



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

عنوان آزمون : بانک تست هندسه سال دهم

ریاضی (فصل ۴ تجسم فضایی)

۱ یک مخروط به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر را پر از آب می‌کنیم و آن را در استوانه با همان قاعده مخروط و ارتفاع ۶ سانتی‌متر خالی می‌کنیم. فاصله سطح آب تا بالای استوانه کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

۲ خط d موازی با صفحه P است. چند خط موازی با صفحه P می‌توان رسم کرد که خط d را قطع کند؟

نامتناهی (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۳ کدام گزاره همواره در فضا درست است؟

۱ از دو نقطه مفروض A و B فقط یک صفحه عمود بر صفحه مفروض P عبور می‌کند.

۲ اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را لزوماً قطع می‌کند.

۳ تنها یک صفحه عمود بر دو خط متنافر می‌توان رسم کرد.

۴ از یک نقطه بیرون دو صفحه متقاطع، بی‌شمار صفحه متقاطع با آن‌ها می‌توان رسم کرد.

۴ دو خط d و d' در صفحه P و نقطه A خارج این صفحه مفروض‌اند. چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطه A بگذرد و هر دو خط d و d' را قطع کند؟

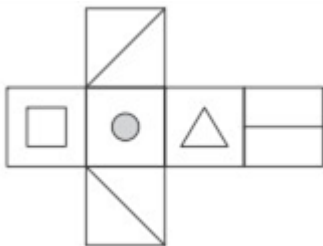
چنین خطی وجود ندارد (۴)

حداکثر یک خط (۳)

حداقل یک خط (۲)

همواره یک خط (۱)

۵ گسترده‌ی زیر مربوط به یک مکعب است. اگر نمای روبه‌روی آن  باشد، نمای راست آن کدام می‌تواند باشد؟



(۴)



(۳)

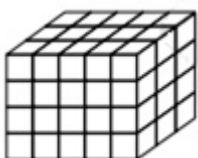


(۲)



(۱)

۶ مکعب مستطیل زیر از ۶۰ مکعب کوچک همنهشت تشکیل شده است. همه‌ی وجه‌های آن را رنگ‌آمیزی می‌کنیم. اگر m تعداد مکعب‌های کوچکی باشد که وجه رنگ شده ندارند و n تعداد مکعب‌های کوچکی باشد که در دو وجه رنگ شده دارند، آن‌گاه $2n - m$ برابر کدام است؟



۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۴۲ (۲)

۳۸ (۱)

۷) صفحه‌ای از محور یک مخروط قائم به ارتفاع ۳ می‌گذرد و مقطعش با مخروط، مثلی است که محیط آن ۱۰ می‌باشد. حجم مخروط کدام است؟

۲/۸۸π (۴)

۲/۵۶π (۳)

۱/۹۶π (۲)

۱/۴۴π (۱)

۸) دو کره به شعاع‌های ۳ و ۴ واحد که فاصله بین مرکزهای آنها ۵ واحد است، مفروض است. از مرکزهای دو کره به نقاط تلاقی دو کره وصل می‌کنیم، حجم جسم حاصل کدام است؟

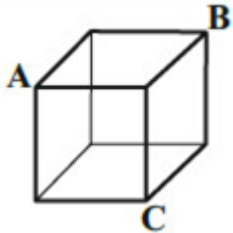
$\frac{44}{5}\pi$ (۴)

$\frac{48}{5}\pi$ (۳)

9π (۲)

$\frac{42}{5}\pi$ (۱)

۹) در مکعب شکل مقابل، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ی گذرنده از نقاط A، B و C با مکعب، چند برابر مساحت کل مکعب است؟



$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{12}$ (۱)

۱۰) نقطه‌ی A و خط d و صفحه‌ی P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطه‌ی A، موازی خط d و عمود بر صفحه P، در کدام حالت تعداد جواب‌ها بی‌شمار است؟

$d \perp P$ (۴)

$d \parallel P$ (۳)

$d \cap P \neq \emptyset$ (۲)

$d \cap P = d$ (۱)

۱۱) در یک مکعب صفحه‌ی گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. مساحت کل وجه‌های قطعه بزرگ‌تر چند برابر مساحت کل وجه‌های قطعه کوچک‌تر است؟

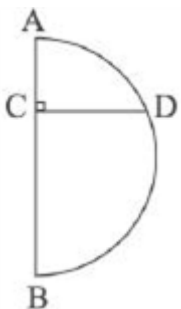
$\frac{11 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$ (۴)

$\frac{8 + \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۱۲) در شکل زیر $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ می‌باشد. نیم‌دایره را حول قطر AB دوران می‌دهیم، نسبت مساحت سطح ایجاد شده از دوران پاره‌خط CD حول قطر AB به مساحت رویه کره کدام است؟



۸/۵ (۴)

۱۶/۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

۱۳) اگر دو صفحه P و P' و نقطه A در فضا مفروض باشند به طوری که $P \cap P' = L$ و $A \notin P$ و $A \notin P'$ ، آن‌گاه تعداد صفحاتی که بر A بگذرند و با P و P' متقاطع باشند، کدام است؟

بی‌شمار (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۴ از نقطه A خارج دو خط متنافر L' و L'' ، چند صفحه موازی با آن دو می‌توان رسم کرد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) بی‌شمار (۴)

۱۵ در یک مکعب به مساحت کلی ۱۲ سانتی‌متر مربع، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال متنافر با آن گذشته است. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه با مکعب چه قدر است؟

- ۱ (۱) $2\sqrt{2}$ ۲ (۲) $2\sqrt{3}$ ۳ (۳) $\sqrt{5}$ ۴ (۴) $2\sqrt{5}$

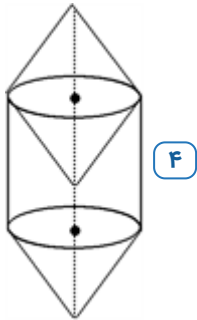
۱۶ دو صفحه‌ی P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه‌ی P عمود است. این خط نسبت به صفحه‌ی Q لزوماً چه وضعی دارد؟

- ۱ (۱) موازی ۲ (۲) متقاطع ۳ (۳) عمود ۴ (۴) نامشخص

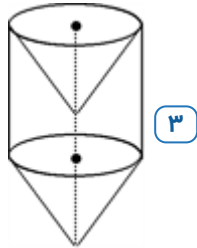
۱۷ فرض کنید ۲۵ تا مکعب واحد سفید و ۳۹ تا مکعب واحد مشکی داریم. می‌خواهیم توسط همه این مکعب‌های واحد، یک مکعب بزرگ بسازیم، در این صورت حداقل مساحت سطح سفید برابر است با:

