



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم

ریاضی (فصل ۶ شمارش بدون شمارش)

۱) رأس‌های مربع ABCD را به چند طریق می‌توان با سه رنگ سبز، آبی و قرمز رنگ کرد، به طوری که رأس‌هایی که به هم متصل هستند، هم‌رنگ نباشند؟ (استفاده از هر سه رنگ الزامی نیست.)

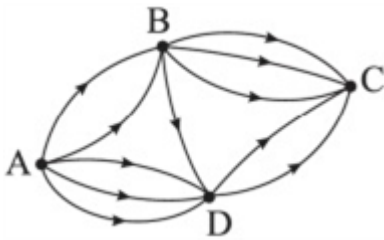
۱۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۶ (۱)

۲) در شکل مقابل، مسیرهای یک‌طرفه بین شهرهای A، B، C و D نشان داده شده است. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟



۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۳) چند تابع یک به یک با دامنه $A = \{a, b, c, d, e, g\}$ و هم دامنه $B = \{m, n, p, q, r, s, t\}$ می‌توان نوشت به طوری که $f(a) = p$ و $f(e) \neq m$ باشد؟

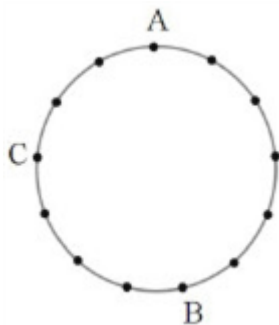
$5 \times 5!$ (۴)

$6!$ (۳)

6^5 (۲)

7^5 (۱)

۴) از به هم وصل کردن نقاط شکل مقابل، چند چهارضلعی محدب شامل ضلع AC یا AB می‌توان رسم کرد؟



۴۸ (۴)

۴۵ (۳)

۶۲ (۲)

۵۹ (۱)

۵) یک آزمون چند گزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد دقیقاً به ۶ سؤال پاسخ دهد به صورتی که به حداقل ۴ سؤال از ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای و حداکثر به ۴ سؤال از ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای جواب دهد. او با چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد؟

220×2^7 (۴)

450×2^7 (۳)

225×2^7 (۲)

460×2^7 (۱)

۶) از بین ۵ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی، ۴ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۳ دانش‌آموز رشته‌ی انسانی یک تیم ۴ نفره انتخاب کرده‌ایم. در چند انتخاب از هر رشته حداقل یک نفر حضور دارد؟

۱۲۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۲۷۰ (۲)

۵۴۰ (۱)

۷ حاصل عبارت $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$ به ازای $n = 1401$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1402}{1403}$ ۲ $\frac{1403}{1402}$ ۳ $\frac{1403 \times 1401}{1402}$ ۴ $\frac{1402}{1403 \times 1401}$

۸ ۴ کتاب متمایز با عنوان ریاضی و ۳ کتاب متمایز با عنوان فیزیک را به چند طریق می‌توان روی هم قرار داد به طوری که وقتی آنها را یکی یکی برمی‌داریم تا در گوشه دیگر اتاق روی هم بچینیم، ترتیب عنوان کتاب‌ها (ریاضی و فیزیک) مانند قبل باشد؟

- ۱ ۶۳۰ ۲ ۴۳۲ ۳ ۳۱۵ ۴ ۱۴۴

۹ ۴ دانش‌آموز به همراه پدر و مادرشان به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند به طوری که دانش‌آموزها بین والدینشان نشسته باشند؟

- ۱ ۱۲! ۲ $(2!)^4 \times 4!$ ۳ $2^4 \times 4!$ ۴ $3^4 \times 4!$

۱۰ به چند طریق ۶ دانش‌آموز می‌توانند در ۴ رشته ورزشی متمایز ثبت‌نام کنند به طوری که در هر رشته ورزشی، حداقل یک دانش‌آموز ثبت‌نام کند؟

- ۱ ۳۰۰ ۲ ۷۲۰ ۳ ۷۹۲ ۴ ۱۵۶۰

۱۱ تعداد جایگشت‌های حروف «زخم‌کاری» با کدام شرط، از همه کم‌تر است؟

- ۱ همه حروف کلمه «زخم» کنار هم باشند.
۲ حروف «ک، ا، ر، ی» به صورت «ریکا» کنار هم باشند.
۳ به حروف «ز» یا «ک» یا «ر» ختم شود.
۴ یکی از حروف نقطه‌دار در شروع باشد و به «م» یا «ک» یا «ر» ختم شود.

