



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

عنوان آزمون : بانک تست هندسه سال دهم

ریاضی (فصل ۳ چند ضلعی ها)

۱ اگر وسط ضلع‌های چهارضلعی ABCD با $AB = 9$ ، $BC = 7$ و $CD = 2$ را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک مستطیل به دست می‌آید؛ طول ضلع AD کدام است؟

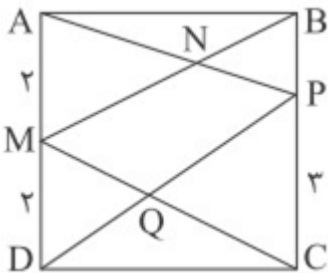
۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۲ در شکل زیر، چهارضلعی ABCD مربع است. مساحت چهارضلعی MNPQ کدام است؟



$\frac{56}{15}$ (۴)

۸ (۳)

$\frac{112}{15}$ (۲)

۴ (۱)

۳ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع چه نوع چهارضلعی ایجاد می‌شود؟

مستطیل (۴)

لوزی (۳)

مربع (۲)

متوازی‌الاضلاع (۱)

۴ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد مربع است. حداکثر تعداد نقاط مرزی این چندضلعی کدام است؟

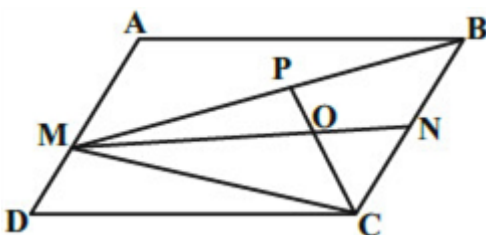
۱۲ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۵ در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. اگر نقاط N و P به ترتیب وسط BC و BM بوده و مساحت مثلث ONC برابر ۳ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟



۴۸ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

۶ کدامیک از چهارضلعی‌های زیر، الزاماً دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است؟

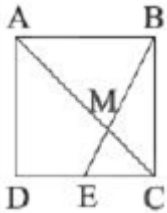
۱ چهارضلعی‌ای که قطرهای آن برابر یکدیگر و نیمساز زاویه‌ها هستند.

۲ چهارضلعی‌ای که دو ضلع مقابل برابر و دو قطر برابر دارد.

۳ چهارضلعی‌ای که زاویه‌های مقابل آن مکمل یکدیگرند و دو قطر برابر دارد.

۴ چهارضلعی‌ای که فقط دو ضلع مقابل موازی دارد و قطرهای آن برابر یکدیگرند.

۷ در شکل زیر ABCD مربع است و $DE = CE$. فاصله نقطه C از پاره خط BE چند برابر CM است؟



۱ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۸ در یک چندضلعی محدب، مجموع تعداد قطرهای و ضلعها برابر ۶۶ است. در این چندضلعی از سه رأس مجاور چند قطر می‌گذرد؟

۵۳ (۴)

۵۴ (۳)

۲۶ (۲)

۲۷ (۱)

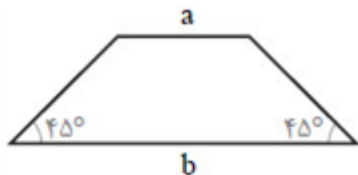
۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $\hat{ACB} = 30^\circ$ میانه AM را رسم می‌کنیم. سپس از M در مثلث AMC ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می‌نماییم و پای ارتفاع را H می‌نامیم. از H به موازات وتر رسم می‌نماییم تا AM را در N قطع کند. طول عمود NK وارد بر ضلع AC چه کسری از وتر است؟

۱ (۴)

۱ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)



۱۰ مساحت دوزنقه‌ی مقابل برابر کدام است؟

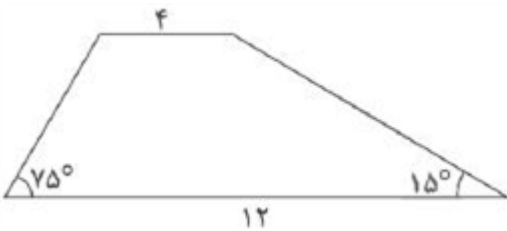
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱ مساحت دوزنقه شکل مقابل برابر کدام است؟



۱۸ (۴)

۲۴ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)

۱۲ در مستطیلی به اندازه اضلاع ۴ و ۹، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳/۵ (۲)

۱۲/۵ (۱)

۱۳ در لوزی ABCD، نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم و روی آن پاره خط AK برابر با KD جدا می‌کنیم. اگر بدانیم O محل برخورد دو قطر لوزی است و $\frac{AK}{KO} = 2$ ، اندازه زاویه A چه قدر است؟

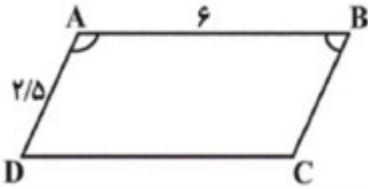
۷۵° (۴)

۶۰° (۳)

۴۵° (۲)

۳۰° (۱)

۱۴) متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل زیر مفروض است. کدام گزینه درباره‌ی محل برخورد نیمسازهای زوایای A و B درست است؟

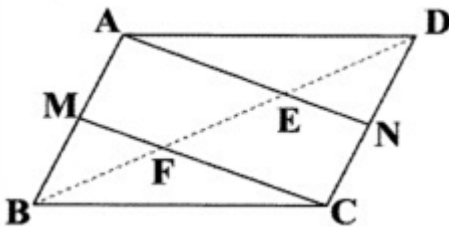


- ۱) داخل متوازی‌الاضلاع
۲) روی ضلع CD
۳) خارج متوازی‌الاضلاع
۴) هر سه حالت امکان‌پذیر است.

