر است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

حال برای اینکه رفتار تابع را در اطراف خط $y = -1$ مشخص کنیم، حاصل $f(x) + 1$ را وقتی $x \rightarrow -\infty$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) + 1 = \frac{x^2 + x + 2}{x|x| + x + 3} + 1 = \frac{2x + 5}{-x^2 + x + 3} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} f(x) + 1 > 0 \Rightarrow f(x) > -1$$

با توجه به این مطلب وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر تابع از -۱ بیشتر است. در نتیجه نمودار گزینه ۲ درست است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بدون شک $b < 0$ حال حدهای تابع در بینهایت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = |a| - 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = |a| + 2$$

$$b < 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| + 2 = -b \\ |a| - 2 = b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + 2x}{|x| - 2} = -2 \quad \text{پس: } f(x) = \frac{1 + 2x}{|x| - 2} \text{ لذا:}$$

۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

باید $f(x) = 0$ ریشه‌ی مضاعف $x = 1$ داشته باشد، علاوه بر آن f در مجاورت $x = 1$ باید مثبت باشد، تنها گزینه‌ی قابل قبول گزینه‌ی ۱ است.

۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع مجانب قائم ندارد، اما دارای دو مجانب افقی است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4})(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4})}{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{|x| + |x|} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty & y = 4 \\ x \rightarrow -\infty & y = -4 \end{cases}$$

فاصله دو مجانب افقی $y = 4$ است.

۱۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = f(f(1^+)) = f(-\infty) = -1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 + f(x)} = \frac{1}{1 + (-1)^-} = -\infty$$

۱۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + bx}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - bx}{x - \sqrt{x^2 + bx}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-bx}{x - |x|} = -\frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = -4$$

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-x}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{\sin \pi x} = \frac{-1}{\sin(-\pi)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

۲۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 5}{3x - \sqrt{4x^2 + 21x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 5}{3x - \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{21}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 5}{3x - |x| \sqrt{4 + \frac{21}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 5}{3x - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x} = -1$$

باید $n = 1$ و $\frac{a}{5} = -1$ باشد تا حاصل حد داده شده بتواند برابر -1 شود، پس $a = -5$ است و خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{-5x + 5}{3x - \sqrt{4x^2 + 21x}}$$

چون عبارت صورت کسر به ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود، پس برای محاسبه $f'(1)$ کافی است به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$f(x) = (-5x + 5) \times \frac{1}{3x - \sqrt{4x^2 + 21x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -5 \times \frac{1}{3x - \sqrt{4x^2 + 21x}} \Rightarrow f'(1) = -5 \times \frac{1}{3 - 5} = \frac{5}{2}$$

۲۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ اما با توجه به شکل واضح است که در یک همسایگی راست

$x = 0$ داریم:

$$0 < \sin x < x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0$$

پس:

برای محاسبه‌ی حد دوم از تغییر متغیر $\frac{1}{x} = t$ استفاده می‌کنیم. اگر $x \rightarrow -\infty$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0^-$ پس:

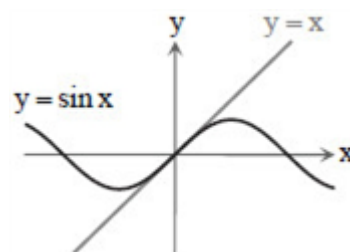
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \sin \frac{1}{x} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{t} \sin t \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{\sin t}{t} \right]$$

$$x < \sin x < 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$$

با توجه به شکل بالا در همسایگی چپ $x = 0$ داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{\sin t}{t} \right] = [1^-] = 0$$

پس:



۲۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

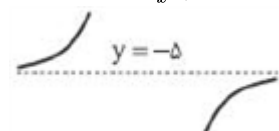
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(x-1)^2 - 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1| + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x+x) = 1$$

۲۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f \circ f(x) = \frac{2\left(\frac{x+1}{x-3}\right) + 1}{\frac{x+1}{x-3} - 3} = \frac{5x-1}{10-x} = -5 + \frac{49}{-x+10} \begin{cases} \xrightarrow{+\infty} y = -5^- \\ \xrightarrow{-\infty} y = -5^+ \end{cases}$$



۲۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجانب‌های قائم:

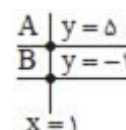
$$2x - \sqrt{x^2 + 3} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 2x \xrightarrow{x > 0} x^2 + 3 = 4x^2 = 4x^2$$

مجانب‌های افقی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2x}{2x - x} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2x}{2x + x} = -1$$

پس $AB = 6$ است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 10}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 10}{(x-3)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\sin x]}{|x|^2 - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\sin x]}{|x|(|x| - 1)} = \frac{[-]}{(0^+)(-1)} = \frac{-1}{(0^+)(-1)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توصیف مسئله برای $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ است، زیرا اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه x خیلی بزرگ می‌شود و در نتیجه $f(x)$ به L نزدیک می‌شود. ۲۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$f(x) = \frac{x^2 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x^2 + x} = \frac{x^2(x-1) + (x-1)}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x^2 + 1)(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 + 1)(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق شکل، تابع دارای دو مجانب قائم $x = 2$ و $x = 0$ است. پس این دو عدد ریشه‌های ۲۹

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ x = 2 \Rightarrow 4 - 2b = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

