



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم

ریاضی (فصل ۲ مثلثات)

۱ اگر $\sqrt{\sin^2 x (1 + \cot^2 x)} \sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ و $\tan x \times \sin x > 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ربع قرار دارد؟

۴ چهارم

۳ سوم

۲ دوم

۱ اول

۲ اگر زاویه‌ای که خط $x + 3y = n$ با جهت مثبت محور x می‌سازد برابر با α باشد، حاصل $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ چقدر است؟

۴ -۲

۳ ۲

۲ -۱

۱ ۱

۳ اگر $\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha = 0$ باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟ (α در ربع سوم است).

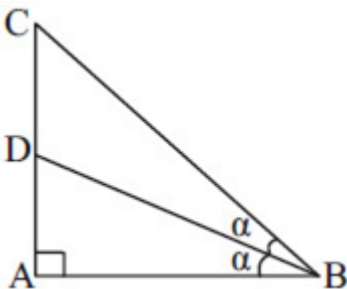
۴ $-\frac{1}{5}$

۳ $-\frac{1}{4}$

۲ $-\frac{1}{3}$

۱ $-\frac{1}{2}$

۴ مطابق شکل مقابل، در مثلث ABC ، BD نیمساز زاویه B است. اگر $AC = 4$ و $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{1}{4}$ باشد، $\tan \alpha$ کدام است؟

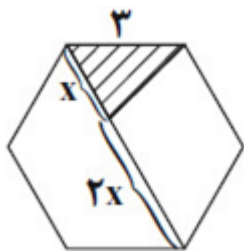


۴ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۲ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱ $\sqrt{2}$



۵ در شش‌ضلعی منتظم مقابل، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

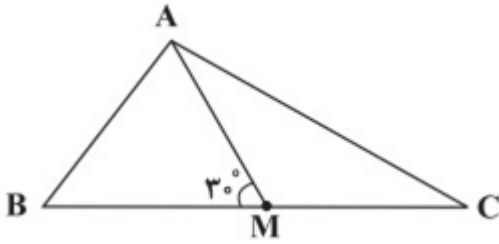
۴ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۳ $3\sqrt{3}$

۲ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۱ $6\sqrt{3}$

۶ در شکل زیر، AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC و $\widehat{AMB} = 30^\circ$ است. حاصل $\cot \widehat{C} - \cot \widehat{B}$ کدام است؟



$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۷ اگر $-30^\circ < \alpha < 30^\circ$ باشد، کمترین مقدار عبارت $8 \cos^2 \alpha - 5$ کدام است؟

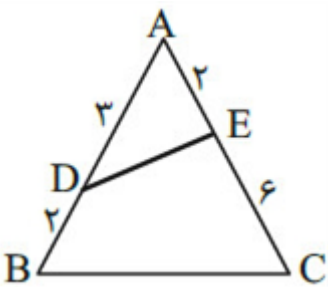
صفر (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

۸ در شکل روبه‌رو مساحت چهارضلعی BDEC چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۷۰ (۴)

۷۵ (۳)

۸۰ (۲)

۸۵ (۱)

۹ اگر α و β کوچک‌ترین جواب مثبت معادلات $10 \sin x = 8$ و $10 \sin x = \sqrt{10}$ باشند، حاصل $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

۱۰ حاصل عبارت $\cot^2 \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta}$ را به ساده‌ترین شکل بیابید.

۲۶ (۴)

۲۸ (۳)

۳۰ (۲)

۳۲ (۱)

۱۲ اگر $\frac{\cos \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{27}}{8}$ باشد آن‌گاه مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟ (انتهای کمان زاویه α در ربع اول دایره مثلثاتی است.)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۱۳ اگر $\cot \alpha = \sqrt{\frac{m}{n} - 1}$ و $\cos \alpha = \sqrt{1 - m}$ باشد، رابطه بین m و n همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

$n = m^2$ (۴)

$n = m^3$ (۳)

$m = n^2$ (۲)

$m = n^3$ (۱)

۱۴ کدام نامساوی برقرار است؟

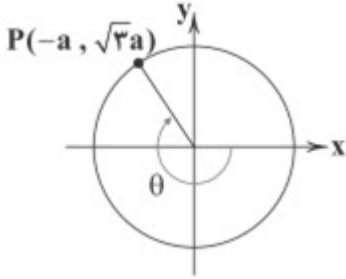
$\cos 120^\circ \cos 220^\circ \cos 320^\circ < 0$ (۲)

$\sin 120^\circ \sin 220^\circ \sin 320^\circ < 0$ (۱)

$\frac{\operatorname{tg} 1^\circ}{\operatorname{Cotg} 1^\circ} > 1$ (۴)

$\operatorname{tg} 120^\circ \operatorname{tg} 220^\circ \operatorname{tg} 320^\circ > 0$ (۳)

۱۵ شکل زیر زاویه θ را نمایش می‌دهد. θ چند درجه است؟



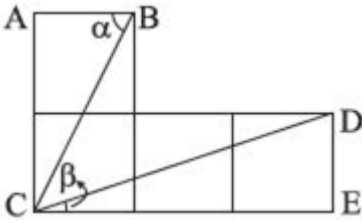
۲۱۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