۱۵) قطر یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر ساق عمود است و با قاعده‌ی بزرگ‌تر زاویه‌ی α می‌سازد. بزرگ‌ترین زاویه‌ی این دوزنقه کدام است؟

- ۱) $180^\circ - 2\alpha$
۲) 2α
۳) $90^\circ - \alpha$
۴) $90^\circ + \alpha$

۱۶) در شکل زیر M و N وسط اضلاع AB و CD از متوازی‌الاضلاع ABCD قرار دارند. کدام گزینه صحیح نیست؟



- ۱) $AN = MC$
۲) $\frac{S_{\triangle DEN}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{1}{9}$
۳) $AE = FC = \frac{2}{3}AN$
۴) $\frac{S_{\triangle END}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{1}{2}$

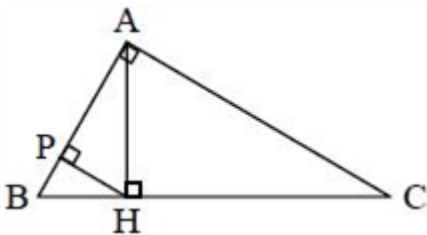
۱۷) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر با $4\sqrt{3}$ واحد مربع است. اگر M نقطه‌ای درون مثلث باشد، مجموع فاصله‌های M از سه ضلع مثلث کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۴) ۴

۱۸) در یک دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه، کدام است؟

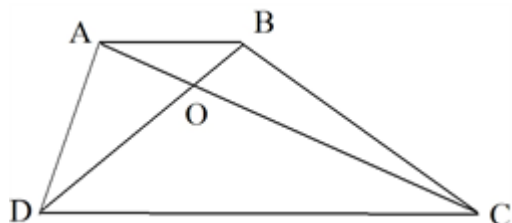
- ۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{1}{5}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{2}{5}$

۱۹) در شکل زیر طول وتر ۱۳ واحد و دو قطعه‌ای که توسط ارتفاع وارد بر وتر روی وتر جدا می‌کند به نسبت ۴ به ۹ است. طول BP چه قدر است؟



- ۱) $\frac{36}{\sqrt{117}}$
۲) $\frac{81}{\sqrt{117}}$
۳) $\frac{36}{\sqrt{52}}$
۴) $\frac{16}{\sqrt{52}}$

۲۰ در دوزنقه‌ی ABCD در شکل مقابل، اگر $DC = ۲AB = ۶$ و $S_{OAB} = ۵$ ، مساحت دوزنقه برابر کدام است؟



۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۳۰ (۲)

۴۵ (۱)

۲۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه $۲\sqrt{۳}$ و ۲ مجموع مربعات سه میانه چه قدر است؟

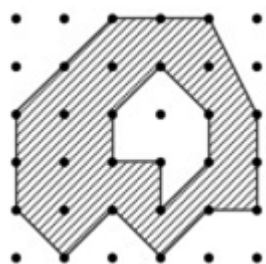
۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۸ (۱)

۲۲ با توجه به مساحت چندضلعی شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده کدام است؟



۱۳/۵ (۴)

۱۳ (۳)

۱۵/۵ (۲)

۱۶ (۱)

۲۳ در یک لوزی به ضلع $a = \frac{۵}{\sqrt{۲}}$ و مساحت $S = ۱۰$ ، نسبت طول دو قطر کدام است؟

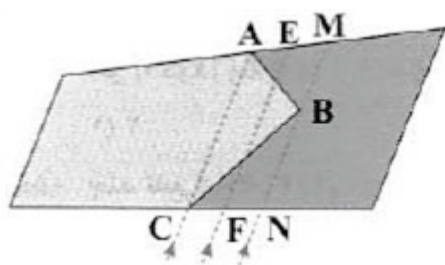
۲ (۴)

۴ (۳)

$\sqrt{۲}$ (۲)

$\frac{۳}{۲}$ (۱)

۲۴ دو واحد آپارتمان در کنار هم طبق شکل زیر جدا شده‌اند. مالکان این دو واحد تصمیم دارند طی یک بازسازی مرز بین دو واحد را به صورت یک خط راست تبدیل کنند به طوری که متراژ زیربنای دو آپارتمان تغییری نکند. طبق شکل زیر، این مرز کدام گزینه می‌تواند باشد؟



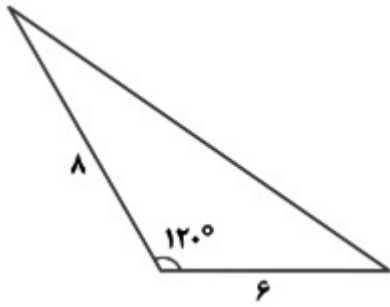
AF (۴)

MF (۳)

AN (۲)

EF (۱)

۲۵ مساحت مثلث مقابل چقدر است؟



۱۶ (۴)

$8\sqrt{3}$ (۳)

۱۲ (۲)

$12\sqrt{3}$ (۱)

۲۶ در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم ۶ و ۸، فاصله نقطه تلاقی سه میانه از بزرگ‌ترین ضلع چقدر است؟

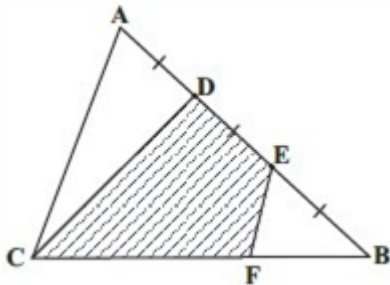
۱/۸ (۴)

۲/۲ (۳)

۲ (۲)

۱/۶ (۱)

۲۷ در شکل مقابل $AD = DE = EB$ و $CF = 2BF$ است. اگر مساحت مثلث ABC ، ۱۴۴ واحد مربع باشد، مساحت چهارضلعی $DEFC$ کدام است؟



۸۴ (۴)

۸۰ (۳)

۷۶ (۲)

۷۲ (۱)

۲۸ در یک دوزنقهی قائم‌الزاویه، مجموع دو ساق از مجموع دو قائده، ۱۴ واحد بیشتر است. اگر طول قاعده‌ی کوچک ۳ و طول ساق کوچک آن ۱۲ باشد، طول قاعده‌ی بزرگ دوزنقه کدام است؟

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

۲۹ اندازه‌ی ضلع‌های یک مستطیل x و $3x$ هستند. اندازه‌ی مساحت چهارضلعی‌ای که از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی این مستطیل به‌دست می‌آید، کدام است؟

x^2 (۴)

$2x^2$ (۳)

$\sqrt{3}x^2$ (۲)

$\sqrt{5}x^2$ (۱)

۳۰ از برخورد نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع کدام چهارضلعی ایجاد می‌شود؟

مستطیل (۲)

لوزی (۱)

چهارضلعی غیر مشخص (۴)

دوزنقه (۳)

۳۱ دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ دارای زاویه‌ی 135° است. اگر طول قاعده‌ها به ترتیب ۱ و ۵ واحد باشند، مساحت دوزنقه کدام است؟

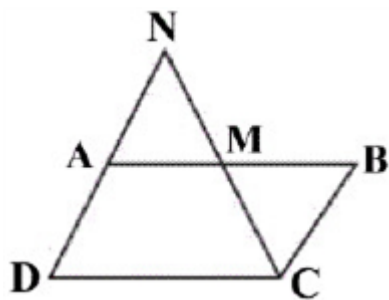
۳ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)

۳۲ در شکل زیر چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع و نقطه‌ی M وسط ضلع AB است. در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟



$S_{ABCD} = S_{AMN}$ (۴)

$S_{AMCD} = S_{ANM}$ (۳)

$S_{ABCD} = S_{NDC}$ (۲)

$S_{AMCD} = S_{MBC}$ (۱)

۳۳ کدام گزینه، تعریف صحیحی از متوازی الاضلاع نیست؟

(۱) یک چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند.

