



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

عنوان آزمون : بانک تست هندسه سال دهم

ریاضی (فصل ۱ ترسیم های هندسی و استدلال)

۱ در مثلث ABC، نیمسازهای خارجی زوایای B و C در نقطه‌ی P متقاطع‌اند. از رأس A بر دو نیمساز، خطهای عمود رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند. نقطه‌ی P روی کدام جزء مثلث AMN قرار دارد؟

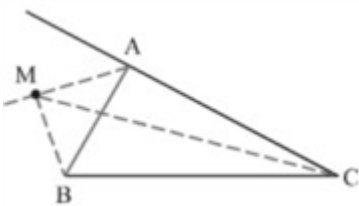
۱ نیمساز داخلی زاویه‌ی A

۲ نیمساز خارجی زاویه‌ی M

۳ میانه‌ی ضلع MN

۴ عمودمنصف ضلع MN

۲ در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی M روی نیمساز خارجی زاویه‌ی A است. نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$ ، چگونه است؟



۱ بزرگتر از ۱

۲ کم‌تر از ۱

۳ برابر با ۱

۴ غیرمشخص

۳ چند لوزی متمایز می‌توان رسم کرد که نسبت طول قطر بزرگ به طول ضلع لوزی برابر با $\frac{1}{6}$ باشد؟

۱ صفر

۲ ۱

۳ ۲

۴ بی‌شمار

۴ اندازه ارتفاعهای مثلث ABC برابر $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{1}{2x+1}$ و $\frac{1}{x+1}$ است. مجموعه مقادیر x به شرط آن‌که مثلث ABC قابل ترسیم باشد، شامل چند عدد طبیعی است؟

۱ صفر

۲ ۱

۳ ۳

۴ ۲

۵ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $\hat{A} = 80^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

۱ ۱۵

۲ ۲۰

۳ ۲۵

۴ ۳۰

۶ اگر A و B دو نقطه با فاصله‌ی ۵ واحد روی خط d باشند، چند مثلث قائم‌الزاویه ABC با اضلاع طبیعی وجود دارد که C به فاصله‌ی ۶ واحد از خط d باشد؟

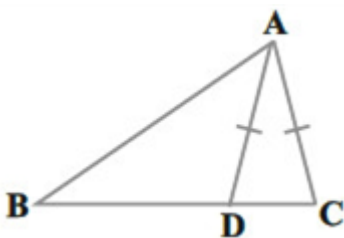
۱ صفر

۲ ۲

۳ ۴

۴ ۸

۷ در شکل مقابل اگر $AD = AC$ باشد، کدام گزینه لزوماً صحیح است؟



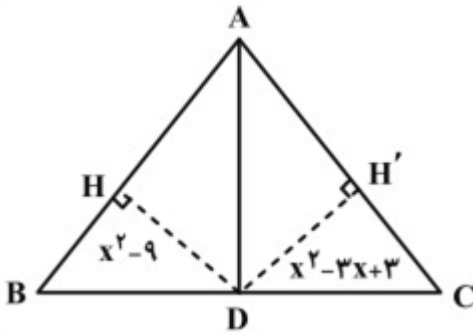
۱ $BC > AB$

۲ $BD > AD$

۳ $AB > AD$

۴ $BC > AD$

در شکل مقابل، اگر $AB = 3x + 2$ و $AC = 2x + 2$ و AD نیمساز زاویه A باشد، نسبت $\frac{AC}{AB}$ کدام است؟


$$\frac{\Delta}{\gamma} \quad \boxed{F}$$
$$\frac{6}{7} \quad \boxed{3}$$
$$\frac{9}{5} \quad \boxed{2}$$
 $\frac{\Delta}{\epsilon}$ 1

۹ مربعی به ضلع ۴ واحد در یک صفحه مفروض است. در مجموعه‌ی نقاط مراکز دایره‌هایی به شعاع ۲ واقع در این صفحه که بر این مربع مماس هستند. بیش‌ترین فاصله‌ی دو نقطه از یک‌دیگر چه قدر است؟

 $\sqrt{A}$ 
$$\sqrt[4]{5} \quad \boxed{3}$$
 $\sqrt[4]{2}$
$$2\sqrt{10}$$

۱۰) کدام نقطه همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد؟

۲ نقطه‌ی هم‌رسی عمود منصف‌ها

۱) نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌ها

۴ مرکز دایره محیطی

۳ نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها

۱۱) پاره‌خط ثابت AB به طول L در صفحه مفروض است. اگر تنها یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصله‌ی ۷ و از B به فاصله‌ی ۴ باشد، مقدار L کدام است؟

۱۱ یا ۳ (۴)

٨ ٩ ٣ (٣)

٢ فقط ١١

١ فقط ٨

۱۲ در مثلث ABC ($AB > AC$)، نقطه D را روی ضلع AB به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که محل هم‌رسی اجزای فرعی مثلث ADC در یک نقطه باشد، کدام گزینه نادرست است؟

 $\hat{A} > \hat{B}$  $AB > CD$ ۳

BD > DC (2)

$$\hat{C} > \hat{B} \quad \boxed{1}$$

۱۳ دو خط L و L' در صفحه با زاویه 60° ، متقاطع هستند. اگر نقطه A از دو خط L و L' یک واحد فاصله داشته باشد، فاصله A از نقطه تقاطع L و L' چه قدر است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \boxed{2}$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

۴) اطلاعات مسئله ناقص است.

2 3

۱۴ اگر AD نیمساز زاویه‌ی داخلی A در مثلث ABC و $AB < AD < AC$ باشد، آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر کدامیک از مقادیر زیر نمی‌تواند باشد؟

12. ☐ F

9. 3

9. 2

۳.۰ (۱)

۱۵ در مثلث $\triangle ABC$ نقاط D و E به ترتیب روی AC و AB قرار دارند، به طوری که $\widehat{ECB}$ و $\widehat{FAD}$ چند درجه است؟
 $\widehat{DBC} = \widehat{ABD} = \widehat{ACE} = 40^\circ$. اگر محل برخورد CE و BD را F بنامیم، زاویه $\widehat{FAD}$ چند درجه است؟

Δ. ° ☒

५. ० ३

3. 2

2. 1

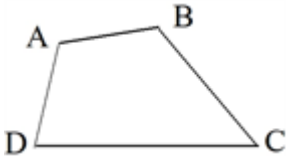
۱۶ در مثلث ABC زاویه $\hat{A} > \hat{B}$ ، نیمساز زاویه B و عمود منصف ضلع AB در نقطه D متقاطع اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطه D به ترتیب بر BA و BC رسم شده اند. کدام نابرابری درست است؟