- ۱ (۱) ۲۴ ۲ (۲) ۲۲ ۳ (۳) ۱۹ ۴ (۴) ۱۷

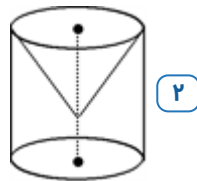
۱۸ از دوران متوازی‌الاضلاع ABCD حول ضلع بزرگ، کدام شکل می‌تواند حاصل شود؟



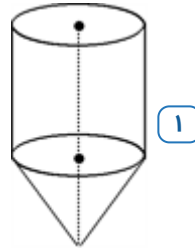
(۴)



(۳)



(۲)

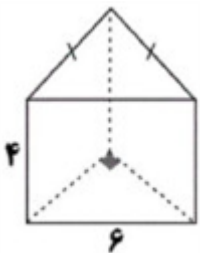


(۱)

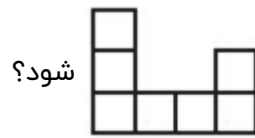
۱۹ کدام گزینه ممکن است درست نباشد؟

- ۱ (۱) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر تمام خطوط صفحه عمود است.
۲ (۲) اگر خطی بر دو صفحه عمود باشد، آن‌گاه دو صفحه موازی هستند.
۳ (۳) اگر دو خط بر یک خط عمود باشند، الزاماً موازی نیستند.
۴ (۴) اگر خطی بر یکی از خطوط صفحه عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

۲۰ در شکل زیر، مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶، یکی از وجه‌های منشوری است که قاعده‌های آن مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین هستند. مساحت سطح مقطع صفحه‌ی شامل رأس قائمه‌ی قاعده‌ی بالایی و وتر قاعده‌ی پایینی، با این منشور کدام است؟



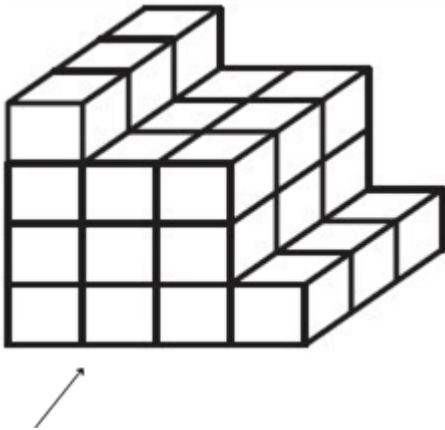
- ۱ (۱) ۱۲ ۲ (۲) ۱۳ ۳ (۳) ۱۴ ۴ (۴) ۱۵



شود؟

حداقل و حداکثر چند مکعب از شکل زیر برداریم تا نمای بالا به صورت

۲۱



۲۶ - ۱۲ (۴)

۲۴ - ۱۲ (۳)

۲۶ - ۱۳ (۲)

۲۴ - ۱۳ (۱)

در یک مکعب، صفحه‌ی گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه، کدام است؟

۲۲

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴)

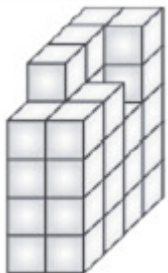
$\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

شکل زیر از مکعب‌هایی یکسان ساخته شده است. حداکثر چند مکعب را حذف کنیم تا نمای بالای شکل تغییر نکند؟

۲۳



۲۳ (۴)

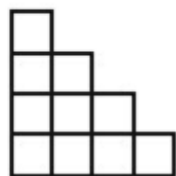
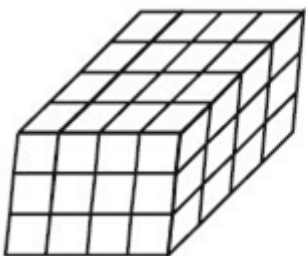
۲۷ (۳)

۲۸ (۲)

۲۴ (۱)

از مکعب مستطیل مفروض می‌خواهیم تعدادی مکعب کوچک حذف کنیم تا نمای بالای آن به صورت شکل زیر درآید، اگر حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که لازم است حذف شوند به ترتیب برابر m و M باشند، حاصل $M - m$ کدام است؟

۲۴



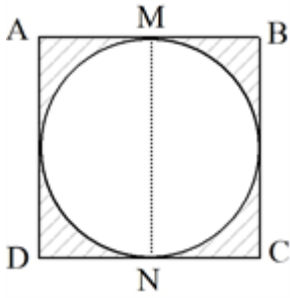
۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۳۸ (۲)

۱۲ (۱)

۲۵ در شکل روبه‌رو، مربع ABCD به طول ضلع ۴ را حول پاره خط MN دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل از دوران قسمت هاشورخورده برابر کدام است؟



۴ $\frac{16\pi}{3}$

۳ 16π

۲ $\frac{8\pi}{3}$

۱ 8π

۲۶ خط D بر دو صفحه‌ی متمایز P و P' عمود است و صفحه‌ی Q صفحه‌ی P را در خط Δ قطع می‌کند. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۲ Q موازی با P' است.

۱ Q عمود بر P' است.

۳ Q صفحه‌ی P' را در خطی عمود بر Δ قطع می‌کند.

۴ Q صفحه‌ی P' را در خطی موازی با Δ قطع می‌کند.

۲۷ دو خط d و l در فضا موازی‌اند. اگر خط d را حول l دوران دهیم، فصل مشترک یک صفحه مانند p که با d موازی باشد با سطح دوران یافته، چه شکل‌هایی می‌تواند باشد؟

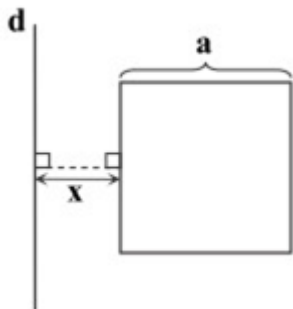
۲ دو خط موازی، یک صفحه

۱ تهی، یک خط، دو خط موازی

۴ یک خط، دو خط موازی، یک صفحه

۳ یک خط، یک صفحه، تهی

۲۸ مطابق شکل مقابل، مربعی به ضلع a را حول خط d دوران می‌دهیم. اگر $x = \frac{1}{4}a$ و حجم شکل حاصل از دوران برابر 54π باشد، محیط مربع کدام است؟