(۲) یک چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن، متوازی و متساوی باشند.

(۳) یک چهارضلعی که هر قطر آن، چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند.

(۴) یک چهارضلعی که زوایای مقابل آن، دو به دو مکمل یکدیگر باشند.

۳۴ در دوزنقه‌ی متساوی الساقین ABCD اگر ساق AD برابر قاعده‌ی AB و قطر AC برابر قاعده‌ی DC زاویه‌ی D برحسب درجه کدام است؟

۷۲ (۴)

۶۰ (۳)

۵۴ (۲)

۳۶ (۱)

۳۵ یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع به طول ۴ واحد، قطر یک مربع است. کوتاه‌ترین فاصله رأس دیگر مستطیل از ضلع این مثلث، کدام است؟

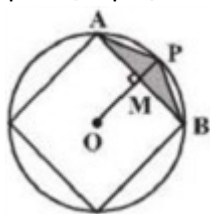
۱ (۴)

$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{3} - 1$ (۲)

$2 - \sqrt{3}$ (۱)

۳۶ مطابق شکل مربعی درون یک دایره به مرکز O و شعاع ۲ واحد محاط شده است. از O عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم



تا آن‌را در M و دایره را در P قطع کند. مساحت مثلث APB چند واحد مربع است؟

$4\sqrt{2} - 2$ (۴)

$2 - \sqrt{2}$ (۳)

$2(\sqrt{2} - 1)$ (۲)

$2(2 - \sqrt{2})$ (۱)

۳۷ در متوازی الاضلاع ABCD، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی A و B در O متقاطع‌اند. BO را امتداد می‌دهیم تا امتداد AD را در E قطع کند. اگر $BC = \frac{2}{3} AB = 6$ ، آن‌گاه محیط متوازی الاضلاعی که AB و AE دو ضلع آن هستند، کدام است؟

۴۲ (۴)

۳۶ (۳)

۴۰ (۲)

۳۴ (۱)

۳۸ دوزنقه‌ی ABCD قائم‌الزاویه است. $BC = CD$ و $\hat{C} = 60^\circ$ است. اگر ارتفاع این دوزنقه $5\sqrt{3}$ باشد. مساحت این دوزنقه چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

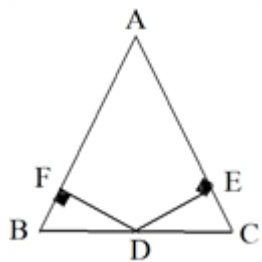
۷۵ (۴)

$37/5$ (۳)

۴۰ (۲)

$32/5$ (۱)

۳۹ مثلث ABC متساوی الساقین است. اگر مساحت مثلث ۲۴ و طول ضلع AB برابر ۸ باشد، حاصل $DE + DF$ کدام است؟



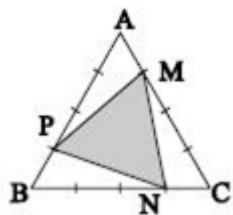
۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۴۰ هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است و مطابق شکل مثلث MNP درون آن قرار گرفته است. مساحت MNP چه کسری از مساحت ABC است؟



$\frac{7}{16}$ (۴)

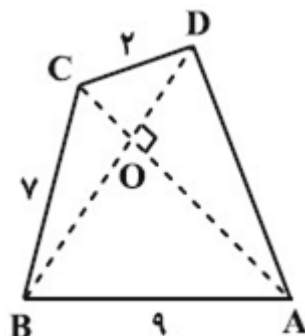
$\frac{5}{16}$ (۳)

$\frac{9}{16}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر در یک چهارضلعی قطرها بر هم عمود باشند آنگاه چهارضلعی حاصل از به هم وصل کردن (متوالی) وسطهای اضلاع در آن چهارضلعی، یک مستطیل خواهد بود (و برعکس). در چهارضلعی ABCD مطابق شکل، قطرهای AC و BD بر هم عمودند. اگر O محل برخورد قطرها باشد با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلثهای قائم‌الزاویه داریم:



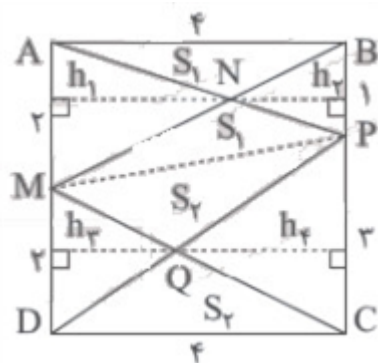
$$\left. \begin{aligned} AO + BO &= 8 + 4 \\ CO + DO &= 6 + 9 \\ BO + CO &= 4 + 6 \\ AO + DO &= 8 + 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AO + BO = CO + DO$$

$$\Rightarrow 8 + 4 = 6 + AD \Rightarrow AD = 6$$

۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلثهای AMN و BNP متشابه‌اند، پس:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{AM}{BP} = \frac{2}{3} \\ h_1 + h_2 &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_1 = \frac{8}{5}, h_2 = \frac{4}{5}$$



همچنین مثلثهای MDQ و PQC نیز متشابه‌اند، پس:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_3}{h_4} &= \frac{MD}{PC} = \frac{2}{3} \\ h_3 + h_4 &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_3 = \frac{8}{5}, h_4 = \frac{4}{5}$$

می‌دانیم در دوزنقه‌ی ABPM، مساحت مثلثهای ABN و MNP برابر است که آن را S_1 می‌نامیم.