- AM < BN (۴) DA > DC (۳) NC < NB (۲) NC > NB (۱)

۱۷ در مثلثی قائم الزاویه با طول اضلاع قائم ۴ و ۶، طول نیمساز وارد بر وتر کدام است؟

- $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۱)

۱۸ در چهارضلعی ABCD بزرگترین ضلع CD و کوچکترین ضلع AB می باشد. کدام نتیجه گیری درست است؟



- $\hat{A} < \hat{B}$ (۴) $\hat{B} > \hat{D}$ (۳) AD > BC (۲) BC > AD (۱)

۱۹ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، AD نیمساز زاویه داخلی A و $AB < AD < AC$ است. اگر زاویه B در بازه (α, β) قرار داشته باشد، بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

- $37/5^\circ$ (۴) 30° (۳) $22/5^\circ$ (۲) 15° (۱)

۲۰ طول اضلاع مثلثی اعداد زوج متوالی و یک رقمی اند. مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از سه رأس، کدام می تواند باشد؟

- ۲۰ (۴) ۱۸ (۳) ۱۱ (۲) ۹ (۱)

۲۱ نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، چه شکلی می سازند؟

- یک دایره (۱) یک نقطه (۲) دو خط موازی (۳) دو خط عمود (۴)

۲۲ طول یک مستطیل سه برابر عرض آن است. چه نسبتی از محیط چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل، داخل مستطیل قرار می گیرد؟

- $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

۲۳ در مثلث ABC، نیمساز رأس B و عمود منصف ضلع BC روی ضلع AC متقاطع اند. اگر $\hat{A} = 54^\circ$ باشد، آن گاه اندازه زاویه B کدام است؟

- 86° (۴) 84° (۳) 82° (۲) 78° (۱)

۲۴ در یک چهارضلعی قطرها با هم برابرند. نوع چهارضلعی کدام است؟

- مستطیل (۱) مربع یا مستطیل یا دوزنقه متساوی الساقین (۳) مربع (۲) غیر مشخص (۴)

۲۵ زاویه $\hat{xOy} = 60^\circ$ را در نظر گرفته و به مرکز O، کمانی به شعاع دو واحد رسم کرده ایم تا O_x و O_y را در P و Q قطع کند. برای آن که بتوانیم نیمساز $\hat{xOy}$ را رسم کنیم، حداقل شعاع کمان هایی که باید به مرکز P و Q رسم شوند، چقدر است؟

- ۲ (۱) $1/5$ (۲) ۱ (۳) $0/5$ (۴)

۲۶ چهارضلعی محدب ABCD را در نظر بگیرید. مکان هندسی نقاطی مانند M ، به طوری که ABCD با MABC، مساحت‌های برابر داشته باشند، کدام است؟ (D و M در یک طرف AC هستند).

- ۱ خطی موازی AC ۲ کمانی از یک دایره ۳ خطی عمود بر BD ۴ دو خط عمود بر هم

۲۷ خط d و نقطه‌ی A خارج آن طبق شکل زیر مفروض است. برای رسم خط گذرا از A و موازی با d از خط کش و پرگار استفاده می‌کنیم. حداقل تعداد دفعاتی که از پرگار استفاده می‌شود، چند بار است؟

$A \bullet$

d —————

- ۱ ۶ ۲ ۵ ۳ ۴ ۴ ۳

۲۸ نقطه‌ی A به فاصله‌ی یک از خط d قرار دارد. تعداد نقاطی که از d که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی A برابر r باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ صفر ۴ ۴

۲۹ برای کدامیک از جملات زیر مثال نقض وجود دارد؟

- (a) در هر مثلث، بزرگ‌ترین ارتفاع، بر کوچک‌ترین ضلع فرود می‌آید.
 (b) تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب، بیش‌تر از تعداد اضلاع آن است.
 (c) هر زاویه‌ی داخلی یک n ضلعی منتظم برابر با $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ است.

- ۱ a ۲ b ۳ c ۴ b و c

۳۰ برای رسم نیمساز یک زاویه، حداقل به ترسیم چند کمان نیاز داریم؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۳۱ با معلوم بودن $AC = 9$ ، $AB = 8$ و $AH = 6$ (ارتفاع وارد بر BC) چند مثلث قابل رسم است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

۳۲ کدام گزینه درست است؟

۱ نقیض گزاره‌ی « a کوچک‌تر از b است.» گزاره‌ی « a بزرگ‌تر از b است.» می‌باشد. ($a, b \in \mathbb{R}$)

۲ نقیض گزاره‌ی « a عددی زوج است.» گزاره‌ی « a عددی فرد است.» می‌باشد. ($a \in \mathbb{N}$)

۳ نقیض گزاره‌ی « a عددی اول است.» گزاره‌ی « a عددی مرکب است.» ($a \in \mathbb{N}$)

۴ نقیض گزاره‌ی «دو مثلث هم‌مساحت هم‌نهشت‌اند.» گزاره‌ی «دو مثلث هم‌نهشت هم‌مساحت‌اند.» می‌باشد.

۳۳ در مثلثی یک زاویه با مجموع دو زاویه‌ی دیگر برابر است. کدام گزینه در مورد محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث صحیح است؟

- ۱ داخل مثلث ۲ روی محیط
 ۳ خارج مثلث ۴ هر سه حالت امکان‌پذیر است.

۳۴ در کدام مورد زیر، با اطلاعات داده شده، فقط یک شکل قابل رسم است؟

۱ متوازی الاضلاع با طول قطر ۲ و ۷

۲ مربعی با طول قطر ۶

۳ لوزی با طول ضلع ۵

۴ دایره‌ای با یک وتر به طول ۲ که آن وتر قطر دایره نیست.