۴ ۱۶

۳ ۹

۲ ۱۲

۱ ۸

۲۹ از خط d چند صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی P می‌توان عبور داد؟

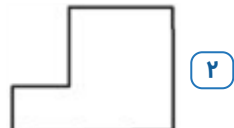
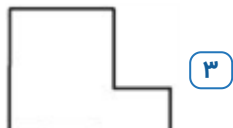
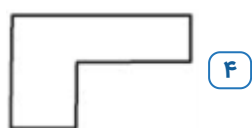
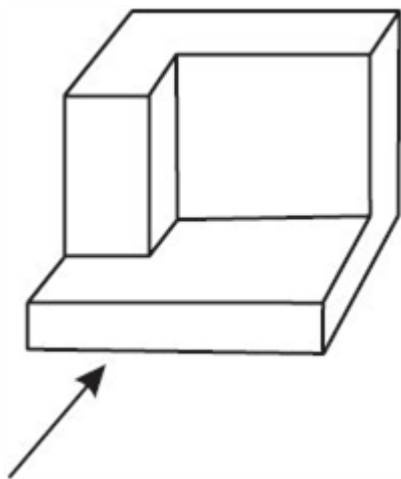
۴ یک یا بی‌شمار

۳ صفر یا بی‌شمار

۲ همواره بی‌شمار

۱ همواره یک

۳۰ کدام یک از تصاویر زیر مربوط به هیچ‌یک از نماهای شکل زیر نیست؟



۳۱

چه تعداد از موارد زیر، همواره درست است؟

- الف) اگر هر خط عمود بر یک صفحه، بر صفحه‌ی دیگر نیز عمود باشد، آن دو صفحه بر هم عمودند.
 ب) اگر یک خط واقع بر یک صفحه، بر فصل مشترک آن صفحه و صفحه‌ی دیگر، عمود باشد، آن دو صفحه بر هم عمودند.
 پ) اگر یک خط واقع بر یک صفحه، بر دو خط متقاطع از صفحه‌ی دیگر عمود باشد، آن دو صفحه بر هم عمودند.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱) صفر

۳۲

در برش یک مکعب با یک صفحه کدام سطح مقطع نمی‌تواند به‌وجود بیاید؟

۴ (۴) هشت‌ضلعی

۳ (۳) شش‌ضلعی

۲ (۲) پنج‌ضلعی

۱ (۱) دوزنقه

۳۳

صفحه‌ی P کره‌ای به مرکز O و به شعاع 17 را قطع کرده است. اگر فاصله‌ی صفحه‌ی P تا مرکز کره برابر 8 باشد، مساحت سطح مقطع چه قدر است؟

۴ (۴) 225π

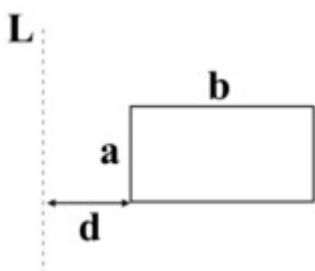
۳ (۳) 20π

۲ (۲) 264π

۱ (۱) 256π

۳۴

از دوران مستطیل زیر، حول خط L یک حجم ایجاد می‌شود. این حجم به چه شکل است؟



۴ (۴) یک مخروط

۳ (۳) یک کره‌ی توخالی

۲ (۲) یک استوانه‌ی توخالی

۱ (۱) یک کره

۳۵

D و D' دو خط موازی با صفحه‌ی P هستند. در این صورت

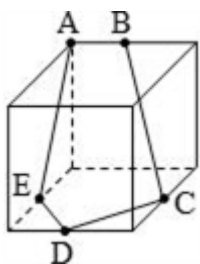
۲ (۲) D و D' متقاطع نباشند، موازی‌اند.

۱ (۱) D و D' موازی‌اند.

۴ (۴) D و D' می‌توانند موازی، متقاطع یا متناظر باشند.

۳ (۳) D و D' لزوماً متناظر یا متقاطع‌اند.

۳۶ در شکل مقابل نقاط B ، C ، D و E اوساط یال‌های مکعب به ضلع ۴ می‌باشند. حاصل $AE^2 + ED^2 + BC^2$ برابر کدام است؟



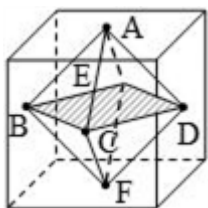
۴۸ (۴)

۵۲ (۳)

۵۶ (۲)

۴۴ (۱)

۳۷ مکعبی به ضلع $2\sqrt{3}$ مفروض است. اگر مرکز تقارن هر کدام از وجه‌های جانبی، رأس‌های یک هشت‌وجهی منتظم باشند، حجم این هشت‌وجهی منتظم کدام است؟



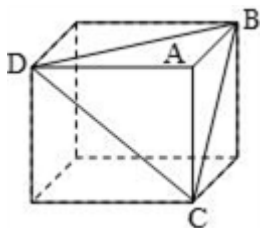
$12\sqrt{3}$ (۴)

$8\sqrt{3}$ (۳)

$6\sqrt{3}$ (۲)

$4\sqrt{3}$ (۱)

۳۸ در مکعب مقابل به ضلع a فاصله نقطه A از صفحه BCD چیست؟



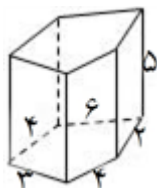
$\frac{a}{\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{a}{\sqrt{3}}$ (۳)

$\frac{a}{3}$ (۲)

$\frac{a}{2}$ (۱)

۳۹ مساحت جانبی منشور قائم مقابل کدام است؟



۹۵ (۴)

۲۴ (۳)

۷۵ (۲)

۶۰ (۱)

۴۰ درمکعب مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳ تا ارتفاع $2/5$ آب ریخته‌ایم و مکعب مستطیل بر روی کوچک‌ترین وجه قرار دارد. اگر سطحی از مکعب را که روی زمین قرار دارد، تغییر دهیم، ارتفاع آب کدام است؟

$\frac{5}{6}$ یا $\frac{5}{4}$ (۴)