۱۲ ۴ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز با موضوع آمار را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به طوری که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (بجز کتاب اول و آخر)، متفاوت باشد؟

- ۱ ۹۶ ۲ ۷۲ ۳ ۴۸ ۴ ۲۴

۱۳ معادله $(x^2 - 9)! = 1$ چند ریشه دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۱۴ اعداد دو رقمی ساخته شده (بدون ارقام تکراری) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را روی کارتهایی می‌نویسیم، سپس یکی از کارت‌ها را انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A روشن عدد زوج و پیشامد B روشن عدد اول باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

- ۱ $n(A) = 8$ ۲ $n(B) = 6$ ۳ A و B ناسازگارند ۴ $n(A \cup B) = 13$

۱۵ با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۰ چند عدد ۳ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت به طوری که صدگان آن از دهگان و دهگان آن از یکان بیش‌تر باشد؟

- ۱ ۷۰ ۲ ۹۰ ۳ ۲۰ ۴ ۳۵

۱۶ حاصل عبارت $\frac{(3!)!}{(2!)^3}$ کدام است؟

- ۱ ۶۰ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ ۶ ۴ ۱

۱۷) یک آشپز ۷ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ ادویه از این ادویه‌ها می‌تواند یک طعم جدید درست کند. اگر دو نوع از این ادویه‌ها قابل مخلوط کردن با هم نباشند، او چند طعم مختلف می‌تواند درست کند؟

- ۱) ۳۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۱۸) به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری که افراد هم‌تیمی کنار هم باشند؟

- ۱) ۷۲ ۲) ۱۱۴۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۴۳۲

۱۹) به چند روش می‌توانیم ۴ مداد یکسان و ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر تقسیم کنیم به طوری که به هر فرد حداقل یک مداد و یک خودکار برسد؟

- ۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۱۱۴۴ ۴) ۱۰۸

۲۰) به چند حالت ۴ قاشق متفاوت و ۴ چنگال متفاوت را در یک ردیف می‌توان چید، به طوری که هیچ دو قاشقی کنار هم قرار نگیرد؟

- ۱) $4! \times 4!$ ۲) $2 \times 4! \times 4!$ ۳) $3 \times 4! \times 4!$ ۴) $5 \times 4! \times 4!$

۲۱) در چند جایگشت از حروف کلمه «abnormal»، دو حرف a کنار هم هستند و بین حروف m و n دقیقاً دو حرف قرار دارد؟

- ۱) ۶۷۶ ۲) ۷۱۴ ۳) ۷۲۰ ۴) ۸۱۶

۲۲) در چند جایگشت از حروف کلمه «هخامنشی»، حرف «خ» قبل از حرف «ش» آمده است (نه لزوماً بدون فاصله) و حرف «ه» بین حروف «م» و «ن» نیست (نه لزوماً بدون فاصله)؟

- ۱) $7! - 6! \times 2!$ ۲) $\frac{7!}{2! \times 3!}$ ۳) $\frac{7!}{3}$ ۴) $\frac{2 \times 7!}{3}$

۲۳) اگر ${}^5P(n, 2) = {}^2C(n, 3)$ باشد، ${}^2C(n, 2)$ کدام است؟ ($n \geq 3$)

- ۱) ۱۳۶ ۲) ۲۷۲ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

۲۴) سه دزد و چهار پلیس را به ترتیب در یک صف کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هیچ دو دزدی کنار هم قرار نگرفته‌اند؟

- ۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{9}{35}$ ۴) $\frac{2}{7}$

۲۵) ۸ نقطه‌ی A، B، C، D، E، F، G و H روی محیط یک دایره قرار دارند. چند چهارضلعی مختلف می‌توان کشید که رئوس آن‌ها از این ۸ نقطه انتخاب شده باشند؟

- ۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

۲۶) با جابه‌جایی ارقام عدد ۴۳۵۳۹۳۳۲ چند عدد هشت رقمی می‌توان تشکیل داد، به طوری که رقم‌های ۳، یک‌درمیان قرار بگیرند؟

- ۱) ۱۱۵۲ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۵۷۶

۲۷) مجموع جواب‌های معادله‌ی $\binom{10}{4+m} = \binom{10}{2m}$ کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۷

۲۸ اگر $c(n, 2) - p(n, 2) = 3^6$ باشد، مقدار $\binom{n}{6}$ کدام است؟

۸۴ (۴)

۱۰۸ (۳)

۹۶ (۲)

۷۲ (۱)

۲۹ در یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۷ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۸ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر)، اگر فردی به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد، اگر به سؤال‌ات ۴ گزینه‌ای حتماً جواب بدهد و بتواند سؤال‌ات ۲ گزینه‌ای را بدون پاسخ رها کند؟

$4^7 \times 3^8$ (۴)

2^{22} (۳)

$5^7 \times 3^8$ (۲)

$4^8 \times 3^7$ (۱)

۳۰ از مجموعه $A = \{2, 3, 6, 9, 8\}$ چند تابع به مجموعه $B = \{1, 3, 6, 7\}$ می‌توان نوشت به طوری که شامل زوج مرتب $(2, 6)$ باشد ولی شامل زوج مرتب $(6, 3)$ نباشد؟

۲۵۶ (۴)

۱۹۲ (۳)

۱۶۰ (۲)

۶۴ (۱)

۳۱ اگر $1 = (x^2 - x^2)!$ ، آنگاه برای x چند مقدار وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۳۲ ۶ نفر به نام‌های a, b, c, d, e و f را به چند طریق می‌توان در یک صف قرار داد به طوری که a و b بعد از e و f در صف قرار بگیرند؟ (a و b الزاماً بلافاصله بعد از e و f نیستند)

۱۸۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۲۴۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

۳۳ با حروف کلمه «اردیبهشت» چند کلمه ۴ حرفی می‌توان می‌توان نوشت که شامل حرف «ش» باشد؟ (بدون تکرار حروف)

۳۱۵ (۴)

۱۲۶۰ (۳)

۲۱۶۰ (۲)

۸۴۰ (۱)

۳۴ ۳ دانش‌آموز کلاس اول، ۵ دانش‌آموز کلاس دوم و ۶ دانش‌آموز کلاس سوم در یک صف کنار هم ایستاده‌اند. در چند حالت دانش‌آموزان کلاس دوم کنار هم هستند؟

$10! \times 5! \times 2$ (۴)

$10! \times 5!$ (۳)

$9! \times 5! \times 2$ (۲)

$5! \times 9!$ (۱)

۳۵ ۲۰ مسافر داخل مترو، به چند طریق می‌توانند در ۷ ایستگاه از قطار پیاده شوند؟

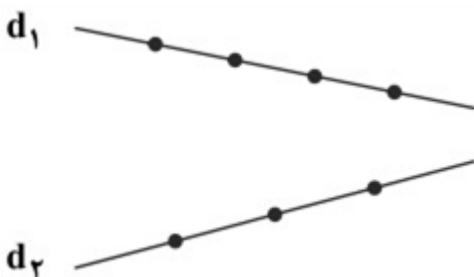
$\frac{20!}{7!}$ (۴)

7^{20} (۳)

$P(20, 7)$ (۲)

20^7 (۱)

۳۶ با استفاده از نقاط واقع شده بر روی دو خط d_1 و d_2 مطابق شکل زیر، چند مثلث می‌توان ساخت؟



۳۵ (۴)

۳۰ (۳)

۲۴ (۲)

۱۵ (۱)

