



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۲

عنوان آزمون : بانک تست حسابان دوازدهم

ریاضی (فصل ۱ تابع)

۱) تابع f در هر بازه از دامنه‌اش صعودی است؛ اما روی دامنه‌اش صعودی نیست. ضابطه f کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $f(x) = x^x$ ۲) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

۳) $f(x) = |x|$ ۴) $f(x) = -\frac{1}{x}$

۲) به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = (4-m)\sqrt{(m-2)x+2}$ اکیداً صعودی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳) اگر دامنه و برد تابع $y = f(x) + 1$ به ترتیب $[-1, 2]$ و $[0, 4]$ باشند، اشتراک دامنه و برد تابع $y = \frac{1}{x} f(2x+1)$ کدام است؟

۱) $[-1, 1]$ ۲) $[-\frac{1}{2}, 1]$ ۳) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ۴) $[-1, \frac{1}{2}]$

۴) اگر $g(x) = \text{Log}_x^x$ و $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ باشد، باقی‌مانده تقسیم تابع $(f \circ f)(x+1)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\frac{15}{7}$ ۴) $\frac{17}{7}$

۵) اگر $f(x)$ اکیداً صعودی و $g(x) = f(-x) - f(x)$ باشد و دامنه تابع $h(x) = \sqrt{g^{-1}(|2x-1|) - g^{-1}(|x+1|)}$ به صورت $D_h = [a, b]$ باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶) تابع $f(x) = -\cos 2x - 5$ در بازه $[0, a]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۷) قرینه نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases}$ نسبت به محور y ها را یک واحد به راست و هشت واحد به پایین منتقل می‌کنیم. فاصله‌ی نقطه‌های برخورد نمودار تابع جدید با محور x ها، از یک‌دیگر کدام است؟

۱) ۵۳ ۲) ۳۵ ۳) ۵۸ ۴) ۶۸

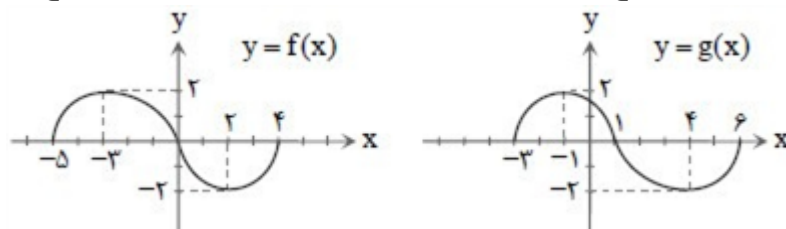
۸ نقطه $A(2, a)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ و نقطه $A'(b, 2b)$ متناظر با A روی نمودار تابع $y = 3f\left(\frac{1-x}{5}\right)$ حاصل است. کدام است $a + b$ ؟

- ۱ -۱۵ ۲ $-\frac{1}{3}$ ۳ $-\frac{1}{5}$ ۴ -۹

۹ نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها، کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ -۳ ۳ ۱ ۴ ۲

۱۰ شکل نمودار تابع f به صورت زیر است. در این صورت ضابطه‌ی تابع g که نمودار آن رسم شده است، کدام است؟

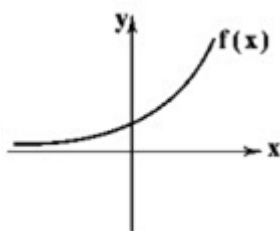


- ۱ $y = f(1-x)$ ۲ $y = -f(1+x)$ ۳ $y = -f(x-1)$ ۴ $y = -f(1-x)$

۱۱ کدام گزینه در مورد تابع $y = \frac{x-1}{x+1}$ صحیح است؟

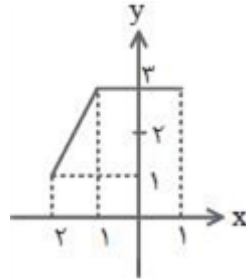
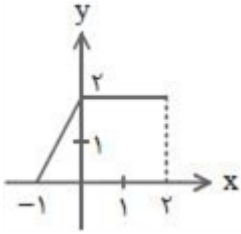
- ۱ در فاصله $(-\infty, 1)$ صعودی است. ۲ در فاصله $(0, 1)$ نزولی است.
۳ در فاصله $(1, +\infty)$ صعودی است. ۴ در فاصله $(-\infty, -1)$ نزولی است.

۱۲ اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، جواب نامعادله $\left(\frac{2}{f(x)}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{2}{f(x)}\right)^{4-x}$ کدام است؟

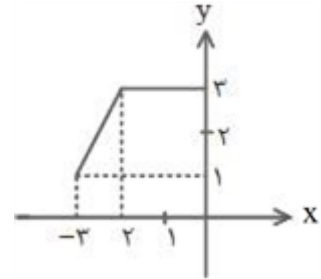


- ۱ $x \geq 1$ ۲ $x \geq 2$ ۳ $x \geq 3$ ۴ $x \leq 3$

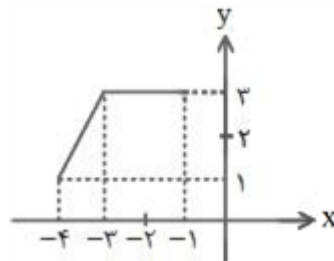
۱۳ نمودار تابع $y = f(x - 1)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y = f(x + 2) + 1$ کدام است؟