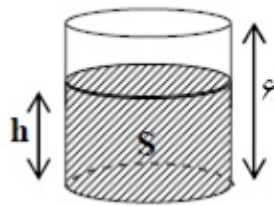
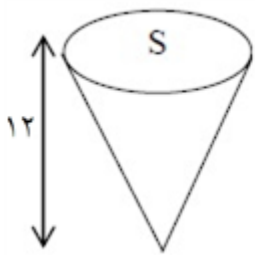
$\frac{5}{4}$ یا $\frac{5}{3}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ یا $\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر ارتفاع آب درون استوانه را h در نظر بگیریم، داریم:



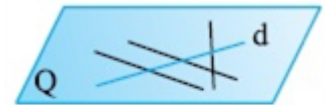
$V = \text{مخروط}$ استوانه به ارتفاع h

$$Sh = \frac{1}{3}S \times 12 \Rightarrow h = 4$$

$$2 = 6 - 4 = \text{فاصله سطح آب تا بالای استوانه}$$

۲) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از خط d صفحه Q را موازی صفحه P رسم می‌کنیم. در این صورت تمام خط‌هایی که در

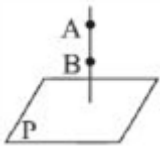
صفحه Q قرار دارند و خط d را قطع می‌کنند با صفحه P موازی هستند. بنابراین مسئله نامتناهی جواب دارد.



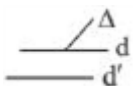
۳) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): نادرست، زیرا اگر خط گذرنده از دو نقطه A و B بر صفحه P عمود باشد، آن‌گاه از دو نقطه A و B بی‌شمار صفحه عمود بر P می‌گذرد.



گزینه (۲): نادرست، در فضا نادرست است. در شکل زیر $d \parallel d'$ و خط d را قطع کرده است ولی خط d' را قطع نمی‌کند.



گزینه (۳): نادرست، زیرا اگر صفحه‌ای عمود بر دو خط متنافر وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌دانیم دو خط عمود بر یک صفحه موازی هستند و این خلاف متنافر بودن دو خط است.

گزینه (۴): درست، زیرا از نقطه A بیرون دو صفحه متقاطع P و Q تنها یک خط مثل Δ موازی فصل مشترک دو صفحه P و Q یعنی خط d می‌توان رسم کرد و از Δ بی‌شمار صفحه عبور می‌کند که صفحات P و Q را قطع می‌کنند.



۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو خط که در یک صفحه قرار داشته باشند یا موازی هستند و یا متقاطع. اگر دو خط d و d' در نقطه B متقاطع باشند، آن گاه خط گذرنده از نقاط A و B ، هر دو خط d و d' را قطع می‌کند ولی در صورتی که دو خط d و d' موازی باشند، خطی وجود ندارد که هر دو خط d و d' را قطع کند، زیرا هر خط متقاطع با دو خط d و d' ، لزوماً در صفحه P قرار می‌گیرد و در نتیجه از A عبور نمی‌کند. بنابراین حداکثر یک خط با مشخصات موردنظر قابل رسم است.

۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها گزینه‌ی (۳) صحیح است.



توجه کنید که  و  مقابل هم قرار دارند و هیچ‌گاه نمی‌تواند در نمای راست آن واقع گردد و وجه

هم در نمای راست به صورت  قرار می‌گیرد.

۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر از هر وجه این مکعب مستطیل یک لایه حذف کنیم آن گاه مکعب‌های باقی‌مانده دارای وجه رنگ شده نخواهند بود.

$$m = (3-2)(5-2)(4-2) = 6 = \text{تعداد مکعب‌های کوچک رنگ نشده}$$

و مکعب‌های کوچکی که دارای دو وجه رنگ شده هستند روی یال‌های مکعب مستطیل داده شده هستند البته مکعب‌های دو سر هر یال را نباید حساب کنیم چرا که آن‌ها دارای سه وجه رنگ شده می‌باشند.

$$n = 4(4-2) + 4(5-2) + 4(3-2) = 24 = \text{تعداد مکعب‌های کوچک دارای دو وجه رنگ شده}$$

بنابراین:

$$2n - m = 2(24) - 6 = 42$$

۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مقطع صفحه‌ای که از محور مخروط قائم می‌گذرد، یک مثلث متساوی‌الساقین است

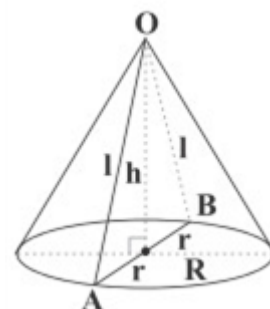
(OAB). بنا به فرض محیط مثلث برابر ۱۰ است. پس $1 + 2r = 10$ و داریم:

$$\begin{cases} l + r = 5 \\ l^2 = r^2 + h^2 \end{cases} \xrightarrow{h=2} \begin{cases} l = 5 - r \\ l^2 = r^2 + 9 \end{cases}$$

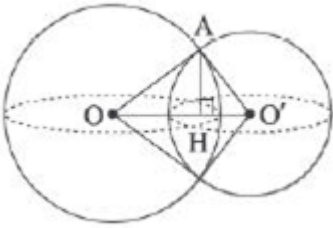
$$\Rightarrow (5-r)^2 = r^2 + 9 \Rightarrow 25 - 10r + r^2 = r^2 + 9$$

$$\Rightarrow 10r = 16 \Rightarrow r = 1/6$$

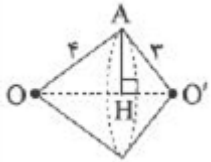
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi (1/6)^2 \times 2 = 2/56\pi$$



نقاط برخورد دو کره، یک دایره است و اگر از O و O' به پیرامون این دایره وصل کنیم، دو مخروط با قاعده مشترک ایجاد می‌شود. (شکل را ببینید.)