۳۷ فردی برای استفاده از رایانه شخصی خود یک رمز شامل دو حرف a و b و ۴ رقم از بین ارقام ۰، ۱، ۰۰، ۰۰۰، ۰۰۰۰ با الگوی «حرف، رقم، رقم، رقم، حرف» انتخاب کرده است، اما ارقام رمز خود و ترتیب حروف a و b را فراموش کرده است. اگر بخواهد به صورت تصادفی رمز را وارد نماید و وارد کردن هر رمز ۳ ثانیه زمان نیاز داشته باشد، این فرد حداکثر در چه زمانی می‌تواند به اطلاعات رایانه خود دسترسی پیدا کند؟

- ۱) ۶۰۰ دقیقه ۲) ۱۰۰ دقیقه ۳) ۱۰۰۰ دقیقه ۴) ۶۰۰۰۰ دقیقه

۳۸ با ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۹، چند عدد سه‌رقمی فرد با ارقام متمایز و کوچک‌تر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟

- ۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۹ حاصل عبارت $\binom{10}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}$ کدام است؟

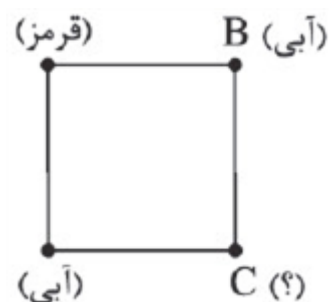
- ۱) $\binom{11}{3}$ ۲) $\binom{12}{3}$ ۳) $\binom{11}{4}$ ۴) $\binom{11}{9}$

۴۰ اگر $\binom{9}{k} = \binom{8}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2}$ باشد، k کدام گزینه می‌تواند باشد؟

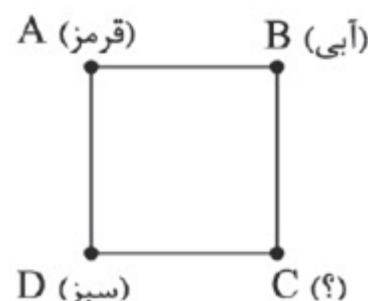
- ۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۷

۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر رنگ آمیزی را از رأس A شروع کنیم، ۳ انتخاب داریم. فرض کنید رأس A را با رنگ قرمز رنگ آمیزی کرده ایم. در این صورت دو حالت مختلف به وجود می آید:
الف) B و D هم رنگ باشند، یعنی هر دو به رنگ آبی یا هر دو به رنگ سبز باشند. مثلاً هر دو را با آبی رنگ آمیزی می کنیم. حال برای C دو انتخاب وجود دارد: قرمز یا سبز.



پس در این حالت برای رأس های B، C و D، $2 \times 2 = 4$ انتخاب وجود دارد.
ب) B و D غیر هم رنگ باشند، در این صورت برای این دو رأس دو انتخاب وجود دارد: یا B آبی می شود و D سبز و یا برعکس. یکی از حالات را بررسی می کنیم:



همان طور که دیده می شود، در این صورت C باید اجباراً با رنگ قرمز رنگ آمیزی شود. بنابراین در این حالت برای رأس های B، C و D، $2 \times 1 = 2$ انتخاب وجود دارد.
بنابراین اگر رأس A قرمز باشد، باقی رأس های مربع به $2 + 2 = 4$ طریق رنگ می شوند.
از طرفی برای خود رأس A، ۳ انتخاب داشتیم، پس تعداد کل انتخاب ها برابر است با:

$$3 \times 4 = 12$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مسیرها و تعداد حالت های رفتن از A به C به صورت زیر است:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \Rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \Rightarrow 2 \times 1 \times 2 = 4$$

$$A \rightarrow D \rightarrow C \Rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$\text{تعداد کل حالت ها} = 4 + 4 + 4 = 12$$

۳

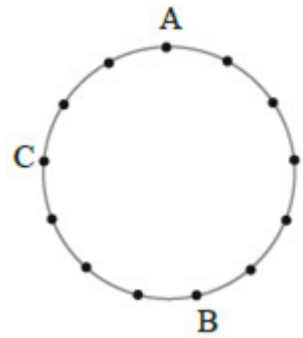
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای اینکه تابع یک به یک داشته باشیم می بایست:

$$f = \{(a, p), (b, \bigcirc), (c, \bigcirc), (d, \bigcirc), (e, \bigcirc), (g, \bigcirc)\}$$