مخرج‌اند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰

نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت اگر $L < 0$ و تابع g در همسایگی محذوفی از a منفی

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

باشد، آنگاه:

اگر $3 < x < 4$ ، آنگاه $[x] = 3$. با توجه به این مطلب داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3 - 4}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{(x-4)(x+4)}$$

وقتی $x \rightarrow 4^-$ عبارت $(x-4)(x+4)$ منفی است، با توجه به اینکه صورت کسر نیز منفی است، از نکته‌ی بالا نتیجه می‌گیریم حاصل حد برابر $+\infty$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x^2 - 1}{3x^2 - ax - b} = +\infty$ باید مخرج این کسر دارای ریشه‌ی مضاعف ۱ ۳۱

باشد، بنابراین:

$$3x^2 - ax - b = 3(x-1)^2 \Rightarrow 3x^2 - ax - b = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow a = 6, b = -3$$

بنابراین:

$$a + b^2 = 6 - 9 = -3$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$= \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2}{(x+4)(x-1)} - \frac{3}{(x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2 - 3(x-1)}{(x-1)(x+4)} \right) = \frac{17}{-5(0^-)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3}{x+4} \right)$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$(\text{gof})(x) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 1} = \frac{\frac{x-1-x-1}{x+1}}{\frac{2x-2+x+1}{x+1}} = \frac{x-2}{3x-1}$$

حالا خط $x = \frac{1}{\delta}$ و $y = \frac{1}{\delta}$ مجانب‌های تابع هستند که محل برخورد آنها $A\left(\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right)$ است که فاصله‌اش تا مبدأ برابر است با:

$$OA = \sqrt{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{1}{\delta}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، تابع در اطراف مجانب قائم، مخرج ریشه‌ی مضاعف $x = 0$ دارد پس ۳۵

$b = 0$ و $f(x) = \frac{ax + \frac{1}{x}}{x^2}$ می‌شود. طبق شکل خط $y = -\frac{1}{x}$ در سمت چپ محور y ها بر نمودار $y = f(x)$ مماس است یعنی معادله‌ی تقاطع آنها ریشه‌ی مضاعف منفی دارد.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ f(x) = \frac{ax + \frac{1}{x}}{x^2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{ax + \frac{1}{x}}{x^2} \Rightarrow x^2 + 2ax + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 4a^2 - 4 = 0$$

$\Rightarrow a = \pm 1$ ریشه‌ی مضاعف منفی باشد $\Rightarrow a = 1 \Rightarrow a + b = 1$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + a - \sqrt{x^2 + bx}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + a - \sqrt{x^2 + bx}) \times \frac{x + a + \sqrt{x^2 + bx}}{x + a + \sqrt{x^2 + bx}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\cancel{x} + 2ax + a^2 - \cancel{x} - bx)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2a-b}{2}x + \frac{a^2}{2} \right) \end{aligned}$$

چون حاصل حد فوق برابر $\frac{1}{x}$ است پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{2a-b}{2} = 0 \\ \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی ۳ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^2 + 3x}{ax^2 + 4x - 1}$ ($a \neq 0$) فقط دو خط مجانب دارد. چون

این تابع قطعاً دارای یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = \frac{1}{a}$ است و مجانب مایل هم ندارد، لذا تابع فوق باید تنها دارای یک خط مجانب قائم باشد. برای این که تابع دارای یک خط مجانب قائم باشد یکی از شرایط ممکن این است که مخرج آن دارای یک ریشه‌ی مضاعف باشد. برای این منظور باید Δ ی مخرج، صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4a(-1) = 0 \Rightarrow 16 + 4a = 0 \Rightarrow a = -4$$

حال مجانب‌های قائم و افقی تابع و سپس نقطه‌ی تلاقی این مجانب‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\xrightarrow{a=-4} y = \frac{x^2 + 3x}{-4x^2 + 4x - 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{مجانب افقی: } y = -\frac{1}{4} \\ \text{مجانب قائم: } x = \frac{1}{4} \Rightarrow -(4x - 1)^2 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ی مخرج} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{محل تلاقی مجانب ها}} \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$$

توجه: جواب دیگر این مسئله، نقطه‌ی $\left(\frac{3}{13}, \frac{9}{13} \right)$ است که به ازای $a = \frac{13}{9}$ رخ می‌دهد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{4x + \sqrt{x}}$ دارای ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ است. برای رفع ابهام کافی است ابتدا جمله‌ی پرتوان صورت و مخرج را مشخص

کرده و سپس با توجه به درجه‌ی جمله‌ی پرتوان صورت و مخرج، جواب حد را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{4x + \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2|x|}{4x} \\ \xrightarrow{x > 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حد اول را با استفاده از هم ارزی یا هوپیتال می‌توانیم حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos ax}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{a^2 x^2}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{a^2 - 1}{2} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow a^2 - 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \end{aligned}$$

حاصل حد دوم برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(ax + \sqrt{x^2 + x})}{4x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |x|}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{4x} = \frac{a - 1}{4} \xrightarrow{a=2} \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2 \sin x - 1} = \frac{\sin x}{\cos(2 \sin x - 1)}$$

$$\begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ و } x = \frac{5\pi}{6} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{3}$ ریشه‌ی مخرج نمی‌باشد پس مجانب قائم نمی‌باشد.

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