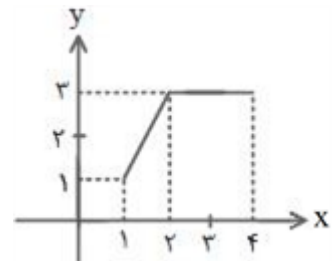
۲



۱



۴



۳

۱۴ برای تبدیل نمودار $y = 2f(2 + 3x) - 1$ به $y = f(x)$ کدام ترتیب مراحل درست است؟

۱ انتقال یک واحد به بالا، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال ۲ واحد به سمت راست

۲ انتقال یک واحد به بالا، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، انتقال ۲ واحد به سمت راست و انبساط افقی با ضریب ۳

۳ (انتقال دو واحد به راست، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال یک واحد به سمت بالا

۴ انتقال یک واحد به بالا، انبساط عمودی با ضریب ۲، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال ۲ واحد به سمت راست

۱۵ تابع $f(x) = (x - a)^2 + 1$ را در نظر بگیرید. اگر تابع $y = f(x) + |f(x)|$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

۴ $a \geq 1$

۳ $a \leq 1$

۲ $a \geq 2$

۱ $a \leq 2$

۱۶ کدام تابع زیر یکنواست؟

۴ $f(x) = |x - 2|$

۳ $f(x) = x^2 - 4x$

۲ $f(x) = x^2 |x|$

۱ $f(x) = x |x|$

۱۷ نمودار دو تابع چندجمله‌ای $f(x) = x^3$ و $g(x) = -x + 3$ در فاصله $(-\infty, 0)$ چند نقطه‌ی برخورد دارند؟

۴ صفر

۳ ۱

۲ ۲

۱ ۳

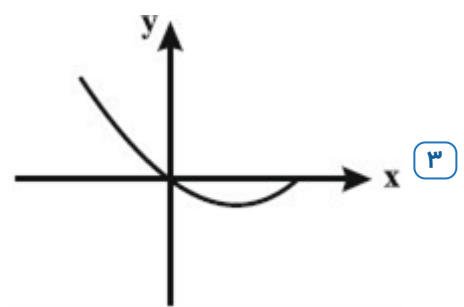
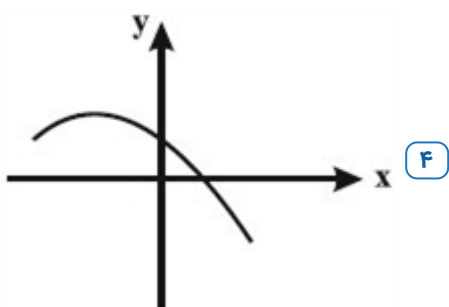
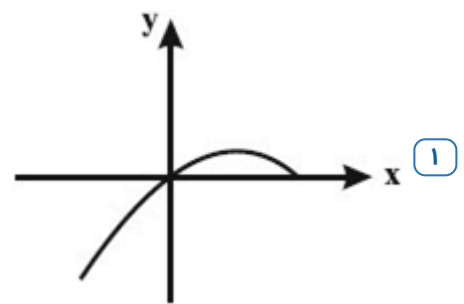
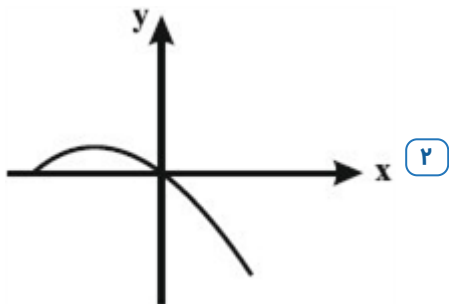
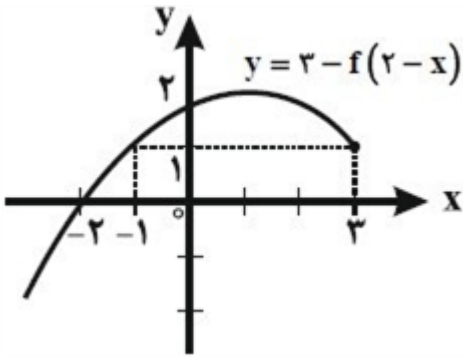
۱۸ اگر تابع f نزولی و دامنه آن R باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(2) - f(|x - 1|)}$ کدام است؟

۴ R

۲ $[-1, 3]$

۱ $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

۱۹ با توجه به نمودار $y = 3 - f(2 - x)$ ، نمودار تابع $y = 2 - f(x + 3)$ کدام است؟



۲۰ نمودار تابع $f(x) = x + 1 + \frac{|x - 2|}{x - 2}$ چگونه است؟

۱ هم صعودی، هم نزولی ۲ صعودی اکید ۳ غیریکنوا ۴ نزولی اکید

۲۱ حدود m کدام باشد تا تابع $f(x) = mx^2 + (m + 5)x - 10$ دو ریشه دو طرف خط $x = 4$ داشته باشد؟

۱ $m > 0$ ۲ $m < \frac{1}{4}$ ۳ $0 < m < \frac{1}{4}$ ۴ $-\frac{1}{4} < m < 0$

۲۲ حدود m کدام باشد تا تابع $f(x) = mx^2 + (m - 5)x - 4$ دارای دو ریشه طرفین خط $x = 3$ باشد؟

۱ $0 < m < \frac{19}{12}$ ۲ $-1 < m < 4$ ۳ $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$ ۴ $0 < m < \frac{7}{3}$

۲۳ در بازه (a, b) ، مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{5}{4}$ کمتر از ۱۰ می‌باشد، بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۱۰ ۴ ۱۹