برای $f(a)$ فقط مقدار p وجود دارد. برای $f(e)$ به جز m و p سایر اعضای مجموعه B؛ یعنی ۵ حالت می تواند وجود داشته باشد. $f(b)$ به جز p و مقدار اختصاص داده شده به $f(e)$ سایر مقادیر را می تواند اختیار کند (۵ حالت). برای سایر اعضای دامنه هم به ترتیب ۴، ۳ و ۲ حالت ممکن است. توجه کنید که چون تابع یک به یک است، اعضای برد نمی توانند تکراری باشند.
 $5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$: تعداد حالت ها

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴



چهارضلعی های شامل AB, AC - چهارضلعی های شامل AC + چهارضلعی های شامل AB

$$\underbrace{\binom{5}{2} + \binom{6}{2}}_{25} \quad \underbrace{\binom{9}{2} + \binom{2}{2}}_{37} \quad \underbrace{\binom{3}{1}}_3$$

جواب = ۵۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای پاسخ به ۶ سؤال حالت‌های زیر را می‌بایست بررسی کنیم: ۵

$$(۲ \text{ سؤال } ۴ \text{ گزینه‌ای}) \Rightarrow \binom{5}{4} \times 2^4 \times \binom{10}{2} \times 4^2$$

یا

$$(۵ \text{ سؤال } ۲ \text{ گزینه‌ای}) \Rightarrow \binom{5}{5} \times 2^5 \times \binom{10}{1} \times 4^1$$

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 225 \times 2^4 \times 4^2 + 10 \times 2^5 \times 4^1 = 450 \times 2^7 + 10 \times 2^7 = 460 \times 2^7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶

باید از یک رشته دو نفر انتخاب شوند. داریم:

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{2} = 10 \times 4 \times 3 + 5 \times 6 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 = 120 + 90 + 60 = 270$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷

$$\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)n!} = n+1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)} = \frac{(n+1+1)(n+1-1)}{n+1} = \frac{(n+2)n}{n+1} = \frac{1403 \times 1401}{1402}$$

۴! × ۳! : اول ریاضی بعد فیزیک یک در میان : حالت اول

۴! × ۲! : ریاضی ۲ فیزیک ۳ ریاضی : حالت دوم

۴! × ۲! : فیزیک ۲ ریاضی + فیزیک ۲ ریاضی + فیزیک ۱ : حالت سوم

$$\text{تعداد کل} = 3 \times 4! \times 3! = 432$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸

1

$$2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 4! = 2^4 \times 4!$$


◆

$$x^5 - \left(\binom{5}{1}x^4 - \binom{5}{2}x^3 + \binom{5}{3}x^2\right) = x^5 - (5x^4 - 10x^3 + 10x^2) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 0x + 0 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2.$$

1

۱) $5! \times 3! = 720$ → کاری $\boxed{\text{زخم}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{کل}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{داخل بسته}}$

۲) ریکا $\rightarrow$ ز، خ، م $\rightarrow \underbrace{۴!}_{\text{کل}} = ۲۴$

3) $\frac{3}{3} \frac{6}{3} \frac{5}{3} \frac{4}{3} \frac{3}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{3} \rightarrow 3 \times 6! = 216.$

۴) $\frac{3}{\text{م}}$ $\frac{5}{\text{ک}}$ $\frac{4}{\text{ر}}$ $\frac{3}{\text{ز}}$ $\frac{2}{\text{خ}}$ $\frac{1}{\text{پ}}$ $\rightarrow 9 \times 5! = 1080$

7

$48 \Rightarrow 2! \times 4! \text{ RRAARR}$ تنها ۱ حالت می‌توان متصور شود

3

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\gamma} - 9 = 1 \\ x^{\gamma} - 9 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\gamma} = 10 \Rightarrow x = \pm \sqrt{10} \\ x^{\gamma} = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

3

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$n(S) = 20 \Rightarrow \frac{5}{-} \times \frac{4}{-} = 20 = \text{تعداد کارت‌ها} = \text{تعداد اعداد دو رقمی}$$

$$S = \{12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, \dots, 51, 52, 53, 54\}$$