۳۵ برای رسم خطی به موازات خط d از نقطه‌ی T خارج از خط و فقط به کمک پرگار و خط کش، چند بار از پرگار استفاده می‌شود؟

۴ ۷

۳ ۶

۲ ۵

۱ ۴

۳۶ در مثلث ABC اگر $AB = \frac{1}{2} AC$ باشد، زاویه‌ی بین نیمساز $\hat{A}$ و میانه‌ی نظیر ضلع AC کدام است؟

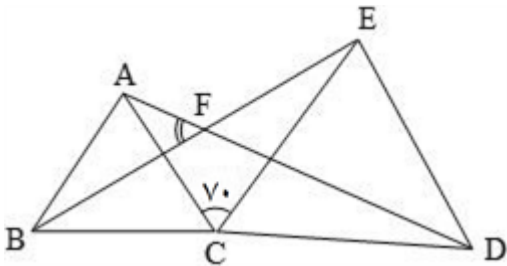
۴ ۶۰

۳ ۹۰

۲ ۳۰

۱ ۴۵

۳۷ در شکل روبه‌رو مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle ECD$ متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه‌ی $\hat{AFB}$ چند درجه است؟



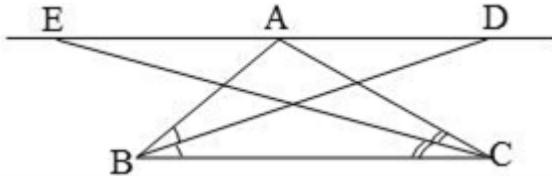
۴ ۴۵°

۳ ۴۰°

۲ ۶۰°

۱ ۵۰°

۳۸ در شکل روبه‌رو $ED \parallel BC$ و در ضمن BD و CE به ترتیب نیمسازهای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هستند. اندازه ED کدام است؟



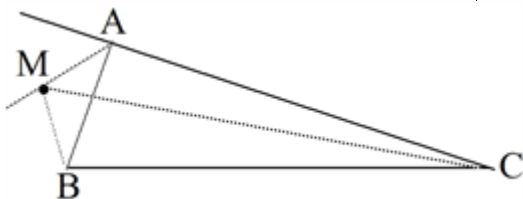
۴ $AB + BC$

۳ $AB + AC$

۲ AC

۱ $2AB$

۳۹ در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی M روی نیمساز خارجی زاویه‌ی A است. نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$ ، چگونه است؟



۴ غیرمشخص

۳ برابر با ۱

۲ کمتر از ۱

۱ بزرگ‌تر از ۱

۴۰ در مثلث ABC ($AB > AC$) طول نیمساز داخلی و خارجی رأس A با هم برابرند. اگر $\hat{A} = ۵۰^\circ$ آن‌گاه مقدار $\hat{C}$ برابر است با

۴ ۶۰°

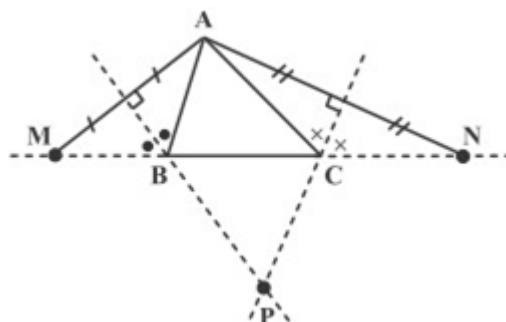
۳ ۲۵°

۲ ۱۱۰°

۱ ۲۰°

۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، دو مثلث ABM و ACN در رأس‌های B و C متساوی‌الساقین‌اند، زیرا نیمساز و ارتفاع نظیر این رأس‌ها بر هم منطبق شده‌اند. پس ارتفاع‌های خارج شده از رؤس B و C در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABM و ACN همان عمودمنصف قاعده‌هایشان (یعنی اضلاع AM و AN) هستند.



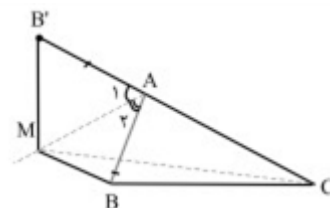
در مثلث AMN، عمودمنصف‌های دو ضلع AM و AN در نقطه‌ی P متقاطع‌اند، لذا عمودمنصف ضلع سوم، یعنی MN، نیز از نقطه‌ی P می‌گذرد.

۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بر روی امتداد ضلع AC، پاره‌خط AB' را به اندازه‌ی AB جدا می‌کنیم. حال (بنا بر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، $AB = AB'$ و $AM = AM$) دو مثلث AMB و AMB' هم‌نهشت‌اند. پس داریم:

$$MB' + MC > CB' = (AB' + AC)$$

$$\begin{aligned} \frac{MB=MB'}{AB=AB'} & \Rightarrow MB + MC > AB + AC \\ \Rightarrow \frac{MB + MC}{AB + AC} & > 1 \end{aligned}$$



۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در لوزی اضلاع برابرند و طبق شکل قطر بزرگ AC است، پس:

$$\frac{AC}{AB} = 1/6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

تمام مقادیری از AC و AB که $\frac{AC}{AB}$ برابر $\frac{8}{5}$ شود، می‌تواند قابل قبول باشد. حالا باید ببینیم با این نسبت لوزی رسمی‌شود؟

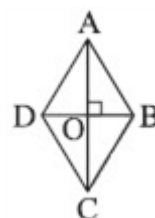
$$\left. \begin{aligned} AC &= 2OA \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{8}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2OA}{AB} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{4}{5}$$

مثلاً، با $OA = 4$ و $AB = 5$ در مثلث $\triangle AOB$ ، $OB = 3$ می‌شود و یک لوزی برقرار است.

OA	4	8	12	16	...
AB	5	10	15	20	...

به‌ازای تمام مقادیر داده‌شده در جدول برای OA و AB می‌توان لوزی رسم کرد. دقت کنید! مقادیر غیرصحیح OA و AB

که $\frac{OA}{AB} = \frac{4}{5}$ شود، نیز قابل قبول هستند. بنابراین بی‌شمار لوزی قابل رسم است.



۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر h_a, h_b, h_c ارتفاع‌های مثلث ABC باشند آنگاه داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow a = \frac{2S}{h_a}, b = \frac{2S}{h_b}, c = \frac{2S}{h_c}$$

$$a < b + c \Rightarrow \frac{2S}{h_a} < \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\Rightarrow 4x - 1 < (2x + 1) + (x + 1) \Rightarrow x < 3$$

$$b < a + c \Rightarrow \frac{2S}{h_b} < \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 < (4x - 1) + (x + 1) \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$c < a + b \Rightarrow \frac{2S}{h_c} < \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} \Rightarrow \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$$

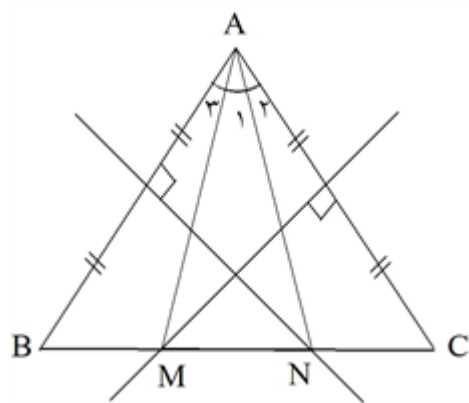
$$\Rightarrow x + 1 < (4x - 1) + (2x + 1) \Rightarrow x > \frac{1}{5}$$

پس حدود تغییرات x به صورت $\frac{1}{5} < x < 3$ است، در نتیجه x اعداد طبیعی ۱ و ۲ را می‌تواند اختیار کند.

۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر داده‌های سؤال شکل زیر را خواهیم داشت. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک

پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



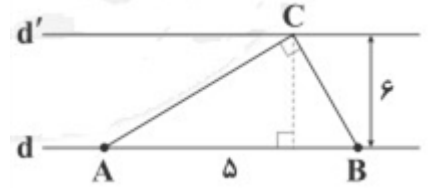
$$\left. \begin{array}{l} AC \text{ عمودمنصف } M \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C} \\ AB \text{ عمودمنصف } N \Rightarrow NA = NB \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{B} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C}$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ} 180^\circ + \hat{A}_1 = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 20^\circ$$

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. همه‌ی نقاط به فاصله‌ی ۶ واحد از d روی خطی مانند d' موازی d و به فاصله‌ی ۶ واحد قرار دارند. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:



$$۱) \widehat{C} = ۹۰^\circ$$

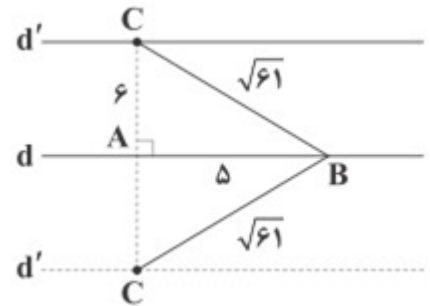
$$۲S_{\triangle ABC} = ۶ \times ۵ = AC \times AB \Rightarrow AC \times BC = ۳۰ \Rightarrow AC \times BC = \begin{cases} ۱ \times ۳۰ \\ ۲ \times ۱۵ \\ ۳ \times ۱۰ \\ ۵ \times ۶ \end{cases}$$

باید $AC < ۵$ و $BC < ۵$ باشد که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

$$۲) \widehat{B} = ۹۰^\circ \text{ یا } \widehat{A} = ۹۰^\circ$$

با فرض $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ داریم:

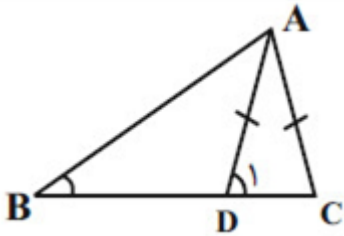
$$BC = \sqrt{۶^2 + ۵^2} = \sqrt{۶۱} \Rightarrow \text{مثلاً می‌توان یافت}$$



با $\widehat{B} = ۹۰^\circ$ هم ۲ مثلث دیگر یافت می‌شود، پس مجموعاً ۴ مثلث می‌توان رسم کرد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۷



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{D} > \widehat{B} \\ \widehat{D} = \widehat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{B} \Rightarrow AB > AC \xrightarrow{AC=AD} AB > AD$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آن‌جا که نقطه D روی نیمساز زاویه A قرار دارد، بایستی از دو ضلع زاویه یعنی AB و AC به یک فاصله باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$DH = DH' \Rightarrow x^2 - ۹ = x^2 - ۳x + ۳ \Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

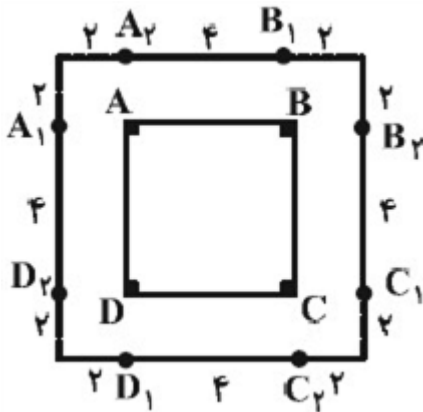
$$x = ۴ \Rightarrow \begin{cases} AC = ۲x + ۴ = ۱۲ \\ AB = ۳x + ۲ = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{۶}{۷}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای این که دایره‌ای به شعاع ۲، بر مربع مفروض مماس باشد بایستی فاصله‌ی مرکز آن دایره از نزدیک‌ترین ضلع برابر ۲ باشد.

برای مثال مراکز دایره‌ای به شعاع ۲ که به ضلع AD مماس هستند روی پاره‌خطی به اندازه ضلع AD، موازی با آن و به فاصله‌ی ۲ از آن قرار دارند.

بنابراین مجموعه نقاط دلخواه ما، چهار پاره‌خط موازی با اضلاع مربع و هم اندازه‌ی با آن‌ها و به فاصله‌ی ۲ از آن‌ها می‌باشند. حال کافی است که بیش‌ترین فاصله میان این نقاط را به دست آوریم.

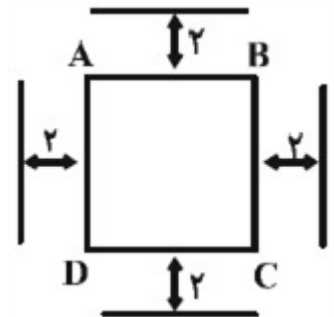
توجه کنید در شکل زیر، پاره‌خط‌های A_1D_1 ، A_1B_1 ، B_1C_1 و C_1D_1 مجموع نقاط دلخواه ما می‌باشند و پاره‌خط‌های به شکل خط چین برای راحتی محاسبه به شکل اضافه شده‌اند. حال فاصله‌ی نقاط را از هم محاسبه می‌کنیم تا بیش‌ترین فاصله را به دست آوریم.



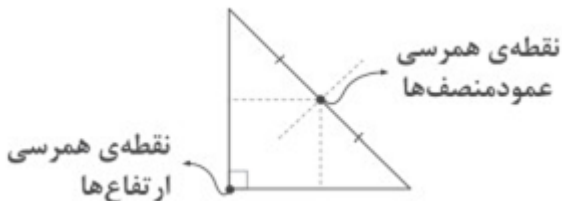
$$\begin{aligned}(A_1, A_2)^2 &= 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow A_1, A_2 = 2\sqrt{2} \\ (A_1, B_1)^2 &= 2^2 + 6^2 = 40 \Rightarrow A_1, B_1 = 2\sqrt{10} \\ A_1, B_2 &= A_1, A + AB + BB_2 \Rightarrow A_1, B_2 = 8 \\ (A_1, C_1)^2 &= (A_1, B_2)^2 + (B_2, C_1)^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \\ &\Rightarrow A_1, C_1 = 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A_1, C_2)^2 &= 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow A_1, C_2 = 6\sqrt{2} \\ (A_1, D_1)^2 &= 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow A_1, D_1 = 2\sqrt{10} \\ A_1, D_2 &= 4\end{aligned}$$

همان‌طور که محاسبه کردیم، بیش‌ترین فاصله مربوط به فاصله‌ی نقاط A_1 و C_1 از یک‌دیگر می‌باشد.