۲۴ اگر $f(x) = a$ (تابعی ثابت) و داشته باشیم $af(2x) = 2a + f(x)$ آنگاه $f\left(\frac{1}{5}\right)$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۲۵ اگر f یک تابع خطی و $f(f(x)) = 4x + 15$ باشد، در صورتی که g تابع همانی و h تابع ثابت باشد و $g(3) \cdot h(3) = 6$ باشد، $f(x) + g(x) + h(x)$ کدام است؟

- ۱) $-x - 12$ ۲) $-x - 13$ ۳) $3x + 8$ ۴) $3x + 10$

۲۶ اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند و $f(2) = 3$ باشد، حاصل $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- ۱) ۱۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۷ ۴) ۱۴

۲۷ چندجمله‌ای $P(x) = x^5 + ax^3 - 3x + 2$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x + 1)$ بر $x + 3$ کدام است؟

- ۱) -۴۸ ۲) -۶۴ ۳) -۷۲ ۴) -۵۶

۲۸ اگر عبارت $a - 10x + 14x^2 - 4x^3 + ax^4$ بر سه جمله‌ای $x^3 - 2x + 1$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + 4x + (a + 1)$ ماکزیمی به عرض (-۲) دارد. $f(-1)$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) -۵ ۳) -۱۱ ۴) -۸

۳۰ کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط منحنی $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ و نقطه‌ی $(0, 3)$ کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۱ کدام تابع زیر در دامنه‌ی خود نه صعودی است و نه نزولی؟

- ۱) $y = x + [x]$ ۲) $y = \text{Log } x$ ۳) $y = -\sqrt{x+1} + 2$ ۴) $y = x - [x]$

۳۲ محور تقارن سهمی $y = \frac{1}{3}(x+2)(x-3)$ کدام خط است؟

- ۱) $x = \frac{1}{2}$ ۲) $x = -\frac{1}{2}$ ۳) $x = \frac{5}{2}$ ۴) $x = -\frac{5}{2}$

۳۳ اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$ زیر محور x ها باشد، حدود x کدام گزینه می‌باشد؟

- ۱) $(1, +\infty)$ ۲) $(-1, +\infty)$ ۳) $(-\infty, -1)$ ۴) $(-\infty, 1)$

۳۴ باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^{30} + (-x^2 + 9x^3 - 27x + 27)^5 + 1$ بر $x^2 - x + 3$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) x ۳) $x + 1$ ۴) $x - 2$

۳۵ در چه صورت چندجمله‌ای $x^2 + px + q$ بر $(x - a)^2$ بخش‌پذیر است؟

- ۱) $a = -\frac{3q}{2p}$ ۲) $a = -\frac{3p}{2q}$ ۳) $a = \frac{3q}{2p}$ ۴) $a = \frac{3p}{2q}$

۳۶ بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار $y = 2 - |x|$ بالای نمودار $y + x = 2$ قرار می‌گیرد به صورت (a, b) است. مساحت محدود به دو نمودار روی بازه‌ی $(0, b)$ چه قدر است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{4}{3}$

۳۷ دامنه‌ی تابع $f(3x)$ بازه‌ی $[-1, 2]$ است. دامنه‌ی تابع $f(2x+1)$ کدام است؟

- ۱ $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$ ۲ $[-5, 13]$ ۳ $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$ ۴ $\left[-5, \frac{7}{3}\right]$

۳۸ اگر $f(x) = (x-1)^2 + (x-1)^2$ باشد حاصل $f(\sqrt{3}+1)$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۹ ۳ ۱۵ ۴ ۱۲

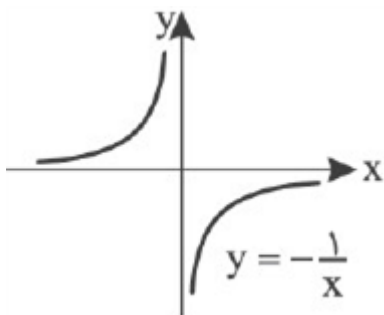
۳۹ اگر تابع f ، اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(a^2 - 3) > f(2a)$ ، حدود a کدام است؟ $(D_f = R)$

- ۱ $(0, +\infty)$ ۲ $(\sqrt{3}, +\infty)$ ۳ $(-1, 3)$ ۴ $(-3, 1)$

۴۰ در تقسیم عبارت $(2x^3 - 5x^2 + x)$ بر دو جمله‌ای $2x + 1$ مجموع ضرایب عددی در خارج قسمت کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ ۰ ۳ ۱ ۴ ۲

- ۱) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $f(x) = x^3$ روی دامنه‌اش صعودی است، پس گزینه ۱ رد می‌شود. تابع‌های گزینه‌های ۲ و ۳ در بازه $[-2, -1]$ صعودی نیستند. تنها تابع گزینه ۴ همه شرایط را دارد.



- ۲) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار تابع f از روی نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به گونه زیر عمل می‌کنیم:
- ابتدا ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x+2}$ به دست آید.
 - سپس طول نقاط را بر $m-2$ تقسیم و عرض نقاط را در $m-4$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید.
- چون تابع $y = \sqrt{x+2}$ اکیداً صعودی است، برای اینکه تابع f هم اکیداً صعودی شود، کافی است علامت‌های $m-2$ و $m-4$ مثل هم باشند.

$$\Rightarrow (m-2)(4-m) > 0 \Rightarrow (m-2)(m-4) < 0 \Rightarrow 2 < m < 4$$

این بازه شامل فقط یک عدد صحیح است.