مثلث AOO' قائم‌الزاویه است زیرا $5^2 = 3^2 + 4^2$ ، حال با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

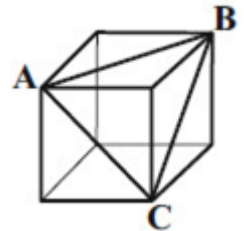


$$AH \times OO' = OA \times O'A \Rightarrow AH \times 5 = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\text{حجم دو مخروط} = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times OH + \frac{1}{3}\pi AH^2 \times O'H = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times OO' = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times 5 = \frac{48}{5}\pi$$

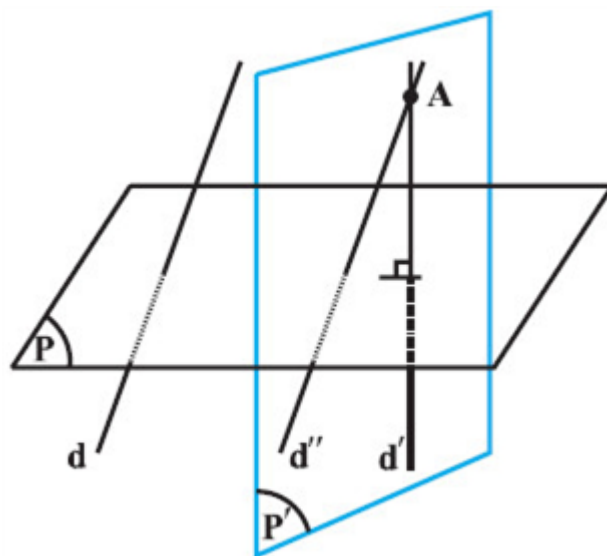
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل پاره‌خط‌های AB ، AC و BC ، هر سه قطر وجه‌های مکعب هستند، پس طول آن‌ها برابر یکدیگر است و در نتیجه مثلث ABC (سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ی گذرنده از A ، B و C با مکعب)، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است که طول هر ضلع آن برابر طول قطر وجه مکعب است. اگر طول هر یال این مکعب را با a ، مساحت کل مکعب را با S و مساحت مثلث ABC را با S' نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(a\sqrt{2})^2}{6a^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{24}$$



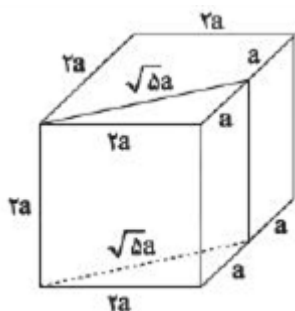
۱۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از نقطه‌ی A ، خط d' را عمود بر صفحه‌ی P و خط d'' را موازی خط d رسم می‌کنیم. هر صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی P و گذرنده از نقطه‌ی A ، شامل خط d' و هر صفحه‌ی موازی با خط d و گذرنده از نقطه‌ی A ، شامل خط d'' می‌باشد، بنابراین اگر صفحه‌ی گذرنده از d' و d'' را P' بنامیم، این صفحه‌ی گذرنده از A ، بر صفحه‌ی P عمود بوده و با خط d موازی است. حال تنها در صورتی که d' و d'' بر هم منطبق باشند، بی‌شمار صفحه شامل d' و d'' می‌توان رسم کرد. این حالت وقتی که $d \perp P$ باشد، اتفاق می‌افتد. در حالت‌های دیگر خطوط d' و d'' بر هم منطبق نیستند و در هر کدام از آن‌ها تنها یک صفحه عمود بر صفحه‌ی P و موازی خط d می‌توان رسم کرد.



۱۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای حل ساده‌تر، ضلع مکعب را $2a$ در نظر می‌گیریم، پس از برش، مکعب به دو منشور با قاعده‌های مثلث و دوزنقه تقسیم می‌شود. مساحت کل یک منشور برابر است با محیط قاعده ضرب در ارتفاع به علاوه دو برابر مساحت قاعده آن. در این صورت با توجه به شکل داریم:



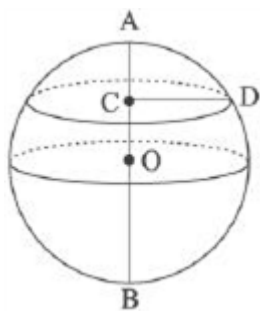
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\text{مساحت کل دوزنقه} \times 2a + 2S_{\text{دوزنقه}}}{\text{مساحت کل مثلث} \times 2a + 2S_{\text{مثلث}}} = \frac{(5a + \sqrt{2}a)2a + 2 \times \frac{1}{2} \times (a + 2a) \times 2a}{(3a + \sqrt{2}a)2a + 2 \times \frac{1}{2} \times 2a \times a}$$

$$\frac{\text{مساحت کل قطعه بزرگتر}}{\text{مساحت کل قطعه کوچکتر}} = \frac{(10 + 2\sqrt{2} + 6)a^2}{(6 + 2\sqrt{2} + 2)a^2} = \frac{16 + 2\sqrt{2}}{8 + 2\sqrt{2}} = \frac{8 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}$$

۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شکل حاصل از دوران حول قطر AB یک کره است که $OA = OB = OD = R$ و نقطه O مرکز کره است.



می‌دانیم مساحت رویه کره برابر $4\pi R^2$ است.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \xrightarrow{AB=R} AC = \frac{1}{2}R$$

$$\Rightarrow OC = OA - AC = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$$

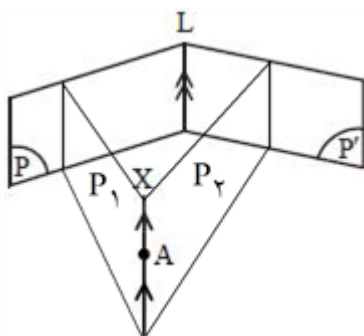
$$\triangle OCD (\hat{C} = 90^\circ) : CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

مساحت ایجاد شده از دوران پاره خط CD حول قطر AB برابر است با:

$$\pi CD^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}\pi R^2 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{16}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به روش رسم شکل به شرح زیر داریم:

۱۳

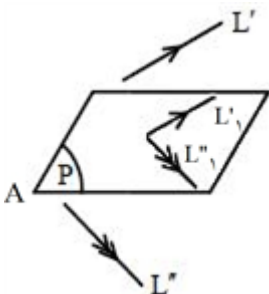


اکنون از A خط AX را موازی L رسم می‌کنیم. از این خط بی‌شمار صفحه مانند $P_1, P_2, \dots, P_n$ می‌گذرد که دو صفحه P و P' را قطع می‌کند.