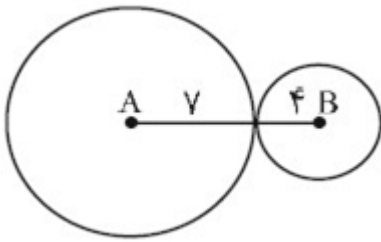


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌ها همواره داخل مثلث است اما نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌ها که همان مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است می‌تواند داخل یا خارج مثلث یا روی مثلث نیز باشد و نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌ها نیز می‌تواند داخل، رو یا خارج مثلث باشد.

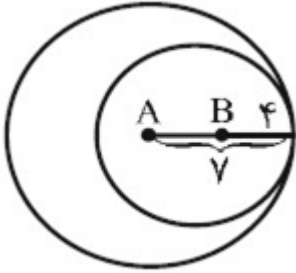


۱۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی موردنظر باید هم روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ و هم روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ قرار داشته باشد. چون تنها یک نقطه با این شرایط وجود دارد، پس این دو دایره تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند که به یکی از دو صورت زیر امکان‌پذیر است:



$$L = 7 + 4 = 11$$



$$L = 7 - 4 = 3$$

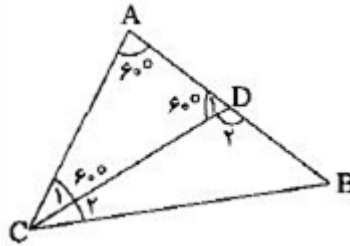
۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مثلی که هم‌رسی اجزای فرعی (میانه، ارتفاع، نیمساز، عمودمنصف) بر هم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است پس $\triangle ADC$ متساوی‌الاضلاع است.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C} > \widehat{C}_1 \\ \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 \\ \widehat{D}_1 > \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B}$$



$$\text{گزینه (۳): } \triangle ABC : \left. \begin{array}{l} AB > AC \\ AC = CD \end{array} \right\} \Rightarrow AB > CD$$

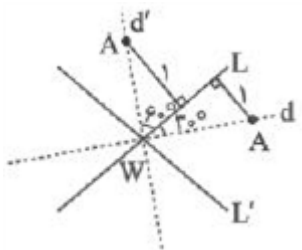
$$\text{گزینه (۴): } \left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{D}_1 = 60^\circ \\ \widehat{D}_1 > \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{B}$$

پس گزینه نادرست، گزینه (۲) است.

۱۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نقطه A بر روی یکی از دو نیمساز زاویه بین خطوط L و L' واقع است. اگر A روی d باشد:



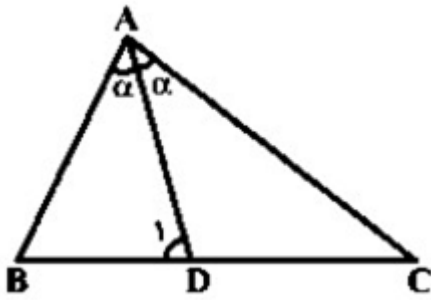
$$WA = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$$

اگر A روی d' باشد:

$$WA = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید در مثلث ABC ، $\hat{A} = 2\alpha$ و $AB < AD < AC$ باشد. در این صورت داریم:



$$\triangle ADB: AD > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{D} \Rightarrow 2\hat{B} > \hat{B} + \hat{D} \\ \Rightarrow 2\hat{B} > 180^\circ - \alpha \Rightarrow \hat{B} > 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\triangle ABC: \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \xrightarrow{\hat{C} > \alpha} \hat{B} < 180^\circ - \hat{A}$$

$$\xrightarrow{\hat{A} = 2\alpha} \hat{B} < 180^\circ - 2\alpha \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 90^\circ - \frac{\alpha}{2} < 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} < 90^\circ \Rightarrow \alpha < 60^\circ \xrightarrow{\hat{A} = 2\alpha} \hat{A} < 120^\circ$$

بنابراین اندازه‌ی زاویه‌ی A نمی‌تواند برابر 120° باشد.

۱۵

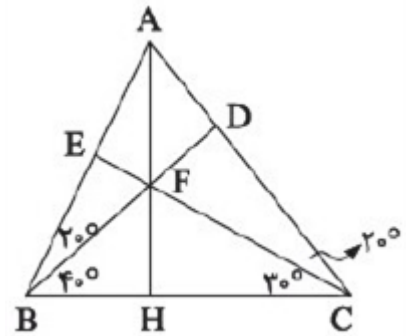
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\triangle BDC: \hat{BDC} + 40^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{BDC} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AC$$

$$\triangle CEB: \hat{CEB} + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{CEB} = 90^\circ \Rightarrow CE \perp AB$$

بنابراین BD و CE ارتفاع‌های مثلث ABC هستند و از آنجایی که ارتفاع‌های مثلث هم‌رس هستند، AH نیز باید ارتفاع باشد. در نتیجه $\hat{AHC} = 90^\circ$ و اندازه‌ی زاویه‌ی FAD برابر است با:

$$90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$



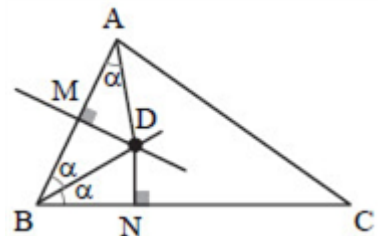
۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BND و BMD هم‌نهشت‌اند. پس $BM = BN$.