- ۳) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$D: -1 \leq 2x+1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (I)$$

$$R: 0 \leq f(x)+1 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}f(2x+1) \leq \frac{3}{4} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

- ۴) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم $(f \circ f)(x+1)$ بر $x-1$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{باقی مانده} = (f \circ f)(2) = f(f(2))$$

$$\begin{cases} g(x) = 2 \Rightarrow \log_4 x = 2 \Rightarrow x = 4 \\ (f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x=4} f(2) = \frac{9}{2} = 3 \\ g(x) = 3 \Rightarrow \log_4 x = 3 \Rightarrow x = 8 \\ (f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x=8} f(3) = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$f(f(2)) = f(3) = \frac{17}{2}$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم برابر است با:

- ۵) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین:

الف) $f(-x)$ و $-f(x)$ اکیداً نزولی هستند، بنابراین $g(x)$ اکیداً نزولی است.

ب) $g(x)$ اکیداً نزولی است، بنابراین $g^{-1}(x)$ نیز اکیداً نزولی است. برای تعیین دامنه $h(x)$ داریم:

$$g^{-1}(|2x-1|) - g^{-1}(|x+1|) \geq 0 \Rightarrow g^{-1}(|2x-1|) \geq g^{-1}(|x+1|) \xrightarrow{g^{-1} \text{ اکیدا نزولی}}$$

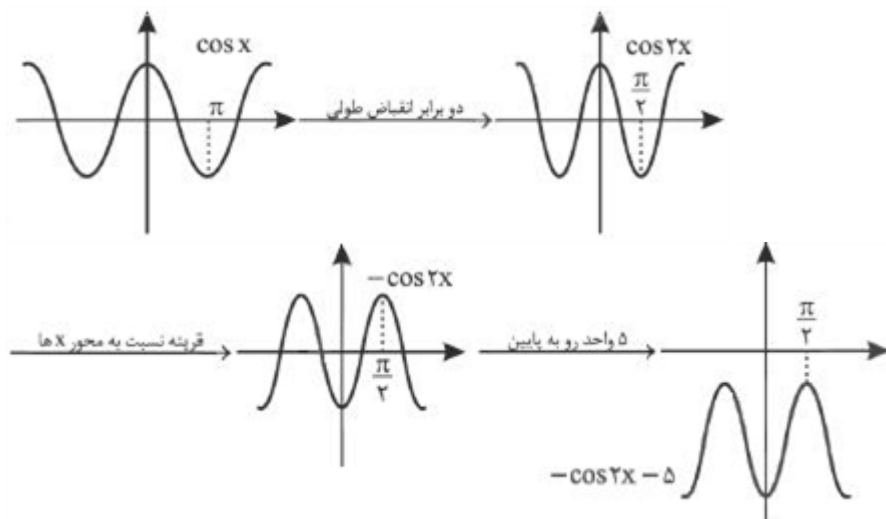
$$|2x-1| \leq |x+1| \Rightarrow (2x-1+x+1)(2x-1-x-1) \leq 0 \Rightarrow (3x)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{h(x)} = [0, 2]$$

$$\max(b-a) = 2-0 = 2$$

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
تابع را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع معلوم است که تابع در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ اکیداً صعودی است.

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مراحل تبدیل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y = \begin{cases} \sqrt{-x} & ; x \leq 0 \\ (-x)^2 + 2(-x) & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = \begin{cases} \sqrt{-(x-1)} & ; x \leq 1 \\ (-(x-1))^2 + 2(-(x-1)) & ; x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{هشت واحد به سمت پایین}}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{-x+1} - 8 & ; x \leq 1 \\ x^2 - 4x - 5 & ; x > 1 \end{cases}$$

حال نمودار این تابع را با محور x ها قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} \sqrt{-x+1} - 8 = 0 \Rightarrow \sqrt{-x+1} = 8 \Rightarrow x = -63 \leq 1 \\ (x-5)(x+1) = 0 \xrightarrow{x>1} x = 5 \end{cases}$$

بنابراین فاصله‌ی دو نقطه با طول‌های $x = 5$ و $x = -63$ روی محور x ها برابر $\Delta x = 5 - (-63) = 68$ می‌باشد.

۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = f(x) \Rightarrow a = f(2)$$

$$y = 3f\left(\frac{1-x}{5}\right) \Rightarrow 2b = 3f\left(\frac{1-b}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-b}{5} = 2 \\ \frac{2b}{3} = a \end{cases}$$

پس $b = -9$ و $a = -6$ و در نتیجه $a + b = -15$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹

$$\sqrt{4-x} \xrightarrow[\text{راستای واحد}]{\text{واحد در } k} \sqrt{4-x+k} \xrightarrow[\text{در جهت افق}]{k-2 \text{ واحد}} \sqrt{4-(x-(k-2))+k}$$

$$\sqrt{-x+k+2+k}$$

وارون خود را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند یعنی (۱, ۱) در تابع صدق می‌کند:

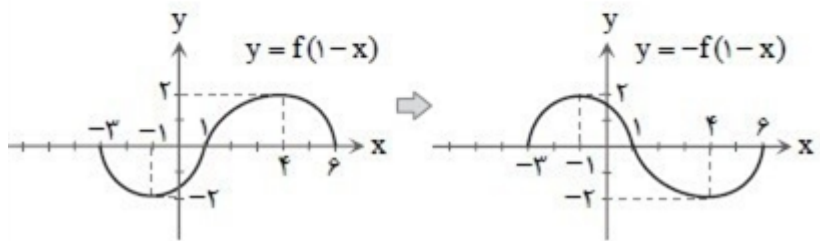
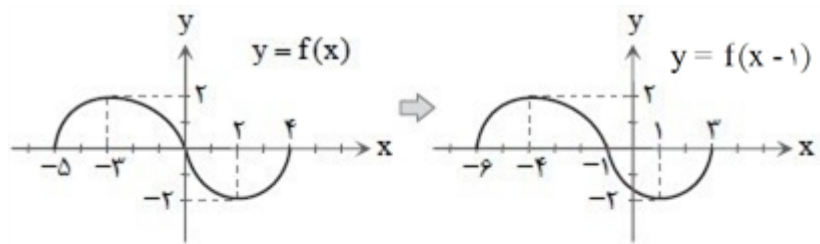
$$\sqrt{-1+k+2+k} = 1 \Rightarrow \sqrt{k+1} = 1-k$$

$$1-k \geq 0 \Rightarrow k \leq 1$$

$$k+1 = k^2 - 2k+1 \Rightarrow k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow k=0$$

$$\sqrt{-x+2-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{-x+2} = 1 \Rightarrow -x+2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

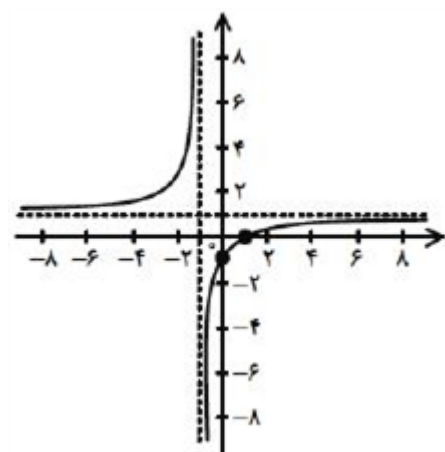
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار این تابع هموگرافیک به شکل زیر است: ۱۱

$$y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

این تابع در فاصله‌های $(-\infty, -1)$ و $(-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



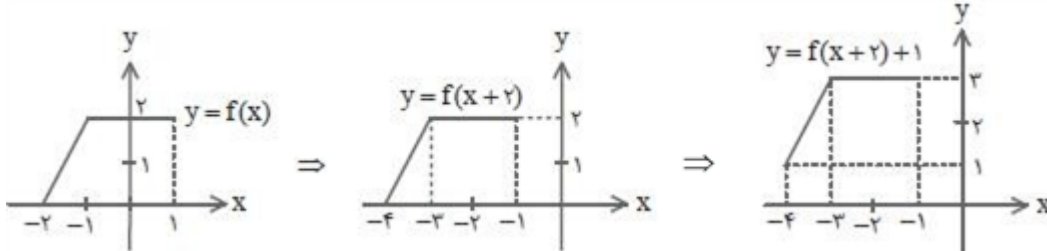
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲

چون تابع $f(x)$ صعودی اکید و به ازای هر x از دامنه مثبت است، پس تابع $\frac{2}{f(x)}$ نزولی اکید است.

$$\left(\frac{2}{f(x)}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{2}{f(x)}\right)^{4-x} \xrightarrow{\text{نزولی اکید } \frac{2}{f(x)}} x-2 \geq 4-x$$

$$\Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که برای رسم $y = f(x-1)$ و نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم پس باید نمودار $y = f(x-1)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم تا نمودار $y = f(x)$ به دست آید. ۱۳



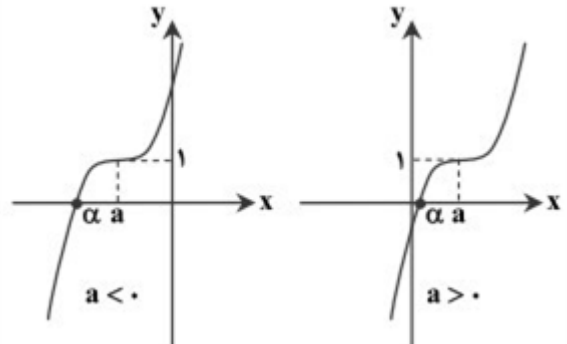
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا مراحل تبدیل نمودار $y = f(x)$ را به $y = 2f(2+3x) - 1$ را به دست می‌آوریم: ۱۴

$$f(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال واحد ۲}} f(2+x) \xrightarrow[\text{با ضریب ۱/۳}]{\text{انتقال افقی}} f(2+3x)$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} 2f(2+3x) \xrightarrow[\text{به سمت پایین}]{\text{انتقال واحد ۱}} y = 2f(2+3x) - 1$$

اگر مراحل فوق را از نمودار تابع $y = 2f(2+3x) - 1$ به صورت معکوس انجام دهیم، به نمودار تابع $y = f(x)$ خواهیم رسید. بنابراین ترتیب مراحل گفته شده در گزینه «۱» درست است.