-۲۴۰ (۲)

-۲۱۰ (۱)

۱۶ شکل زیر از چهار مربع یک ضلع به ضلع تشکیل شده است. حاصل $\operatorname{tg} \alpha + \sin \beta$ کدام است؟



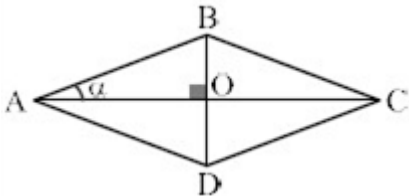
$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$2 + \frac{\sqrt{10}}{10}$ (۲)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}}$ (۱)

۱۷ اگر محیط لوزی زیر برابر ۴۰ واحد و $\sin \alpha = \frac{6}{11}$ باشد، مساحت لوزی چند واحد مربع است؟



۶۹ (۴)

۹۶ (۳)

۲۴ (۲)

۴۸ (۱)

۱۸ با فرض $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $A = \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cotg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{Cotg}^3 x}$ کدام است؟

$\frac{5}{18}$ (۴)

$\frac{5}{16}$ (۳)

$\frac{7}{18}$ (۲)

$\frac{7}{16}$ (۱)

۱۹ در شکل زیر $\text{Cotg } \theta$ کدام است؟



۲ ۵

۱ $\frac{5}{\sqrt{26}}$

۴ $\frac{1}{5}$

۳ $\frac{\sqrt{26}}{5}$

۲۰ اگر انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد،

حاصل عبارت $\frac{\sin \alpha + \sin \alpha \cot^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cot^2 \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$ کدام است؟

۴ $-\cot \alpha$

۳ $\cot \alpha$

۲ -۱

۱ ۱

۲۱ اگر زاویه‌ای در ناحیه چهارم باشد و $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

۴ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۳ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۲ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۱ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

۲۲ اگر $\text{tg } \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}$ کدام است؟

۴ -۲

۳ -۴

۲ ۴

۱ ۲

۲۳ اگر $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد، حاصل $1 + \text{Cotg }^2 x$ کدام است؟

۴ ۵

۳ -۵

۲ $\frac{1}{5}$

۱ $-\frac{1}{5}$

۲۴ حاصل $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۴ ۱

۳ صفر

۲ $\cos^2 \alpha$

۱ $2 \sin^2 \alpha$

۲۵ اگر $A = \cos^2 x - 3 \sin^2 x$ باشد، حدود A کدام است؟

۴ $-4 \leq A \leq 0$

۳ $-3 \leq A \leq 1$

۲ $-4 \leq A \leq -1$

۱ $-2 \leq A \leq 2$

۲۶ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\widehat{A} = 0/75$ و $a = 15$ می‌باشد. محیط این مثلث کدام است؟

۴ ۶۱

۳ ۶۰

۲ ۵۱

۱ ۵۵

۲۷ اگر برای زاویه α داشته باشیم، $\tan \alpha \cdot \sin \alpha > 0$ و $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ حدود α برابر با کدام گزینه زیر می‌تواند باشد؟

۴ $0 < \alpha < 45^\circ$

۳ $45^\circ < \alpha < 90^\circ$

۲ $45^\circ < \alpha < 180^\circ$

۱ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

۲۸ اگر $\cot \theta = 2$ و θ در ربع سوم باشد، $\sin \theta$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۲ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۹ اگر برای زوایای α, β و θ تساوی $\sin \theta = \frac{\cos \beta - 2 \sin \alpha}{5}$ برقرار باشد، $\sin \theta$ برابر با کدام مقدار نمی‌تواند باشد؟

- ۱ $\frac{4}{5}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{7}{10}$

۳۰ اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ، انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار دارد؟

- ۱ اول ۲ دوم ۳ سوم ۴ چهارم

۳۱ حاصل عبارت $A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ صفر ۴ $\tan^2 x + \cot^2 x$

۳۲ اگر $\sin \theta \cdot \cos \theta < 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

- ۱ فقط چهارم ۲ دوم یا سوم ۳ دوم یا چهارم ۴ سوم یا چهارم

۳۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و ارتفاع وارد بر وتر $AH = 3$ واحد است. محیط مثلث کدام است؟

- ۱ $18 + 6\sqrt{3}$ ۲ $6 + 6\sqrt{3}$ ۳ $18 + 18\sqrt{3}$ ۴ $6 + 18\sqrt{3}$

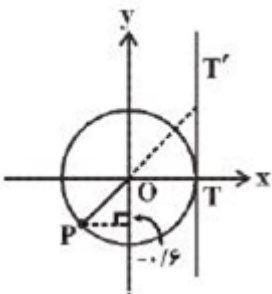
۳۴ کدامیک از نامساوی‌های زیر درست است؟

- ۱ $\sin 10^\circ > \sin 70^\circ$ ۲ $\cos 10^\circ < \cos 70^\circ$ ۳ $\sin 150^\circ > \sin 10^\circ$ ۴ $\cos(-90^\circ) < \cos 150^\circ$