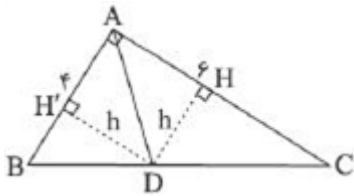
از طرف دیگر داریم:

$$\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow BC > AB \Rightarrow BN + NC > 2BM \xrightarrow{BM=BN}$$

$$BN + NC > 2BN \Rightarrow NC > BN$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون D روی نیمساز زاویه A است، فاصله آن از دو ضلع AC و AB برابر است.



$$DH = DH' = h$$

ضمناً چهارضلعی AHDH' به دلیل داشتن سه زاویه قائمه، مستطیل است و چون دو ضلع مجاور آن (DH, DH') برابرند، مربع است. مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{4 \times 6}{2} = 12$$

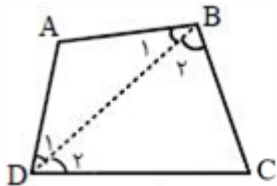
در ضمن مجموع مساحت مثلث‌های ADC و ABD برابر مساحت مثلث ABC است:

$$\frac{h \times 6}{2} + \frac{h \times 4}{2} = 12 \xrightarrow{\times 2} 10h = 24 \Rightarrow h = 2.4$$

چون مثلث ADH قائم‌الزاویه است و $\widehat{DAH} = 45^\circ$ پس داریم:

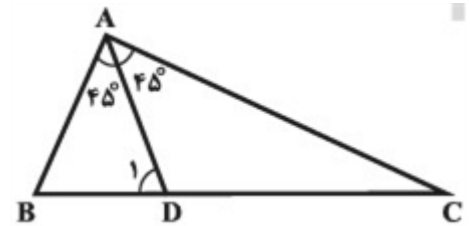
$$DH = \frac{\sqrt{2}}{2} AD \xrightarrow{DH=2.4} 2.4 = \frac{\sqrt{2}}{2} AD \Rightarrow AD = 2.4\sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD : AB < AD \Rightarrow \widehat{D}_1 < \widehat{B}_1 \\ \triangle BDC : BC < CD \Rightarrow \widehat{D}_2 < \widehat{B}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 < \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \Rightarrow \widehat{D} < \widehat{B}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$AD > AB \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{D}_1$$

در مثلث ABD داریم

$$\widehat{D}_1 = 45^\circ + \widehat{C} \quad (\text{زاویه خارجی } \triangle ACD)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\widehat{B} > \widehat{D}_1 \Rightarrow \widehat{B} > 45^\circ + \widehat{C} \xrightarrow{\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}} \widehat{B} > 45^\circ + (90^\circ - \widehat{B})$$

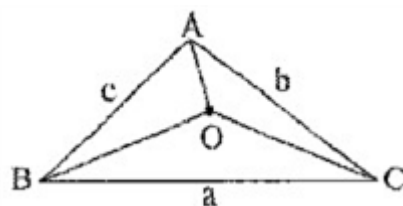
پس:

$$\Rightarrow 2\widehat{B} > 135^\circ \Rightarrow \widehat{B} > 67.5^\circ \xrightarrow{\widehat{B} < 90^\circ} 67.5^\circ < \widehat{B} < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \max(\beta - \alpha) = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ$$

۲۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اضلاع مثلث ۶، ۴ و ۲ یا ۸، ۶ و ۴ می‌توانند باشند. اما با توجه به نامساوی مثلثی اعداد ۲، ۴ و ۶ نمی‌توانند قابل قبول باشند ($۲ + ۴ > ۶$).
در نتیجه تنها حالت ممکن این است که اضلاع مثلث ۴، ۶ و ۸ باشند.



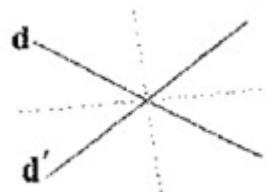
از طرفی بنا بر نامساوی مثلثی می‌توان نشان داد مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از سه رأس از محیط کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) < OA + OB + OC < a+b+c$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(۸+۶+۴)}_۹ < OA + OB + OC < \underbrace{۸+۶+۴}_{۱۸}$$

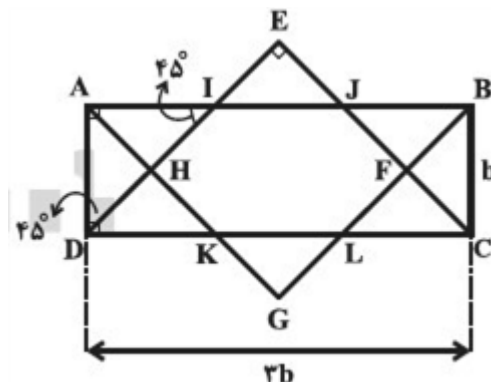
۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاط مورد نظر نیمسازهای زوایای ایجاد شده در دو خط متقاطع است.



۲۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث ADI قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس:



شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک مربع است، پس $AH \perp DE$ و در نتیجه ارتفاع نظیر ضلع ID در مثلث ADI است. AH علاوه بر ارتفاع، میانه وارد بر ID هم هست و داریم:

$$IH = \frac{1}{2}ID = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

از آنجا که $IH = HK = JF = FL$ پس طول قسمتی از محیط چهارضلعی EFGH که داخل مستطیل قرار می‌گیرد، برابر است با:

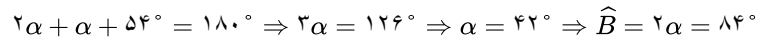
$$۴IH = ۲\sqrt{2}b$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(۳b - b) = \sqrt{2}b$$

از طرفی ضلع مربع EFGH برابر است با:

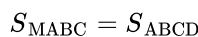
$$\text{پس } \frac{۲\sqrt{2}b}{۴\sqrt{2}b} = \frac{۱}{۲} \text{ محیط مربع، داخل مستطیل قرار می‌گیرد.}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه B در نقطه D روی ضلع AC متقاطع‌اند. نقطه D از ۲ سر پاره‌خط BC به یک فاصله است، پس مثلث BDC متساوی‌الساقین و با فرض $\widehat{C} = \alpha$ اندازه زوایا مطابق شکل خواهند بود و داریم:



۲۴

25



می نویسیم:

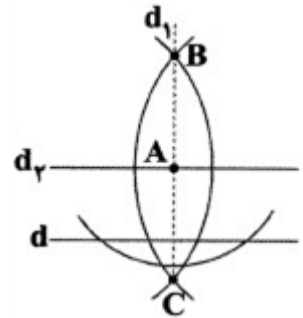
در نتیجه:

چون مثلث‌های ACD و ACM هم‌مساحت هستند و مساحت مثلث ACD مقدار ثابتی است پس مساحت مثلث‌های ACM هم باید مقدار ثابتی باشد و در آن‌ها قاعده‌ی AC مشترک است.

اکنون نتیجه می‌گیریم مکان هندسی نقطه‌ی M خطی است موازی خط AC.