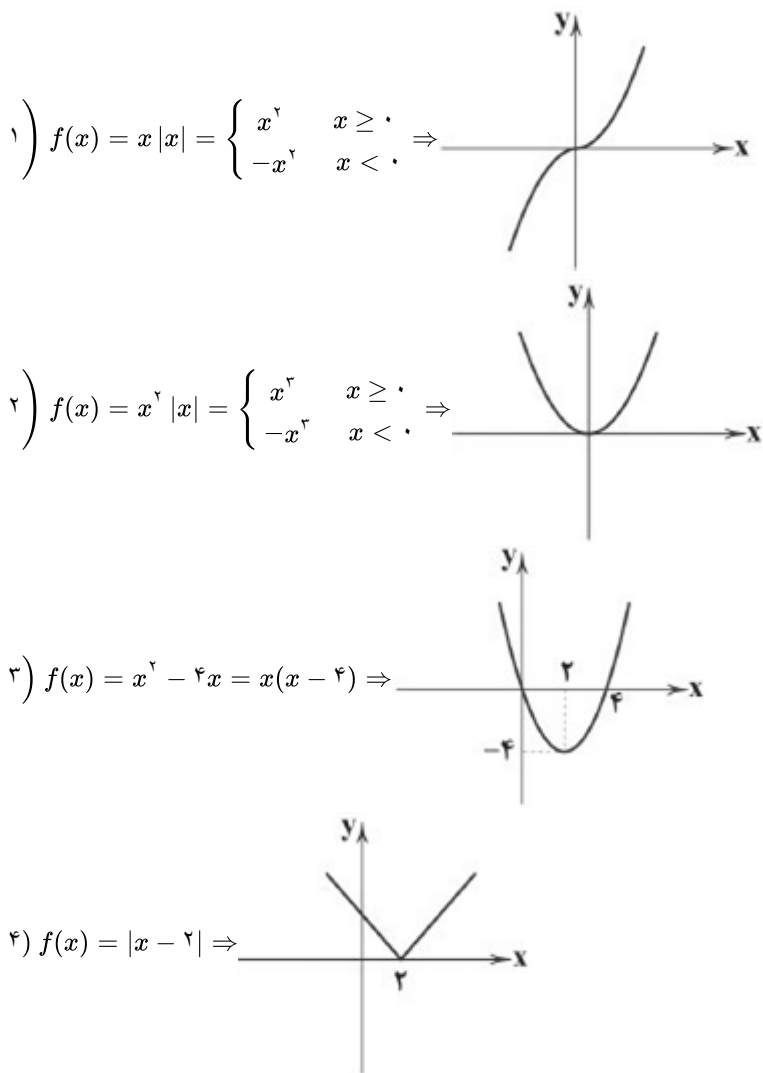
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع $y = f(x) + |f(x)|$ را تشکیل می‌دهیم. نمودار f با فرض $a > 0$ یا $a < 0$ به صورت زیر است: ۱۵



اگر بخواهیم تابع y اکیداً صعودی باشد، باید تابع f حتماً نامنفی باشد. زیرا اگر تابع f منفی باشد، مقدار آن در تابع y صفر می‌شود که یک تابع اکیداً صعودی نیست. پس تابع f حتماً باید در بازه $[1, +\infty)$ نامنفی باشد یا به عبارت دیگر نقطه‌ای α باید از عدد ۱ بزرگتر نباشد. از طرفی $f(\alpha) = 0$ است. پس می‌توان نوشت:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - a)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha - a)^2 = -1 \Rightarrow \alpha - a = -1$$

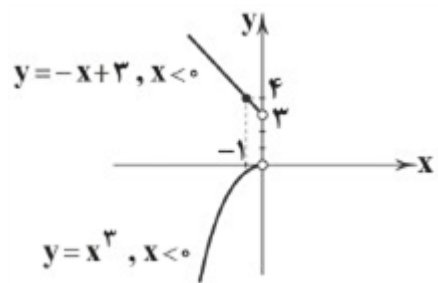
$$\Rightarrow \alpha = a - 1 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow a - 1 \leq 1 \Rightarrow a \leq 2$$



اگر به نمودارهای بالا توجه کنید، $x|x|$ صعودی اکید است (به جای آن می‌توان گفت صعودی)، ضمناً تابعی که صعودی باشد، یکنوا است. نمودارهای $x^2|x|$ ، $x^2 - 4x$ و $|x - 2|$ گاهی صعودی و گاهی نزولی‌اند و در نتیجه غیریکنوا هستند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ ، دو نقطه‌ی دلخواه مانند $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 3 & 4 \end{array}$ را در نظر می‌گیریم

(البته دقت کنید که $x = 0$ در دامنه قرار ندارد). $f(x) = x^2$ و $g(x) = -x + 3$ را در یک محور مختصات رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌کنید که دو تابع یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع f نزولی است و زیر رادیکال هم باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد، داریم:

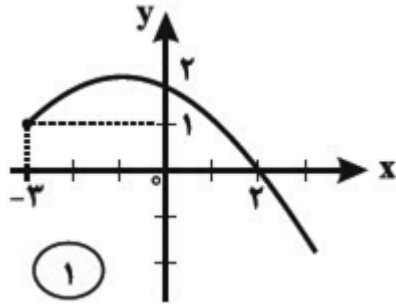
$$f(2) - f(|x-1|) \geq 0 \Rightarrow f(2) \geq f(|x-1|) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} 2 \leq |x-1|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4 \leq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

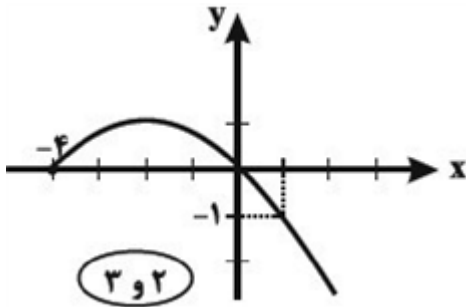
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱- اگر تابع $y = 3 - f(2-x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، تابع $y = 3 - f(2+x)$ بدست می‌آید.