همچنین در دوزنقه‌ی CDMP، مساحت مثلثهای CDQ و MPQ برابر است، که آنرا S_2 می‌نامیم. بنابراین داریم:

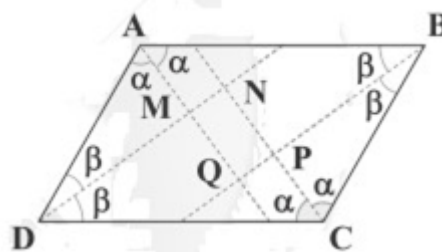
$$2(S_1 + S_2) = S_{ABCD} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle BPN} - S_{\triangle MDQ} - S_{\triangle PCQ}$$

$$= 4^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5} \right) (2) - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right) (1) - \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5} \right) (2) - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right) (3) = \frac{112}{5}$$

$$S_{MNPQ} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{112}{5} \right) = \frac{56}{5}$$

۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} : \widehat{M} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\widehat{N} = \widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$$

به طور مشابه:

پس چهارضلعی حاصل یا مربع یا مستطیل است. از طرفی داریم:

$$PN = NC - PC = ND \tan \beta - PB \tan \beta = (ND - PB) \tan \beta$$

$$\stackrel{PB=DM}{=} MN \tan \beta = PQ \tan \beta$$

$$PN = PQ \tan \beta \xrightarrow{\beta \neq 45^\circ} PN \neq PQ$$

بنابراین چهارضلعی حاصل لزوماً مربع نیست و مستطیل است.

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر تعداد نقاط مرزی برابر b و تعداد نقاط درونی برابر i فرض شود، آنگاه مساحت

$$\text{چندضلعی شبکه‌ای برابر } S = \frac{b}{2} + i - 1 \text{ است.}$$

با توجه به آن که حداقل تعداد نقاط درونی برابر صفر است، داریم:

$$3 = \frac{b}{2} + 0 - 1 \Rightarrow \frac{b}{2} = 4 \Rightarrow b_{\max} = 8$$

۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. MN و CP میانه‌های نظیر اضلاع BC و BM در مثلث MBC هستند و در نتیجه O نقطه‌ی

برخورد میانه‌ها در این مثلث است، پس داریم:

$$S_{\triangle ONC} = \frac{1}{6} S_{\triangle MBC} \Rightarrow 3 = \frac{1}{6} S_{\triangle MBC} \Rightarrow S_{\triangle MBC} = 18$$

مثلث MBC و متوازی‌الاضلاع ABCD در قاعده‌ی BC مشترک هستند و طول ارتفاع وارد بر این قاعده در آن‌ها یکسان

$$S_{ABCD} = 2S_{MBC} = 2 \times 18 = 36$$

است، بنابراین داریم:

۶

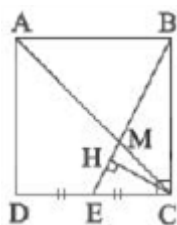
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی‌ای که فقط دو ضلع مقابل موازی دارد، لزوماً دوزنقه است و در صورتی که قطرهای

آن برابر یک‌دیگر باشند، قطعاً دوزنقه متساوی‌الساقین است. چهارضلعی گزینه‌ی ۱ مربع است و در گزینه‌های ۲ و ۳،

مستطیل نیز از ویژگی‌های مشابه برخوردار است.

۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مربع زوایا قائمه، اضلاع با هم برابر و قطر $\sqrt{2}$ برابر ضلع است.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle CEM$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{CE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow CM = \frac{1}{\sqrt{2}} AC \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{2}}{2} CD$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث BCE داریم:

$$BC^2 + CE^2 = BE^2 \xrightarrow[CE = \frac{CD}{\sqrt{2}}]{BC = CD} CD^2 + \frac{CD^2}{2} = BE^2 \Rightarrow BE = \frac{\sqrt{5}}{2} CD$$

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} CH \times BE = \frac{1}{2} BC \times CE \Rightarrow CH \times \frac{\sqrt{5}}{2} CD = CD \times \frac{CD}{\sqrt{2}} \Rightarrow CH = \frac{CD}{\sqrt{5}}$$

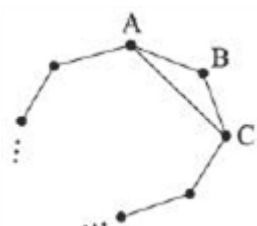
$$\frac{CH}{CM} = \frac{\frac{CD}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{2}}{2} CD} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\frac{n(n-3)}{2}}_{\text{تعداد قطر ها}} + \underbrace{n}_{\text{تعداد اضلاع}} = 66 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 66 \Rightarrow n(n-1) = 132 \Rightarrow n = 12$$

از هر رأس A، B و C، $n-3$ قطر رسم می‌شود، ولی قطر AC دوبار حساب می‌شود، پس:

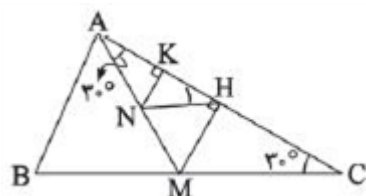


$$3(n-3) - 1 = 3 \times 9 - 1 = 26$$

۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شکل مسأله را بنابر گفته سؤال رسم می‌کنیم. می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:



$$\triangle ABC : AM = \frac{1}{2} BC \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} AM = MC = \frac{BC}{2} &\Rightarrow \widehat{MAC} = 30^\circ \\ NH \parallel BC \text{ و } AC \text{ مورب و } H_1 = 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow AN = NH$$

یعنی NH میانه وارد بر AM در مثلث $\triangle AMH$ است پس:

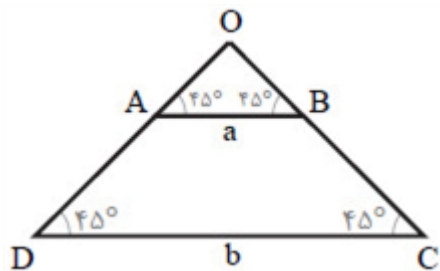
$$AN = NH = \frac{AM}{2} \quad (2)$$

$$\triangle ANK (K = 90^\circ) : \widehat{NAK} = 30^\circ \Rightarrow NK = \frac{1}{2} AN$$

$$(1), (2) \Rightarrow NK = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} AM \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BC \right) \right) = \frac{1}{8} BC$$