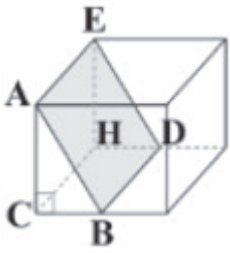
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از نقطه A دو خط یک موازی L' و دیگری موازی L'' رسم می‌کنیم به نام‌های L'_1 و L''_1 از این

۱۴

دو خط فقط یک صفحه مانند P می‌گذرد که همان جواب مسئله است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل زیر را خواهیم داشت.



$$S_{\text{مکعب}} = 6a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

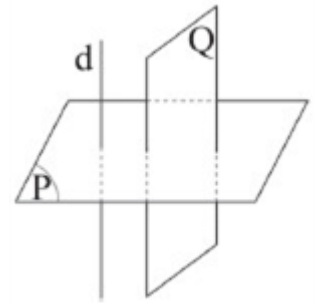
$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle ACB : AB^2 = AC^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت مستطیل ABDE} = \text{مساحت مقطع حاصل} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$

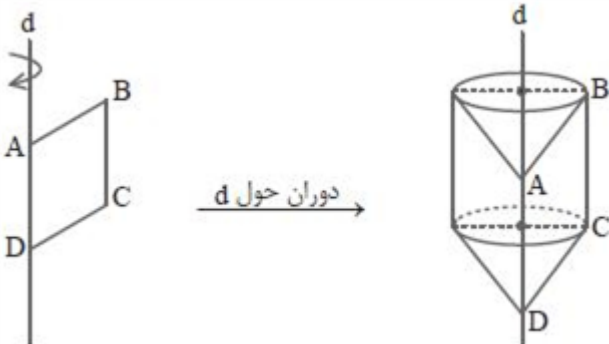
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون صفحه‌ی Q و خط d بر صفحه‌ی P عمودند، لذا صفحه Q و خط d مطابق شکل با هم موازی می‌باشند یا خط d بر Q واقع می‌شود.



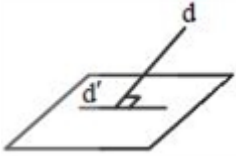
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کلاً $25 + 39 = 64$ مکعب داریم. چون $4 \times 4 \times 4 = 64$ ، پس مکعبی داریم که همه ابعاد آن ۴ واحد است. برای حداقل شدن سطح سفید، همه مکعب‌هایی که هیچ وجه آن‌ها قابل مشاهده نیست را سفید می‌گذاریم که این تعداد برابر است با: $(4-2)(4-2)(4-2) = 8$ یعنی ۸ مکعب سفید در مرکز مکعب $4 \times 4 \times 4$ قرار می‌گیرد و دیده نمی‌شود. حال $25 - 8 = 17$ مکعب سفید می‌ماند. چون قرار است که مساحت سطح سفید حداقل شود، سطوحی که تنها یک وجه آن‌ها قابل مشاهده است را سفید قرار می‌دهیم که تعداد این مکعب‌ها برابر است با: $24 = 6 \times 2 \times 2$ ، پس ۲۴ تا مکعب که فقط یک وجه آن‌ها قابل مشاهده می‌باشد. ۱۷ را انتخاب کرده و سفید می‌کنیم که این یعنی حداقل مساحت سفید، ۱۷ می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۱۹

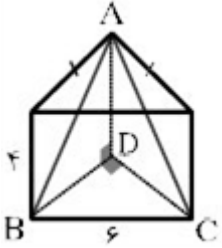
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر خطی بر یک خط صفحه عمود باشد، ممکن است بر کل صفحه عمود نباشد و ممکن است حتی داخل صفحه منطبق باشد.



شرط لازم و کافی برای آن که خطی بر صفحه‌ای عمود باشد آن است که بر دو خط متقاطع صفحه عمود باشد.

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از آنجا که مثلث DBC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به طول وتر ۶ است، داریم:

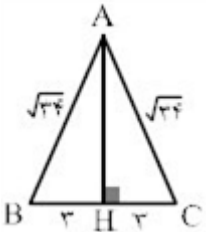


$$BD^2 + CD^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

در مثلث ABD بنا به قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 = 16 + 18 = 34 \Rightarrow AB = \sqrt{34}$$

برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC، طول ارتفاع وارد بر BC را حساب می‌کنیم.



$$\triangle ABH \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{34 - 9} = 5$$

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید حداقل ۱۳ مکعب و حداکثر ۲۶ مکعب



برای این که نمای بالا به صورت

۲۱

برداشته شود.

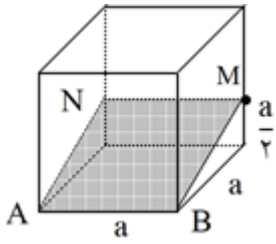
از نمای بالای اولیه مکعب‌هایی که ضربدر خورده‌اند باید تا پایین همگی حذف شوند تا حداقل مکعب‌های برداشته شده به دست آید و از کل مکعب‌ها فقط یکی در هر خانه سفید باقی بماند تا حداکثر مکعب‌های برداشته شده به دست آید.

نمای بالای اولیه

	x	x	x
	x	x	

۲۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مکعب مقابل صفحه‌ی گذرا بر یال AB و نقطه‌ی M وسط یال دیگر مکعب رسم شده است. اگر طول ضلع مکعب a باشد آن‌گاه داریم:



$$\begin{aligned} \text{حجم منشور (قسمت کوچکتر)} &= Sh = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4} \\ \text{حجم قسمت بزرگتر} &= \text{حجم مکعب} - \text{حجم منشور} = a^3 - \frac{a^3}{4} = \frac{3a^3}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{حجم قسمت کوچکتر}}{\text{حجم قسمت بزرگتر}} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^3}{4}} = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

۲۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر همه‌ی مکعب‌ها به غیر از مکعب‌های ردیف اول (از پایین) حذف شوند، نمای بالا ثابت می‌ماند. در ردیف‌های دوم و سوم ۸ مکعب، در ردیف چهارم ۷ مکعب و در ردیف پنجم ۴ مکعب قرار گرفته است، پس اگر حداکثر ۲۷ (۲۷ = ۸ + ۸ + ۷ + ۴ = ۲۷) مکعب را حذف کنیم نمای بالای جسم تغییر نمی‌کند.

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر وجه بالایی مکعب مستطیل را به‌صورت زیر دسته‌بندی کنیم، واضح است که همه‌ی مکعب‌های خانه‌های b و مکعب‌های زیر آنها یعنی ۱۸ = ۳ × ۶ مکعب باید حذف شوند. بنابراین کم‌ترین مقدار برابر ۱۸ = m است.

a_1	b_1	b_2	b_3
a_2	a_3	b_4	b_5
a_4	a_5	a_6	b_6
a_7	a_8	a_9	a_{10}

از طرفی حداقل تعداد مکعب‌های لازم در شکل برابر ۱۰ است (تعداد خانه‌های a در نمای بالا)، بنابراین حداکثر می‌توان $M = 48 - 10 = 38$ مکعب را از شکل حذف نمود. در نتیجه $38 - 18 = 20 = M - m$ است.