↑
زوج‌ها

۲ یا ۴

$$A = \{12, 14, 24, 32, 34, 42, 52, 54\}$$

$$B = \{13, 23, 31, 41, 43, 53\} \Rightarrow n(B) = 6$$

چون اعداد زوج بزرگ‌تر از ۲ همگی غیر اول‌اند، پس:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{ناهم‌پوشی}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 + 6 = 14 \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای ساختن عدد ۳ رقمی باید از ۷ رقم داده شده ۳ رقم انتخاب شود و با توجه به شرط

گفته شده در سؤال ترتیب نوشتن ارقام مشخص و با هر مجموعه‌ی ۳ تایی ارقام انتخاب شده فقط یک عدد می‌توان

$$\text{ساخت، پس:} \quad \binom{7}{3} \times 1 = \frac{7!}{3!4!} \times 1 = 35$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با ساده کردن کسر داده شده داریم:

$$\frac{(3!)!}{2! \times 3!} = \frac{(3 \times 2 \times 1)!}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{6!}{3 \times 2 \times 2} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2} = 60$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$\begin{array}{c} \text{انتخاب} \\ \text{۳ ادویه از} \\ \text{۷ ادویه} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{انتخاب} \\ \text{۲ ادویه} \\ \text{غیرقابل مخلوط} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{انتخاب} \\ \text{۱ ادویه} \\ \text{دیگر} \end{array} = \frac{7!}{4!3!} - 5 = \frac{5 \times 6 \times 7}{6} - 5 = 35 - 5 = 30$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸



حالت کلی می‌توان متصور شد.

$$2 \times 2! \times 3! \times 3! = 4 \times 6 \times 6 = 144$$

۱۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر تعداد مدادهایی که به فرد i ام می‌رسد را با x_i نمایش دهیم، تعداد جواب‌ها برابر است با حاصل ضرب تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ با شرط $x_i \geq 1$ در تعداد حالات خودکار که تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$\binom{4-1}{2} = \binom{3}{2} = 3$$

به یک نفر خودکار نرسد

$$3^4 - 3^2 \times 3 + 1^4 \times 3 = 81 - 48 + 3 = 36$$

به دو نفر خودکار نرسد

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 3 \times 36 = 108$$

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چنگال‌ها را می‌چینیم تا نقش دیوار داشته باشند. سپس در ۵ مکان ایجاد شده قاشق‌ها را می‌چینیم.



$$\Rightarrow \binom{5}{4} \times 4! \times 4! = 5 \times 4! \times 4!$$

۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مسئله را در دو حالت حل می‌کنیم.
حالت اول: دو حرف a بین m و n باشند:

$$\text{m a a n b o r l} \quad 2! \times 5! = 240$$

۲! جابجایی بین m و n

حالت دوم: دو حرف a بین m و n نباشند:

یکی از ۴ حرف

$$\text{m a a n b o r l}$$

یکی از ۳ حرف

در این حالت به ۱۲ طریق دو حرف بین m و n قرار می‌دهیم و در کل ۴ شیء داریم و باید جابه‌جایی m و n را هم در نظر بگیریم.

$$2! \times 4 \times 3 \times 4! = 576$$

$$\text{جواب کامل} = 240 + 576 = 816$$

۲۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حروف کلمه هخامنشی ۷! جایگشت دارند که در نصف این تعداد، حرف «خ» قبل از حرف «ش» می‌آید. بین حروف «ه» و «م» و «ن» که در کل ۳! یعنی ۶ حالت در ترتیب دارند، در $\frac{1}{3}$ حالات «ه» بین «م» و «ن» است و در $\frac{2}{3}$ حالات بین آن دو حرف نیست.

$$\text{تعداد حالت مطلوب} = \frac{7!}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7!}{3}$$

۲۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}, P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$2 \times \frac{n!}{(n-3)! \times 2!} = 5 \times \frac{n!}{(n-2)!} = 5 \times \frac{n!}{(n-2)(n-3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2 \times 2} = \frac{5}{n-2} \Rightarrow 2n-4 = 20 \Rightarrow 2n = 24 \Rightarrow n = 12$$

$$\Rightarrow C(12, 2) = \frac{12!}{10! \times 2!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 2!} = 12 \times 6 = 72$$

۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا پلیس‌ها را در صف قرار می‌دهیم که به ۴! حالت جایگشت دارند. سپس در پنج مکان ممکن برای دزدها، ۳ دزد را قرار می‌دهیم.