۲- این تابع را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا $y = 3 - f(x+3)$ بدست آید.

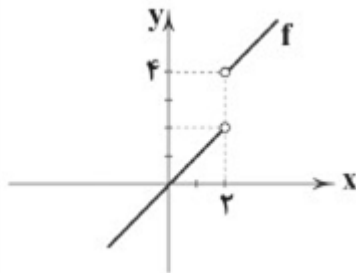
۳- سپس این تابع را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا $y = 2 - f(x+3)$ بدست آید.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع را برای دو حالت $x > 2$ و $x < 2$ بررسی می‌کنیم:

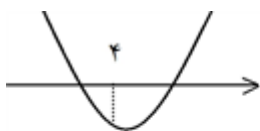
$$x > 2 \Rightarrow f(x) = x + 1 + \frac{x-2}{x-2} = x + 2$$

$$x < 2 \Rightarrow f(x) = x + 1 - \frac{x-2}{x-2} = x$$

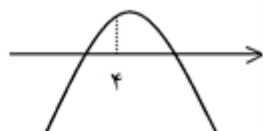


با توجه به نمودار، تابع f صعودی اکید است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



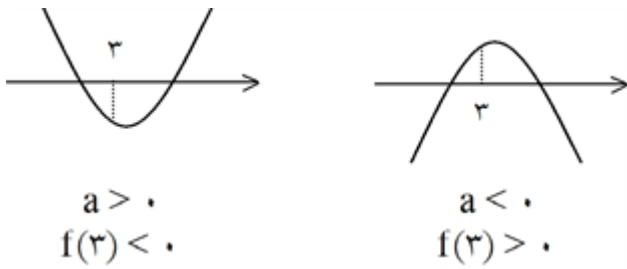
$$a > 0 \\ f(4) < 0$$



$$a < 0 \\ f(4) > 0$$

$$\Rightarrow a \times f(4) < 0$$

$$\Rightarrow mf(4) < 0 \Rightarrow m(16m + 4m + 20 - 10) < 0 \Rightarrow m(20m + 10) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$



$$\Rightarrow a \times f(3) < 0$$

$$\Rightarrow m(9m + 3m - 15 - 4) < 0 \Rightarrow m(12m - 19) < 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{19}{12}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید تابع $f(x)$ را کوچکتر از ۱۰ قرار دهیم. ۲۳

$$f(x) < 10 \Rightarrow \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{5}{4} < 10 \xrightarrow{\times 8} x^2 - x - 10 < 80 \Rightarrow x^2 - x - 90 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x + 9) < 0 \Rightarrow -9 < x < 10 \Rightarrow (-9, 10) \Rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow b - a = 10 + 9 = 19$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون $f(x)$ تابع ثابت برابر a است، بنابراین به ازای همه a می‌شود. یعنی: ۲۴

$$\begin{cases} f(2x) = a \\ f(x) = a \end{cases} \Rightarrow a \times a = 2a + a \Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(a - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ a = 3 & \text{ق ق ق} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۵

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(f(x)) = a(ax + b) + b = 4x + 15 \Rightarrow a^2x + ab + b$$

$$= 4x + 15 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ ab + b = 15 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow 2b = 15 \Rightarrow b = 7.5 \\ a = -2 \Rightarrow -2b = 15 \Rightarrow b = -7.5 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین $f(x) = 2x + 7.5$ یا $f(x) = -2x - 7.5$ می‌تواند باشد.

$$g \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow g(3) \times h(3) = 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$$

$$h \Rightarrow h(x) = k \Rightarrow f(x) + g(x) + h(x) = \begin{cases} 2x + 5 + x + 2 = 3x + 7 \\ -2x - 15 + x + 2 = -x - 13 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق فرض داریم: ۲۶

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 (*) \\ f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow{(*)} a + b = -1 \\ f(2) = 3 \Rightarrow 4a + 2b + c = 3 \xrightarrow{(*)} 4a + 2b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1 \end{cases}$$

اکنون با حل دستگاه $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$ خواهیم داشت $a = 2$ و $b = -3$ پس:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 9 + 1 = 14$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$P(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + 3 + 2 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$R = P(-2) = -32 - 8a + 6 + 2 = -56$$

۲۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مقسوم‌علیه مربع کامل است $(x-1)^2$ بنابراین $x=1$ عامل صفر مشتق مقسوم نیز می‌باشد.

$$\xrightarrow{\text{مشتق مقسوم}} 3ax^2 + 8x - 14 \xrightarrow{x=1} 3a + 8 - 14 = 0 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

۲۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم تابع برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ است، بنابراین:

$$-2 = -\frac{16 - 4(a)(a+1)}{4a} = 8a = 16 - 4a^2 - 4a \Rightarrow 4a^2 + 12a - 16 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -4$$

با توجه به این که نمودار f ماکزیمم دارد، باید ضریب x^2 در آن منفی باشد، در نتیجه $a = -4$ قابل قبول است و داریم:
 $f(x) = -4x^2 + 4x - 2 \Rightarrow f(-1) = -4 - 4 - 2 = -10$