۲۷

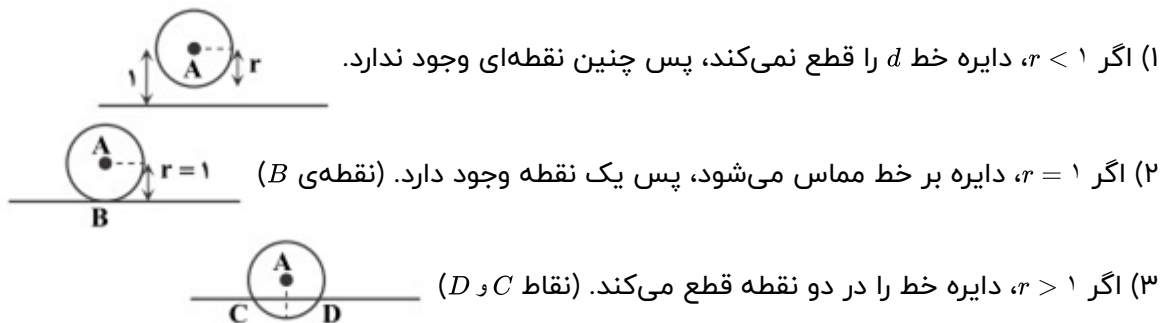
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای رسم خط عمود بر d و گذرا از A ، سه بار از پرگار استفاده می‌کنیم تا خط d_1 عمود بر d رسم شود. حال برای آن‌که کمترین استفاده را از پرگار بکنیم، از دو نقطه‌ی B و C (طبق شکل) استفاده می‌کنیم و دو کمان دیگر می‌زنیم تا عمود بر d_1 و گذرا از A را رسم کنیم تا خط d_2 به دست آید. به این ترتیب حداقل ۵ بار از پرگار استفاده می‌کنیم.



۲۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مجموعه نقاطی که از A به فاصله‌ی r هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع r قرار دارند. ۳ حالت امکان‌پذیر است:



بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ است.

۲۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

(a) صحیح است، زیرا مساحت در مثلث ثابت است، پس اگر قاعده کوچک شود، ارتفاع بزرگ می‌شود.
(b) بین تعداد قطرهای و تعداد اضلاع رابطه‌ی خاصی وجود ندارد، اما برای $n > 5$ تعداد قطرهای از تعداد اضلاع بیشتر می‌شود.

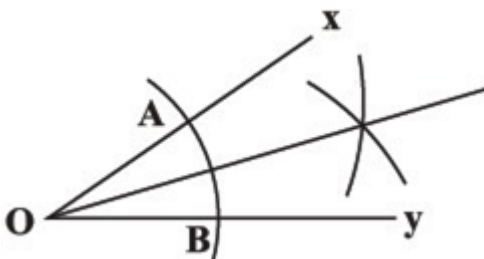
$$\frac{n(n-3)}{2} > n \Rightarrow n > 5$$

(c) مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی $(n-2)180^\circ$ است. در صورتی‌که زوایا برابر باشند، هر زاویه $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ خواهد بود.

۳۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کمان اول به شعاع دلخواه و به مرکز O رسم می‌شود تا نقطه‌های A و B به دست آیند. کمان‌های دوم و سوم با شعاع‌های برابر و به طولی بزرگ‌تر از نصف طول AB و به مرکزهای A و B رسم می‌شوند تا یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند.

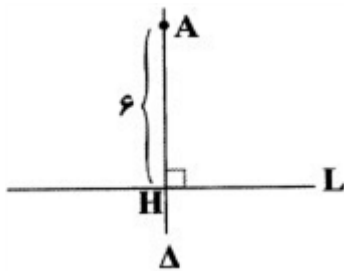
با وصل کردن این نقطه به O ، نیمساز زاویه xOy به دست می‌آید.



بنابراین حداقل با ترسیم سه کمان می‌توان نقطه‌ای را یافت که با وصل کردن آن به نقطه O در رأس، نیمساز زاویه xOy به دست آید.

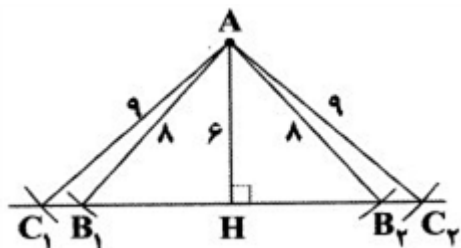
۳۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خط دلخواه L را در نظر می‌گیریم و سپس خط Δ را بر آن عمود می‌کنیم. بر روی Δ ، AH را به

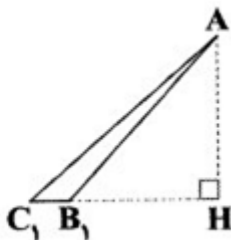
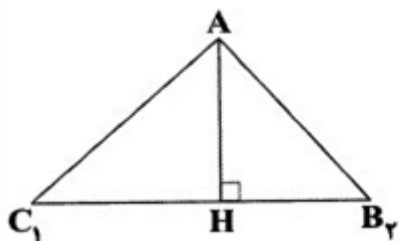


اندازه‌ی ۶ واحد جدا می‌کنیم.

از نقطه‌ی A، دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۹ واحد رسم می‌کنیم تا نقاط B و C به دست آیند.



بنابراین دو مثلث پایین ویژگی‌ها وجود دارد. شکل‌های زیر را ببینید.



دقت کنید: مثلث AB_1C_1 بامثلث AB_1C_1 و مثلث AB_1C_1 با مثلث AB_1C_1 هم‌نهشت هستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

۳۲

(۱) «a کوچک‌تر از b است.» $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ «a کوچک‌تر از b نیست.» یا «a بزرگ‌تر یا مساوی b است.»

(۳) «a عددی اول است.» $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ «a اول نیست.» یا «a مرکب یا برابر ۱ است.»

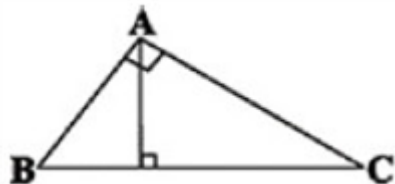
(۴) «دو مثلث هم‌مساحت، هم‌نهشت‌اند.» $\xleftarrow{\text{نقیض}}$ «دو مثلث هم‌مساحت، هم‌نهشت نیستند.» یا «دو مثلث وجود دارد که هم‌مساحت‌اند ولی هم‌نهشت نیستند.»

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق مفروضات صورت سؤال داریم:

۳۳

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \xrightarrow{+\hat{A}} \hat{A} = \hat{B} + \hat{C} + \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

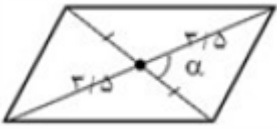
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، محل تلاقی ارتفاع‌ها روی رأس قائمه است، پس این نقطه روی محیط مثلث است.