۱۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ساق‌های دوزنقه را امتداد دهیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند آن‌گاه مثلث‌های OAB و OCD قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین هستند پس:



$$OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \times OB \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right) = \frac{a^2}{4}$$

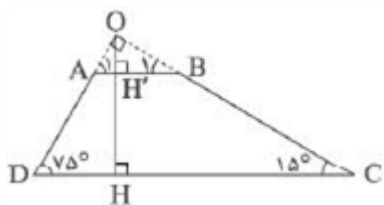
$$OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2}b \Rightarrow S_{OCD} = \frac{1}{2}OD \times OC = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}b \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}b \right) = \frac{b^2}{4}$$

$$S_{ABCD} = S_{ODC} - S_{OAB} = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 - a^2}{4} \quad \text{پس:}$$

۱۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ساق‌های دوزنقه را امتداد می‌دهیم تا یک‌دیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند، در این‌صورت $\widehat{O} = 90^\circ$ می‌باشد. اگر ارتفاع OH را بر DC وارد کنیم، آن‌گاه OH بر AB نیز عمود است، داریم:



$$\left. \begin{aligned} \triangle OAB : \widehat{B} &= 45^\circ \Rightarrow OH' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(4) = 1 \\ \triangle ODC : \widehat{C} &= 45^\circ \Rightarrow OH = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(12) = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow HH' = OH - OH' = 6 - 1 = 5$$

بنابراین:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}HH'(AB + DC) = \frac{1}{2}(5)(4 + 12) = 40$$

دقت کنید در مثلث قائم‌الزاویه که زاویه‌ی 45° دارد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{2}$ وتر است.

۱۲

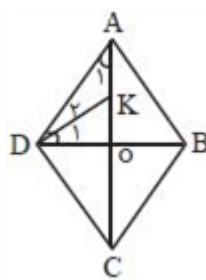
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مستطیلی به ابعاد a و b، از محل تلاقی نیمسازهای داخلی آن یک مربع ایجاد می‌شود که

هر ضلع آن برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)$ است، پس:

$$S = \frac{1}{2}(a - b)^2 = \frac{1}{2}(9 - 4)^2 = \frac{25}{2} = 12.5$$

۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در هر لوزی قطرهای نیمساز زاویه‌ها هستند. اگر فرض کنیم: $\widehat{A}_1 = \alpha$ باشد داریم:



$$\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 90^\circ - \alpha$$

از طرفی با توجه به این‌که $AK = DK$ است، $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_2$ ، بنابراین:

$$\widehat{D}_1 = 90^\circ - 2\alpha$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه DKO داریم:

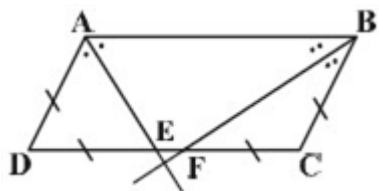
$$\frac{OK}{DK} = \frac{OK}{AK} = \frac{1}{2}$$

چون ضلع روبه‌روی زاویه 30° نصف وتر است، بنابراین زاویه $\widehat{D}_1$ برابر 30° است.

$$\widehat{D}_1 = 90^\circ - 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه‌ی A را رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در نقطه‌ی E قطع کند.



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC \text{ و } AE \text{ مورب} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{AED} \\ \widehat{DAE} = \widehat{EAB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DAE}$$

$$\Rightarrow \triangle ADE \text{ متساوی الساقین } \widehat{ADE} = AD = DE = 2/5$$

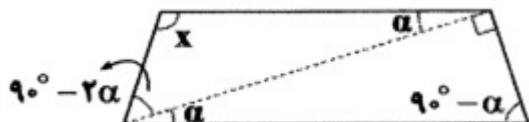
نیمساز زاویه‌ی B را رسم می‌کنیم تا ضلع DC را در نقطه‌ی F قطع کند. به طریق مشابه می‌توان نشان داد

$$CF + DE = 5 < DC = 6 \quad BC = CF = 2/5 \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

بنابراین نیمسازهای زاویه‌ی A و B، یک‌دیگر را در خارج متوازی‌الاضلاع قطع می‌کنند.

۱۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه‌ی خطوط موازی و مورب و مطابق شکل داریم:



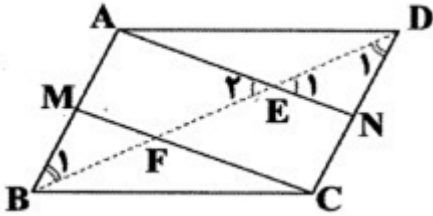
$$x = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\begin{cases} BM = DN = \frac{1}{2} AB \\ AD = BC \Rightarrow \triangle AND \cong \triangle MBC \Rightarrow AN = MC \\ \widehat{D} = \widehat{B} \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:



$$\begin{cases} \widehat{D} = \widehat{B} \\ \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \text{ (متقابل به راس)} \end{cases}$$

$$\triangle DNE \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{ED}{BE} = \frac{EN}{AE} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle DNE}}{S_{\triangle AEB}} = \frac{1}{4}$$

بنابراین:

بنابراین گزینه‌ی (۲) نادرست است.

$$AE = 2EN \Rightarrow \begin{cases} \frac{AE}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow AE = FC = \frac{2}{3} AN \\ \frac{S_{\triangle END}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{EN}{AE} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

توجه کنید که دو مثلث ADE و END، هم‌ارتفاع بوده و نسبت مساحت‌ها برابر با نسبت قاعده‌ها می‌باشد. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نیز، درست می‌باشند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با:

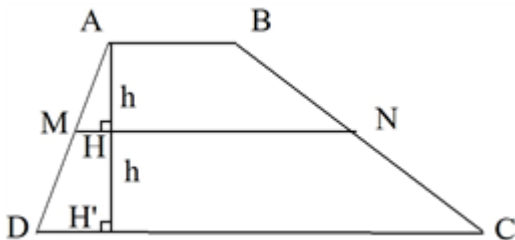
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه‌ی درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع، برابر با ارتفاع مثلث (h) است:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند مساوی نصف مجموع دو قاعده است. در صورتی که M و N وسط‌های دو ساق دوزنقه‌ی ABCD باشند پس $MN = \frac{AB + DC}{2}$ است.

در ضمن بنابر قضیه‌ی تالس اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه $AH = HH' = h$. حال بنابر فرض می‌نویسیم.