پلیس

↑

$$\bigcirc p \bigcirc p \bigcirc p \bigcirc p \bigcirc$$

$$\frac{4! \binom{5}{3} 2!}{7!} = \frac{\binom{5}{3} 2!}{7 \times 6 \times 5} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}$$

۲۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رسم چهارضلعی نیاز به رأس است، بنابراین بایستی تعداد حالات انتخاب ۴ نقطه را از بین ۸ نقطه به دست آوریم:

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4!} = 70$$

۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲ حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

یکی این‌که عدد با رقم ۳ شروع شود، دیگری این‌که عدد با ارقام دیگری شروع شود:

$$3 \square 2 \square 2 \square 2 \square$$

اگر عدد با رقم ۳ شروع شود:

در جاهای خالی، هر یک از ارقام ۲، ۴، ۵ و ۹ می‌تواند قرار بگیرد که $4! = 24$ جایگشت دارند.

$$\square 3 \square 2 \square 2 \square 2 \square$$

اگر عدد با ۳ هم شروع نشود، ۲۴ عدد داریم:

طبق اصل جمع، در کل $24 + 24 = 48$ عدد مختلف داریم.

۲۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: $\binom{n}{r} = \binom{n}{p}$ اگر و فقط اگر $r = p$ یا $n = r + p$.

$$\begin{cases} 4 + m = 2m \Rightarrow m = 4 \\ 4 + m + 2m = 10 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها ۶ است.

۲۸ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = 24 \Rightarrow n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = 24 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 24$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 48 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow \binom{9}{6} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{7 \text{ تا}} \times \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{8 \text{ تا}} = 4^7 \times 3^8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰

۲	فقط به ۶	حالت ۱
۳	به همه اعداد	حالت ۴
۶	به همه به جز ۳	حالت ۳
۸	به همه اعداد	حالت ۴
۹	به همه اعداد	حالت ۴

$192 = 4^3 \times 3 \times 1 = \text{تعداد کل حالات}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: طبق تعریف فاکتوریل داریم $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. قرارداد

می‌کنیم: $0! = 1$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$(2x - x^2)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 2 \\ \text{یا} \\ 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

بنابراین ۳ مقدار برای x وجود دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ۴ جای خالی از ۶ جای خالی را انتخاب می‌کنیم که این عمل $\binom{6}{4}$ حالت دارد (در شکل

زیر فقط یک حالت از آن‌ها نشان داده شده است.) سپس: a, b, e و f را به ۴ حالت در ۴ جای خالی انتخاب شده قرار می‌دهیم.

سپس c و d را به ۲! حالت در خانه‌های باقی مانده قرار می‌دهیم.

پس کل حالات برابر است با:

$$\binom{6}{4} \times 4 \times 2! = \frac{6!}{4! \times 2!} \times 4 \times 2! = 15 \times 4 \times 2 = 120$$

e — f — a b

e — f — b a

f — e — a b

f — e — b a

۳۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حرف «ش» می‌تواند در جایگاه اول، دوم، سوم یا چهارم قرار گیرد.