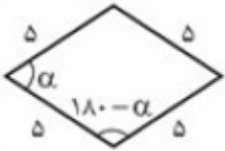
۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

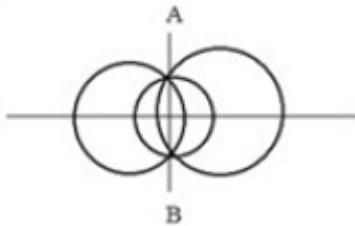
گزینه ۱: چون زاویه‌ی بین دو قطر معلوم نیست، بنابراین چهار مثلث به وجود آمده توسط قطرها، به صورت منحصر به فرد قابل رسم نیستند و لذا بی‌شمار متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.



گزینه ۳: چون زاویه‌ی بین اضلاع مشخص نیستند، بنابراین واضح است که با تغییر α بی‌شمار لوزی قابل رسم است.



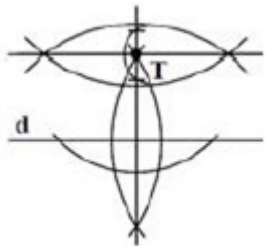
گزینه ۴: می‌دانیم مرکز دایره‌ای که AB وتر آن است روی عمودمنصف AB قرار دارد. چون هر نقطه روی عمودمنصف AB می‌تواند حکم مرکز را داشته باشد، بنابراین مطابق شکل بی‌شمار دایره از AB می‌گذرد.



گزینه ۲: می‌توان هر مربع را با داشتن قطر آن، به صورت منحصر به فرد رسم کرد.

۳۵

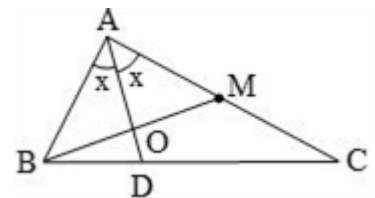
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به طریقه‌ی رسم، شش بار از پرگار استفاده می‌شود.



۳۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض $AB = \frac{1}{2}AC$ و $AM = \frac{1}{2}AC$ نتیجه می‌گیریم $AM = AB$ ، بنابراین مثلث

$\triangle ABM$ متساوی‌الساقین است و OA نیمساز زاویه‌ی رأس این مثلث متساوی‌الساقین است پس OA ارتفاع نیز می‌باشد در نتیجه زاویه‌ی $\hat{O} = 90^\circ$.

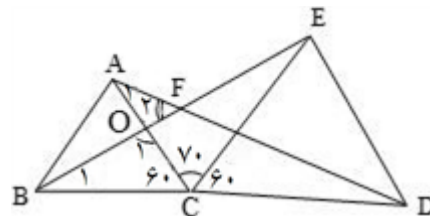


۳۷

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی‌الاضلاع اندازه‌ی هر زاویه داخلی 60° است، پس زوایای $\widehat{ACD}$ و $\widehat{BCE}$ هر کدام 120° است.

$$\left. \begin{array}{l} AC = BC \\ EC = CD \\ \widehat{BCE} = \widehat{ACD} = 120^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle BCE \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$$

در دو مثلث $\triangle AOF$ و $\triangle BCO$ زوایای $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ با هم و زوایای $\widehat{O}_1$ و $\widehat{O}_2$ با هم برابرند پس زاویه‌ی F با زاویه‌ی C مساوی و برابر 60° است.

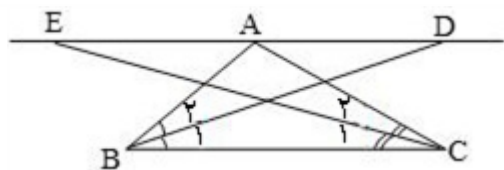


۳۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} ED \parallel BC \text{ قضیه خطوط} \\ \text{مورب } BD \text{ موازی و مورب} \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{D} = \widehat{B}_1 \xrightarrow{\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2} \widehat{D} = \widehat{B}_2 \Rightarrow AD = AB \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} ED \parallel BC \text{ قضیه خطوط} \\ \text{مورب } EC \text{ موازی و مورب} \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{E} = \widehat{C}_1 \xrightarrow{\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2} \widehat{E} = \widehat{C}_2 \Rightarrow AE = AC \quad (2)$$



از جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $ED = AB + AC$.

۳۹

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در امتداد ضلع AC نقطه‌ی D را طوری انتخاب می‌کنیم تا $AD = AB$ باشد در این صورت دو مثلث AMD و AMB به حالت (ض ز ض) همنهشت می‌شوند پس $MD = MB$ داریم.

$$\triangle CMD : CD < MD + MC \Rightarrow CA + AD < MD + MC \xrightarrow[\substack{MD=MB \\ AD=AB}]{} CA + AB < MB + MC$$

$$CA + AB < MB + MC$$

$$\frac{MB + MC}{CA + AB} > 1 \text{ بنابراین}$$

نیم ساز AD'

$$\widehat{A} = 50^\circ \rightarrow \widehat{A}_r = \widehat{A}_f = 65^\circ$$

$$AD = AD' \Rightarrow \triangle ADD' \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}'_1$$

$$A_1 + A_3 = 90^\circ \Rightarrow D'_1 = 45^\circ, \widehat{C} = \widehat{A}_r + \widehat{D}_1 = 45 + 65 = 110^\circ$$

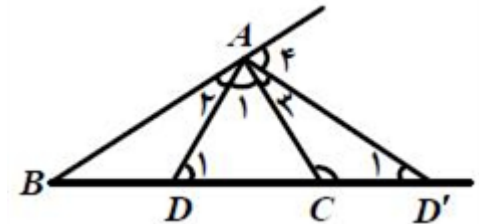
راه حل دوم:

$$A = 50^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 130^\circ$$

$$\triangle ABC \text{ شبه قائم الزاویه} \Rightarrow \widehat{C} - \widehat{B} = 90^\circ \rightarrow 2\widehat{C} = 220^\circ, \widehat{C} = 110^\circ$$

نکته: نیم‌سازهای زوایای داخلی و خارجی در هر رازس مثلث (n ضلعی) بر یکدیگر عمودند.

نکته: اگر در مثلثی طول نیم‌سازهای داخلی و خارجی در یک رأس برابر باشد مثلث شبه قائم‌الزاویه است، یعنی تفاضل دو زاویه‌ی آن برابر 90° می‌باشد.



1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