۳۰

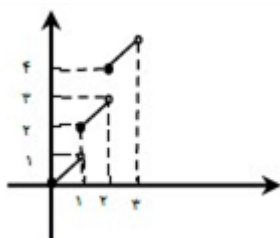
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی (x, y) را روی سهمی در نظر می‌گیریم، پس فاصله‌ی آن از $(0, 3)$ برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} d &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \\ y &= \frac{1}{4}x^2 - 2 \Rightarrow 4y = x^2 - 8 \Rightarrow x^2 = 4y + 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = \sqrt{4y + 8 + y^2 - 6y + 9}$$

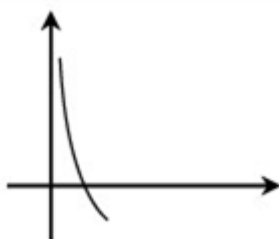
$$= \sqrt{y^2 - 2y + 17} \Rightarrow y = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \Rightarrow \min d = \sqrt{1 - 2 + 17} = 4$$

۳۱

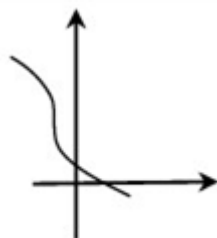
گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



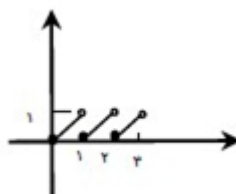
گزینه‌ی ۱: اکیداً صعودی



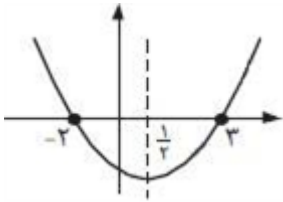
گزینه‌ی ۲: اکیداً نزولی



گزینه‌ی ۳: اکیداً نزولی



گزینه‌ی ۴: غیر یکنوا



$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

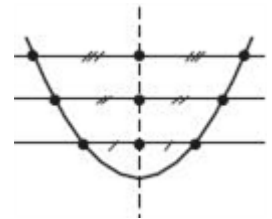
نکته: مکان هندسی وسط پاره‌خط‌های افقی قاطع

با سهمی همان محور تقارن سهمی است.

به شکل دقت کنید.

راه‌دوم: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن است، پس:

$$y = \frac{1}{2}(x+2)(x-3) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 6) \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 3 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{1}{2}}{2(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$$



$$y = x^2(x-1) + 2(x-1) = (x^2+2)(x-1) < 0 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در بعضی از مسائل با ظاهر پیچیده، می‌توان با صفر قرار دادن مقسوم‌علیه، آن را به

گونه‌ای به دو قسمت تفکیک کرد که به‌توان به جای یک قست آن در مقسوم، مساوی آن را قرار داد.

$$x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = x - 3 \quad *$$

$$P(x) = x^7 + (-x^2 + 9x^2 - 27x + 27)^5 + 1 = (x^2)^{15} - ((x-3)^2)^5 + 1 \\ = (x^2)^{15} - (x-3)^{10} + 1 \xrightarrow{*} R = (x-3)^{15} - (x-3)^{10} + 1$$

بنابراین $R = 1$

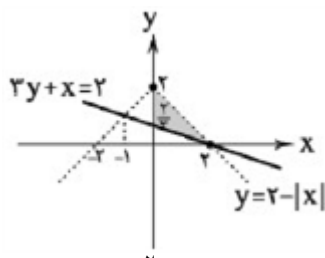
گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از تقسیم $x^2 + px + q$ بر $x^2 - 2ax + a^2$ به باقی‌مانده‌ی $(p+3a^2)x - 2a^2 + q$ خواهیم

رسید. حالا برای این‌که باقی‌مانده صفر شود، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} p+3a^2=0 \Rightarrow a^2=-\frac{p}{3} \quad (1) \\ -2a^2+q=0 \Rightarrow a^2=\frac{q}{2} \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} = \frac{\frac{q}{2}}{-\frac{p}{3}} \Rightarrow a = -\frac{3q}{2p}$$

۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودارهای $y = 2 - |x|$ و $3y + x = 2$ را در یک دستگاه رسم و محل تلاقی آن‌ها را مشخص می‌کنیم. با توجه به نمودار، در بازه‌ی $(-1, 2)$ نمودار $y = 2 - |x|$ بالاتر از نمودار $3y + x = 2$ قرار



می‌گیرد.

(مساحت مثلث با قاعده‌ی ۲ و ارتفاع $\frac{2}{3}$) - (مساحت مثلث با قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۲) = مساحت محدود به دو نمودار در

بازه‌ی $(0, 2)$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

۳۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow D_f = [-2, 6] \Rightarrow -2 \leq 2x + 1 \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

۳۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12$$

۳۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم f نزولی اکید است هرگاه به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنه‌ی f ، با شرط $x_1 < x_2$

داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$. بنابراین چون f اکید نزولی است، باید:

$$a^2 - 3 < 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Rightarrow (a + 1)(a - 3) < 0 \Rightarrow -1 < a < 3$$

۴۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 + x \quad | \quad 2x + 1 \\ \underline{-2x^3 \pm x^2} \\ -6x^2 + x \\ \underline{+6x^2 + 3x} \\ 4x \\ \underline{-4x \pm 2} \\ -2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x + 1 \\ x^2 - 3x + 2 \end{array} \right. \Rightarrow 1 + (-3) + 2 = 0$$

مجموع ضرایب خارج قسمت برابر است با: ۰

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