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNC D}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} h (AB + MN)}{\frac{1}{2} h (MN + DC)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB + MN}{MN + DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN + DC = 2AB + 2MN$$

$$\Rightarrow DC - 2AB = MN \Rightarrow DC - 2AB = \frac{AB + DC}{2} \Rightarrow 2DC - 4AB = AB + DC$$

$$\Rightarrow DC = 5AB \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{BH}{HC} = \frac{4}{9} \Rightarrow BH = 4x, HC = 9x \Rightarrow 4x + 9x = 13 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} BH = 4 \\ CH = 9 \end{cases}$$

$$\triangle ABC : AH^2 = BH \times CH = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC: $AB = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{95}$ و همچنین:

$$BH^2 = BP \cdot AB \Rightarrow 16 = BP \cdot \sqrt{95} \Rightarrow BP = \frac{16}{\sqrt{95}}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم در دوزنقه‌ی ABCD شکل مقابل همواره $S_{OBC} = S_{OAD} = \sqrt{S_{OAB} \times S_{ODC}}$

از طرف دیگر بنابر قضیه‌ی اساسی تشابه داریم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle ODC \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{ODC}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

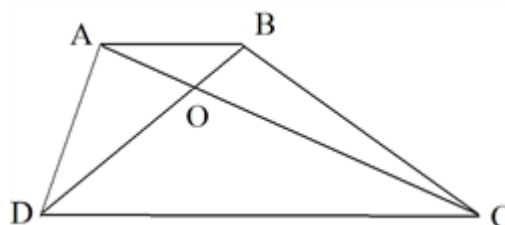
$$\Rightarrow \frac{5}{S_{ODC}} = \left(\frac{3}{6}\right)^2 \Rightarrow S_{ODC} = 20$$

$$S_{OBC} = S_{OAD} = \sqrt{20 \times 5} = 10$$

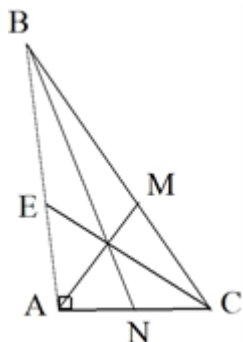
بنابراین:

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{ODC} + S_{OAD} \Rightarrow S_{ABCD} = 5 + 10 + 20 + 10 = 45$$

در نتیجه:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است. اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC پاره‌خط‌های AM و BN و CE میانه باشند، آن‌گاه از قضیه‌ی فیثاغورس نتیجه می‌شود.



$$\triangle ABN : BN^2 = AB^2 + AN^2 \xrightarrow{AN = \frac{AC}{2}} BN^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4}$$

$$\triangle ACE : CE^2 = AC^2 + AE^2 \xrightarrow{AE = \frac{AB}{2}} CE^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

از طرف دیگر $AM = \frac{BC}{2}$ پس $AM^2 = \frac{BC^2}{4}$. بنابراین مجموع مربعات سه میانه برابر است با:

$$AM^2 + BN^2 + CE^2 = \frac{BC^2}{4} + AB^2 + \frac{AC^2}{4} + AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

چون $AB^2 + AC^2 = BC^2$ پس:

$$\text{مجموع مربعات سه میانه} = \frac{BC^2}{4} + BC^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{3}{2}BC^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 \Rightarrow BC = 4$$

از طرف دیگر:

$$\frac{3}{2}(16) = 24 \text{ بنابراین مجموع مربعات سه میانه مساوی } 24.$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعات میانه‌ها مساوی $\frac{3}{2}$ مربع وتر است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: مساحت هر چند ضلعی شبکه‌ای برابر $i - 1 + \frac{b}{2}$ است که در آن b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چند ضلعی است.

با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$\text{چندضلعی شبکه‌ای بزرگ} : \begin{cases} b = 14 \\ i = 13 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \frac{14}{2} + 13 - 1 = 19$$

$$\text{چندضلعی شبکه‌ای کوچک} : \begin{cases} b = 7 \\ i = 1 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{7}{2} + 1 - 1 = 3/2$$

بنابراین مساحت قسمت سایه‌زده برابر است با:

$$S = S_1 - S_2 = 19 - 3/2 = 15/2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{h_1 \times h_2}{2} = 10 \Rightarrow h_1 h_2 = 20$$

$$\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \text{از طرفی داریم:}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1^2 + h_2^2}{4} = \frac{50}{4} \Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = 50$$

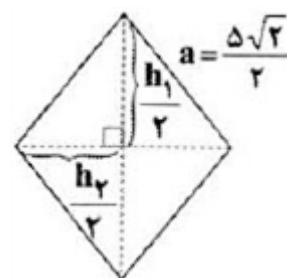
بنابراین داریم:

$$\left(\frac{20}{h_2}\right)^2 + h_2^2 = 50 \Rightarrow \frac{400}{h_2^2} + h_2^2 = 50 \xrightarrow{\times h_2^2} 400 + h_2^4 = 50 h_2^2 \xrightarrow{h_2^2 = t}$$

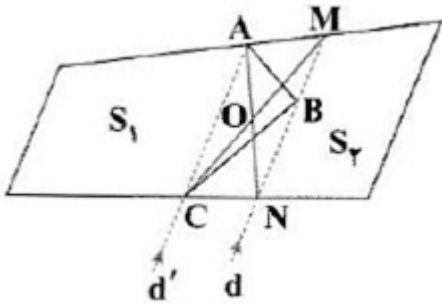
$$t^2 - 50t + 400 = 0 \Rightarrow (t - 10)(t - 40) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 10 \Rightarrow h_2^2 = 10 \Rightarrow h_2 = \sqrt{10} \Rightarrow h_1 = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \\ t = 40 \Rightarrow h_2^2 = 40 \Rightarrow h_2 = \sqrt{40} \Rightarrow h_1 = \frac{20}{\sqrt{40}} = \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{h_1 > h_2} \frac{h_1}{h_2} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از نقطه‌ی B خط d را موازی خط گذرا از AC رسم می‌کنیم.



$$d \parallel d' \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ANC}$$

AN می‌تواند مرز موردنظر باشد. $S_1 + S_{\triangle ABC} = S_1 + S_{\triangle ANC} \Rightarrow$ متراژ اول

به طور مشابه $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMC}$ و در نتیجه MC نیز می‌تواند مرز موردنظر باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

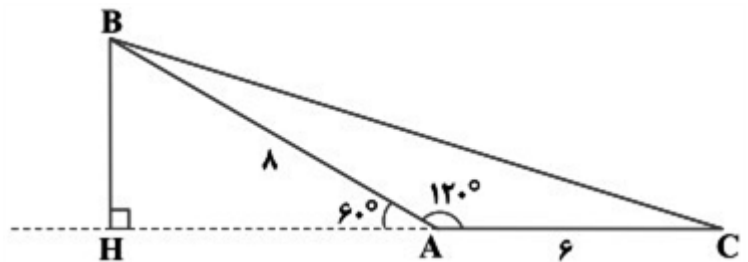
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، اندازه ضلع روبه‌رو زاویه 30° ، نصف اندازه وتر و اندازه ضلع روبه‌رو به زاویه 60° ، اندازه وتر است.