۲۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مربع MNd_2 یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۴ ایجاد می‌شود و از دوران دایره حول MN یک کره به شعاع ۲ به دست می‌آید. توجه کنید که:

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$$

حجم خواسته شده محدوده‌ی بین این استوانه و کره است.

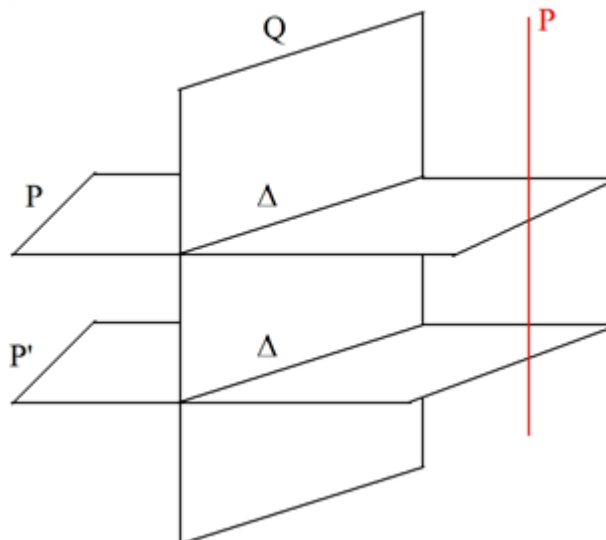
$$\text{حجم کره} - \text{حجم استوانه} = \text{حجم خواسته شده} = \frac{16\pi}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم.

چون دو صفحه‌ی P و P' بر خط d عمود هستند پس با هم موازی‌اند ($P \parallel P'$).

هم‌چنین می‌دانیم، اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه‌ی موازی را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترک آن‌ها موازی‌اند. بنابراین چون صفحه‌ی Q صفحه‌ی P را قطع کرده، صفحه‌ی P' را هم قطع می‌کند و دو خط Δ و Δ' با هم موازی هستند.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر خط d را حول a دوران دهیم یک سطح استوانه‌ای شکل ایجاد می‌شود. صفحه‌ای که

موازی p باشد نسبت به سطح استوانه‌ای سه حالت زیر را دارد:

الف) اگر فاصله‌ی صفحه‌ی p از خط a کمتر از فاصله‌ی d و a باشد، فصل مشترک، دو خط موازی خواهد بود.

ب) اگر فاصله‌ی p از خط a دقیقاً برابر فاصله‌ی دو خط d و a باشد، آن‌گاه p بر سطح استوانه‌ای شکل مماس شده و فصل مشترک، یک خط خواهد بود.

ج) اگر فاصله‌ی p از خط a بیش‌تر از فاصله‌ی d و a باشد، فصل مشترک ندارند و مکان تهی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر با $V = \pi r^2 h$ است.

شکل حاصل از دوران مربع حول خط d ، فضای بین دو استوانه به ارتفاع a و شعاع‌های قاعده‌ی x و $a+x$ است. پس داریم:

$$r_1 = a + x: \text{شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ}$$

$$r_2 = x: \text{شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی کوچک}$$

$$h = a: \text{ارتفاع هر دو استوانه}$$

$$V_1 = \pi r_1^2 h = \pi(a+x)^2 a: \text{حجم استوانه‌ی بزرگ}$$

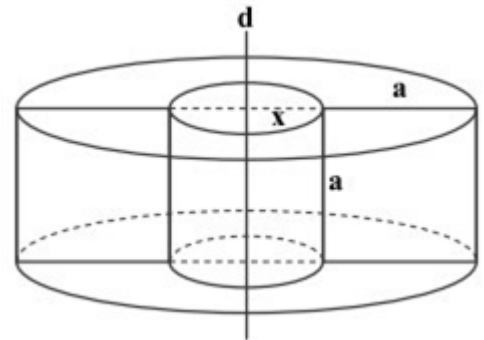
$$V_2 = \pi r_2^2 h = \pi x^2 a: \text{حجم استوانه‌ی کوچک}$$

$$(V = V_1 - V_2 = \pi(a+x)^2 a - \pi x^2 a = \pi a(a+x)^2 - x^2)$$

$$= \pi a(a^2 + x^2 + 2ax - x^2) = \pi a(a^2 + 2ax)$$

$$= \pi a^{(a+2x)} \stackrel{x=a}{=} \pi a^{(a+a)} \Rightarrow V = \pi a^2 \times 2a = 2\pi a^3$$

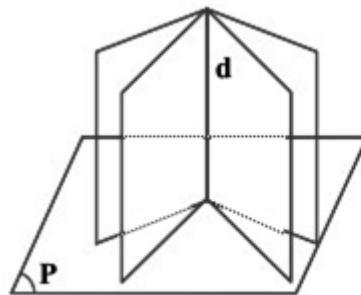
$$\xrightarrow{V=2\pi a^3} 2\pi a^3 = 2\pi \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$



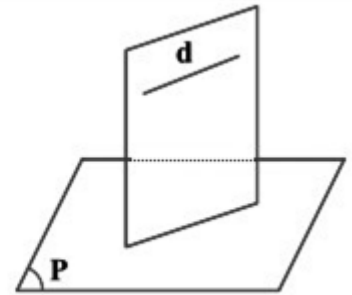
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر خط d بر صفحه‌ی P عمود باشد، بی‌شمار از D می‌گذرد که همگی بر صفحه‌ی P عمودند.

نکته: اگر خط d بر صفحه‌ی P عمود نباشد (موازی یا متقاطع غیرعمود)، آنگاه تنها یک صفحه‌ی عمود بر P از d می‌گذرد.



d عمود بر P



d غیر عمود بر P

با توجه به نکات بالا، بر اساس وضعیت خط d و صفحه‌ی P ، می‌توان یک یا بی‌شمار صفحه‌ی عمود بر P از d عبور داد.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تصاویر گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب نمای شکل داده شده از بالا، سمت راست و سمت چپ هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مورد «پ» صحیح است، زیرا اگر یک خط بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد، قطعاً بر آن صفحه عمود است. حال اگر صفحه‌ای شامل خطی عمود بر صفحه‌ای دیگر باشد، بر آن صفحه عمود است.