$$\begin{aligned} \underline{\text{ش}} \quad _ \quad _ \quad _ &\Rightarrow 1 \times 7 \times 6 \times 5 \\ _ \quad \underline{\text{ش}} \quad _ \quad _ &\Rightarrow 7 \times 1 \times 6 \times 5 \\ _ \quad _ \quad \underline{\text{ش}} \quad _ &\Rightarrow 7 \times 6 \times 1 \times 5 \\ _ \quad _ \quad _ \quad \underline{\text{ش}} &\Rightarrow 7 \times 6 \times 5 \times 1 \end{aligned} \Rightarrow 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دانش‌آموزان کلاس دوم را کنار هم قرار داده و آن‌ها را ۱ نفر حساب می‌کنیم. در این صورت ابتدا جایگشت $1 + 3 + 6$ نفر را حساب می‌کنیم. سپس حاصل را در جایگشت دانش‌آموزان کلاس دوم در کنار هم، ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} \text{جایگشت ۱۰ نفر} \\ \uparrow \\ 10! \times 5! \\ \downarrow \\ \text{جایگشت ۵ نفر کلاس دوم} \end{array}$$

۳۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر مسافر می‌تواند در ۷ ایستگاه از قطار پیاده شود، پس هر مسافر ۷ حالت دارد:

$$\underbrace{7 \times 7 \times \dots \times 7}_{\text{تا } 20} = 7^{20}$$

۳۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای تشکیل یک مثلث به ۳ رأس نیاز داریم که با توجه به شکل داده شده لازم است دو رأس (نقطه) را از روی یک خط و رأس (نقطه) سوم را از روی خط دیگر انتخاب کنیم. برای این انتخاب دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

الف) ۲ نقطه را از خط d_1 و نقطه سوم را از خط d_2 انتخاب کنیم.

ب) ۲ نقطه را از خط d_2 و نقطه سوم را از خط d_1 انتخاب کنیم.

بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{1! \times 1!} + \frac{4!}{1! \times 3!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} = 6 \times 3 + 4 \times 3 = 30$$

راه حل دوم (روش متمم):

باید تعداد حالاتی را که سه نقطه انتخابی تشکیل مثلث نمی‌دهند، از تعداد کل حالات کم کنیم:

$$\binom{7}{3} - \binom{4}{3} - \binom{3}{3} = 35 - 4 - 1 = 30$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 هر ۳ از d_1 هر ۳ از d_2

۳۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به الگوی داده شده تعداد انتخاب‌های ممکن برای وارد کردن رمز برابر است با:

$$\underbrace{\text{حرف}}_{1} \underbrace{\text{رقم}}_{10} \underbrace{\text{رقم}}_{10} \underbrace{\text{رقم}}_{10} \underbrace{\text{رقم}}_{10} \underbrace{\text{حرف}}_{1} \Rightarrow 2 \times 10^4 = 20000$$

$$\frac{20000}{60} = 333 \text{ ثانیه زمان نیاز دارد، بنابراین این شخص حداکثر } 60000 = 3 \times 20000 \text{ ثانیه که برابر } 1000 \text{ دقیقه}$$

دقیقه است زمان لازم دارد تا بتواند به اطلاعات کامپیوتر خود دسترسی پیدا کند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یکان فرد و صدگان ۱ یا ۳ است: ۳۸

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{9 \times 3} = 6$$

یا $\xrightarrow{\text{اصل جمع}} 6 + 6 = 12$

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{9 \times 1} = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۹

نکته (قاعده‌ی پاسکال): $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

اکنون با جای‌گذاری $\binom{4}{2}$ به جای $\binom{2}{2}$ و استفاده متوالی از قاعده‌ی پاسکال داریم:

$$\underbrace{\binom{4}{2} + \binom{4}{3}}_{\binom{5}{2}} + \binom{5}{3} + \dots + \binom{10}{3} = \underbrace{\binom{5}{2} + \binom{5}{3}}_{\binom{6}{2}} + \binom{6}{3} + \dots + \binom{10}{3} = \underbrace{\binom{6}{2} + \binom{6}{3}}_{\binom{7}{2}} + \binom{7}{3} + \dots +$$

$$\underbrace{\binom{8}{2} + \binom{8}{3}}_{\binom{9}{2}} + \binom{9}{3} + \dots + \binom{10}{3}$$

$$\binom{10}{3} = \dots = \binom{11}{4}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. طبق رابطه‌ی پاسکال که در تمرینات کتاب درسی آمده است داریم: ۴۰

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \Rightarrow \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4} = \binom{9}{k} \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ k=5 \end{cases}$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