ابتدا با استفاده از نکته بالا، اندازه ارتفاع BH را محاسبه می‌کنیم:

$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$$

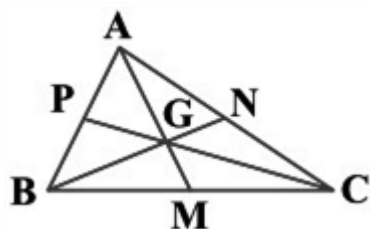
اکنون مساحت مثلث را به دست آوریم:

$$S = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}$$

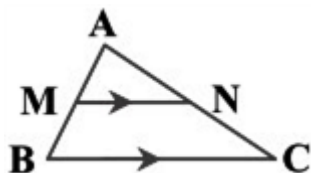


گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: در مثلث ABC اگر میانه‌های AM، BN و CP یکدیگر را در نقطه G قطع کنند، آن‌گاه:

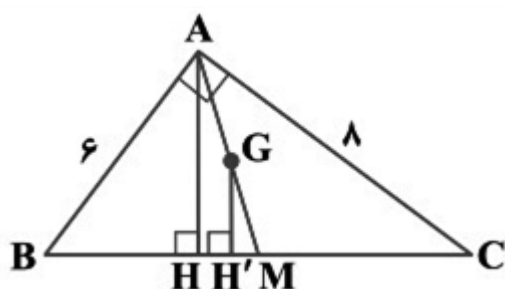


$$\frac{G}{AM} = \frac{GN}{BN} = \frac{GP}{CP} = \frac{1}{3}$$

نکته (تعمیم قضیه تالس): در مثلث ABC اگر $MN \parallel BC$ ، آن‌گاه:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

ابتدا با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\begin{cases} GH' \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow GH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{GH'}{AH} = \frac{GM}{AM}$$

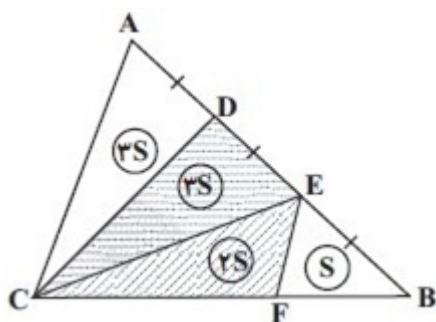
چون G محل برخورد میانه‌هاست، داریم: $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$ ، پس:

$$\frac{GH'}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH' = \frac{1}{3} AH \quad (*)$$

اکنون به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 6 \times 8 = AH \times 10 \Rightarrow AH = 4.8$$

$$GH' = \frac{1}{3} (4.8) = 1.6 \quad \text{با جای‌گذاری در (*) داریم:}$$

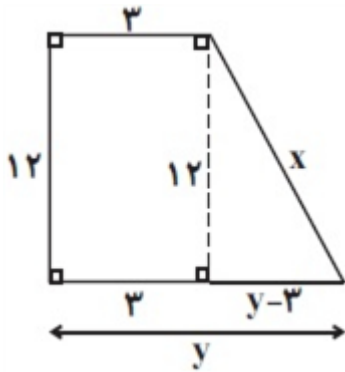
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $S_{EBF} = S$ ، داریم:

$$CF = 2FB \Rightarrow S_{EFC} = 2S_{EBF} = 2S$$

$$AD = DE = EB \Rightarrow S_{ADC} = S_{DEC} = S_{BEC} = 3S$$

$$3S = 144 \Rightarrow S = 48 \Rightarrow S + DEFC = 5S = 5 \times 48 = 240$$

فرض: $۱۲ + x = ۳ + y + ۱۴ \Rightarrow x = y + ۵$

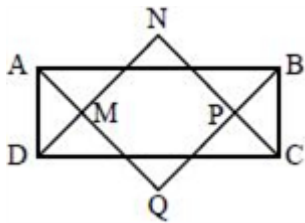


بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه روی شکل داریم:

$$x^2 = 12^2 + (y-3)^2 \Rightarrow (y+5)^2 = 12^2 + (y-3)^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 10y + 25 = 144 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow 16y = 153 - 25 = 128 \Rightarrow y = \frac{128}{16} = 8$$

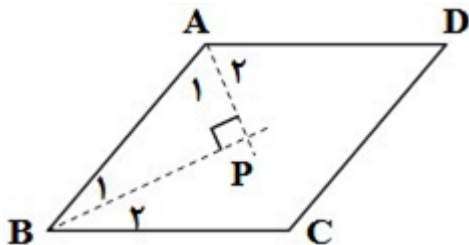
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهارضلعی ایجاد شده مربع است. مثلث‌های DNC و PBC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند، پس: ۲۹



$$NC = \frac{2\sqrt{2}x}{2}, PC = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

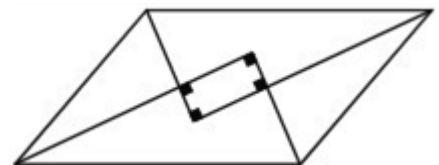
در نتیجه طول ضلع مربع به وجود آمده از برخورد نیمسازها $NP = \sqrt{2}x$ و در نهایت: $S = 2x^2$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع زوایای مجاور مکمل‌اند. ۳۰



$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ$$

به همین صورت ثابت می‌شود سایر زوایای حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاع، قائمه است. پس با توجه به اینکه همه زوایای چهارضلعی حاصل قائمه است، پاسخ مستطیل است.