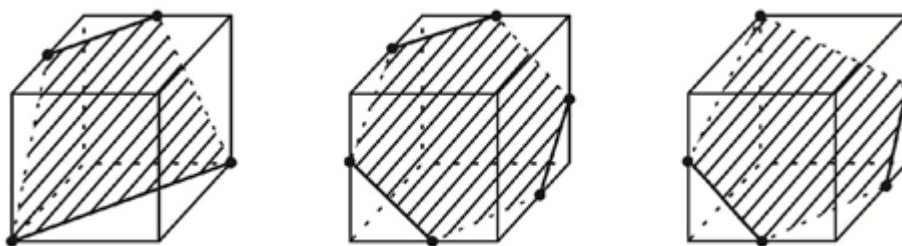
(الف) دو صفحه عمود بر یک خط باهم موازی هستند.

(ب) اگر خطی بر یک خط صفحه عمود باشد، لزومی ندارد بر آن صفحه عمود باشد.

۳۲

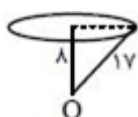
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مکعب یک شش وجهی است. پس حداکثر تعداد برخورد صفحه قاطع با وجوه، ۶ است.



۳۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

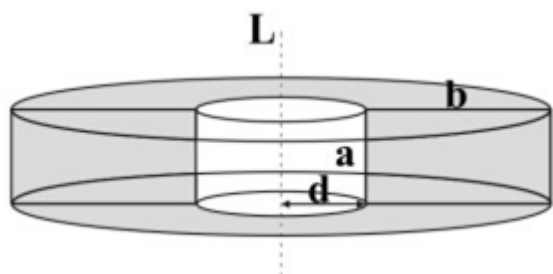


$$r^2 + h^2 = 17^2 \Rightarrow r^2 = 289 - 64 = 225$$

$$S = \pi r^2 = 225\pi$$

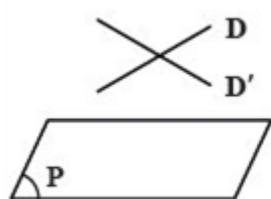
۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از دوران مستطیل موجود، یک استوانه‌ی توخالی به دست می‌آید که قسمت خالی نیز خود یک استوانه است.

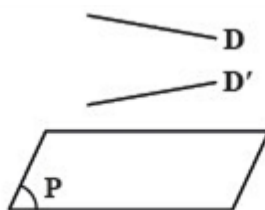


۳۵

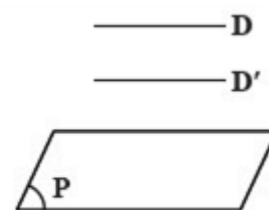
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو خط موازی با یک صفحه، هر وضعیتی می‌توانند داشته باشند (مطابق شکل زیر).



مقاطع



متناظر



موازی

۳۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

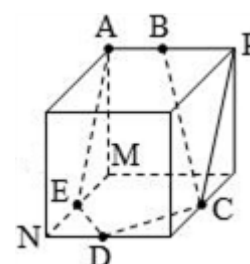
$$AE^2 = AM^2 + ME^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$ED^2 = NE^2 + ND^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

با توجه به شکل $PC = AE = \sqrt{20}$ ، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BPC داریم:

$$BC^2 = PC^2 + BP^2 = 20 + 2^2 = 24$$

$$AE^2 + ED^2 + BC^2 = 20 + 8 + 24 = 52$$



۳۷

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. کافی است حجم هرم ABCDE را به دست آورده دو برابر کنیم. ارتفاع این هرم نصف ضلع مکعب برابر $\sqrt{3}$ می‌باشد. از طرفی قطر BD از قاعده‌ی مربع BCDE برابر یال مکعب یعنی $2\sqrt{3}$ می‌باشد، پس ضلع $BC = \sqrt{6}$ است.

$$\text{حجم هرم ABCDE} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (\sqrt{6})^2 (\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{حجم هشت وجهی} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

۳۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر مثلث ADC را قاعده‌ی هرم در نظر بگیریم آنگاه $AB = a$ ارتفاع هرم خواهد بود.

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times a \times \frac{a^2}{2} = \frac{1}{6} a^3$$

حالا اگر مثلث BDC را قاعده‌ی هرم در نظر بگیریم باید حجم بدست آمده با حجم هرم با این قاعده برابر باشد. در این حالت مثلث متساوی‌الاضلاع BDC با ضلع $a\sqrt{2}$ قاعده است.

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times h \times \frac{2\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h$$

$$\text{حجم‌های بدست آمده از دو طریق با هم برابرند.} \Rightarrow \frac{1}{6} a^3 = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

۳۹

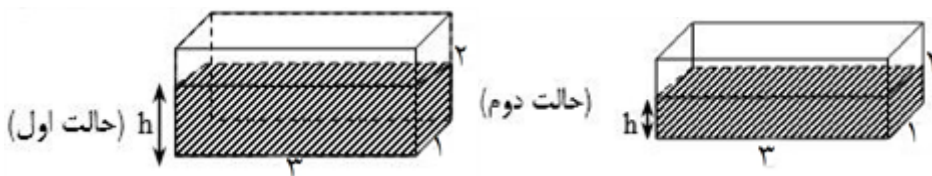
گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مساحت جانبی منشور قائم برابر است با حاصلضرب محیط قاعده در ارتفاع.

$$S_{\text{جانبی}} = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = (2 + 4 + 3 + 4 + 6) \times 5 = 95$$

۴۰

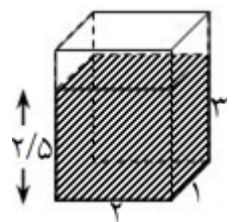
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنید مکعب مستطیل به صورت مقابل بوده و تا ارتفاع $2/5$ در آن آب ریخته باشیم

و در وضعیت متفاوت به صورت‌های زیر می‌توانیم داشته باشیم که در آن حالت‌ها می‌باید اندازه‌ی حجم برابر $5 = 2 \times 1 \times 2/5$ باشد.



$$\text{حجم مکعب مستطیل که با آب موجود می‌آید} = 5 \Rightarrow 1 \times 2 \times h = 5 \Rightarrow h = \frac{5}{2}$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل که با آب موجود می‌آید} = 5 \Rightarrow 2 \times 1 \times h = 5 \Rightarrow h = \frac{5}{2}$$



1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