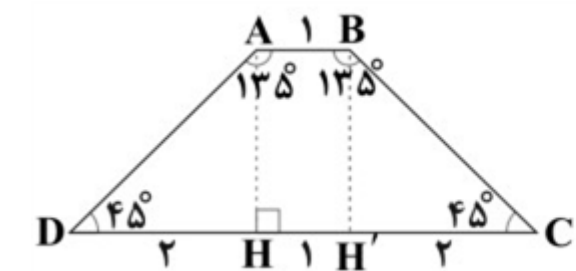
۳۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\hat{B} = \hat{A} = 135^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$\triangle AHD: \begin{cases} \hat{D} = 45^\circ \\ \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{DAH} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow AH = DH = 2$$



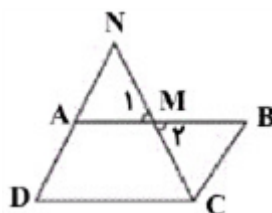
$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{AH(AB + CD)}{2} = \frac{2(1 + 5)}{2} = 6$$

۳۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دو مثلث ANM و BCM داریم:

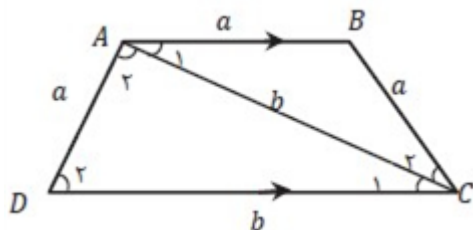
$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{B} = \hat{A} \\ AM = MB \end{cases} \xrightarrow{\text{بنا به حالت (ز ض ز)}} \triangle ANM \cong \triangle BCM \Rightarrow S_{\triangle ANM} = S_{\triangle BCM}$$

$$S_{\triangle ANM} + S_{\triangle MCD} = S_{\triangle BCM} + S_{\triangle MCD} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle NDC}$$



۳۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در متوازی الاضلاع، زوایای مقابل، با هم برابرند.



$$AB = BC = AD = a$$

$$CD = AC = b$$

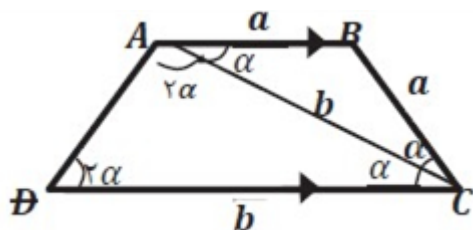
$$\left. \begin{aligned} ABC : AB = BC &\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB \parallel CD \text{ و } AC &\text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{C}_1$$

$$ACD : AC = CD \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}, \hat{D} = \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}$$

$$\angle ADC : 5a = 180^\circ \Rightarrow a = 36^\circ$$

$$\hat{D} = 2a = 72^\circ$$

پس زوایای ذوزنقه به شکل زیر خواهد بود.



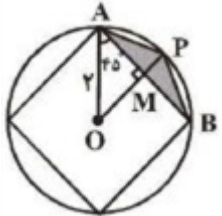
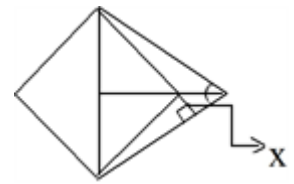
۳۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3} - 2) \rightarrow x = \sqrt{3} - 1$$

ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه است و بنابراین $x = \sqrt{3} - 1$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین OAM داریم: ۳۶

$$\begin{cases} OM^2 + AM^2 = OA^2 \\ OM = AM, OA = 2 \end{cases} \Rightarrow OM = AM = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} PM = OP - OM = 2 - \sqrt{2} \\ AB = 2AM = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_{APB} = \frac{1}{2}AB \times PM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times (2 - \sqrt{2})$$

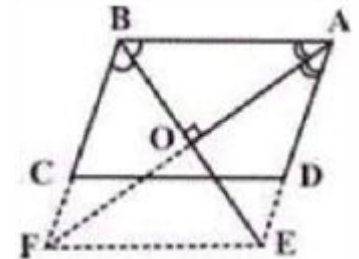
$$= 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر متوازی‌الاضلاع، نیمسازهای دو زاویه مجاور بر هم عمودند، بنابراین نیمساز و ۳۷

ارتفاع گذرنده از رأس A در مثلث ABE برهم منطبق‌اند، پس مثلث ABE در رأس A متساوی‌الساقین است، یعنی $AB = AE$ و در نتیجه متوازی‌الاضلاع ABFE لوزی است.

$$BC = \frac{2}{3}AB = 6 \Rightarrow BC = 6, AB = 9$$

$$\Rightarrow \text{محیط ABFE} = 4 \times 9 = 36$$



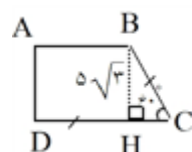
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. BC و BH را به دست می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۶۰°، مساوی ۳۸

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وتر است.}$$

ضلع مقابل به زاویه ۳۰°، نصف وتر است. $CH = \frac{1}{2}BC \Rightarrow CH = 5$. حال AB را به دست می‌آوریم. باید DC و CH را کم

$$DH = BC - HC = 10 - 5 = 5 \Rightarrow AB = DH = 5 : \text{پس } DC = BC = 10$$

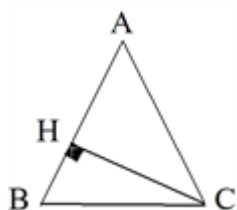
$$S = \frac{1}{2}(AB + DC) \times BH = \frac{1}{2}(5 + 10)5\sqrt{3} = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 37.5\sqrt{3}$$



$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2}BC \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}BC \Rightarrow BC = 10$$

۳۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است یعنی: $DE + DF = CH$.



$$S = \frac{CH \times AB}{۲} \Rightarrow ۲۴ = \frac{CH \times ۸}{۲} \Rightarrow CH = ۶$$

$$\Rightarrow DE + DF = ۶$$

۴۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $AM = x$ باشد، آن‌گاه:

$$AM = CN = BP = x, AP = BN = MC = ۳x$$

داریم:

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = S_{ABC} - ۳S_{MNC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳x)^۲ - ۳\left(\frac{۱}{۲}x \cdot ۳x \sin ۶۰\right)$$

$$= ۴\sqrt{۳}x - \frac{۹}{۴}\sqrt{۳}x = \frac{۷}{۴}\sqrt{۳}x$$

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۷\sqrt{۳}}{۴}x}{۴\sqrt{۳}x} = \frac{۷}{۱۶}$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