۳۵ حاصل عبارت $\frac{2 \cos^2 45^\circ + 4 \sin^2 60^\circ}{2 - 3 \cot 30^\circ \times \tan 30^\circ}$ کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ ۵ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{4}{3}$

۳۶ در شکل مقابل، عرض نقطه‌ی P که روی دایره‌ی مثلثاتی واقع است، برابر (-0.6) است. مساحت مثلث OTT' کدام است؟



- ۱ $\frac{3}{8}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{4}{3}$

۳۷ عبارت $\tan^2 \theta ((\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1)$ برابر با کدام گزینه است؟

- ۱ $2 \sin^2 \theta$ ۲ $\sin^2 \theta + \tan \theta$ ۳ $\sin^2 \theta$ ۴ $2 \sin^2 \theta \cdot \tan \theta$

۳۸ در تمرین زیر $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ و $\cot \theta$ را بدست آورید، می‌دانیم که θ زاویه‌ی شعاع $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ است.

$$P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

۳۹ در تمرین زیر $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ و $\cot \theta$ را به دست آورید، در صورتی که بدانیم θ زاویه شعاع $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ است.

$$(2, -2)$$

۴۰ در صورتی که بدانیم θ زاویه شعاع $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ است، $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ و $\cot \theta$ را به دست آورید.

$$P(-9, -12)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱

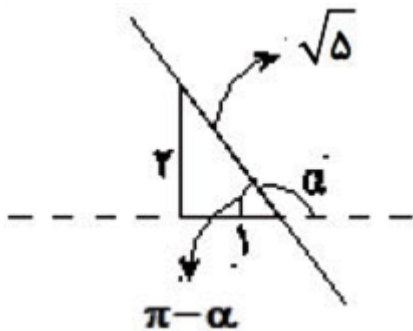
$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\text{همواره مثبت}} \times \sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \sin x < 0 \quad (I) \\ \tan x \times \sin x > 0 &\Rightarrow \tan x < 0 \quad (II) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos x > 0$$

ربع چهارم دایره مثلثاتی چنین شرایطی دارد. $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم. ۲

$$x + 2y = n \Rightarrow 2y = -x + n \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{n}{2} \Rightarrow \text{شیب } m = -\frac{1}{2}$$

بنابراین چون شیب یا در واقع تانژانت منفی است، زاویه α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است.



$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{بنابراین} \quad \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{-1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{\frac{-3}{\sqrt{5}}} = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳

$$\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2 \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\alpha \text{ ربع سوم است})$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BDC}} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times y \times \sin \alpha}{\frac{1}{2} \times y \times z \times \sin \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 2x$$

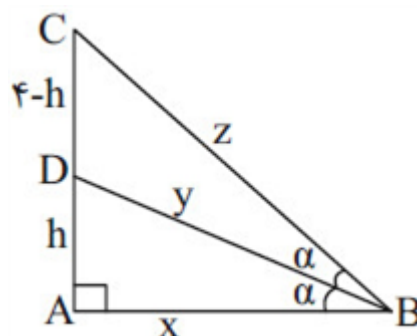
$$z^2 = x^2 + 4^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

از طرفی می‌دانیم:

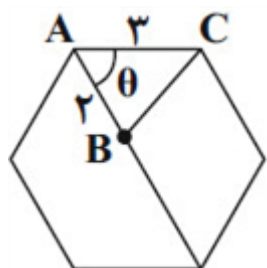
$$\begin{cases} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} xh \\ S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} x(4-h) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} xh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x(4-h) \right) \Rightarrow 2h = 4-h \Rightarrow h = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{h}{x} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

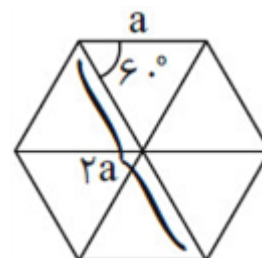


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر در یک شش‌ضلعی منتظم ۳ قطر بزرگ شش‌ضلعی را رسم کنیم، ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌نهشت خواهیم داشت. پس طول قطر بزرگ شکل مقابل دو برابر طول هر ضلع خواهد بود. با توجه به این‌که طول ضلع شش‌ضلعی، ۳ واحد است، پس طول قطر بزرگ آن ۶ واحد خواهد بود.

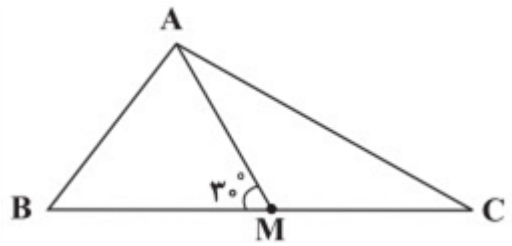
$$x + 2x = 6 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \theta = 60^\circ$$



$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث هاشورخورده} &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، داریم:



$$\cot \hat{C} = \frac{CH}{AH}, \cot \hat{B} = \frac{BH}{AH}$$

$$\cot \hat{C} - \cot \hat{B} = \frac{CH - BH}{AH} = \frac{(CM + HM) - (BM - HM)}{AH} = \frac{CM - BM + 2HM}{AH}$$

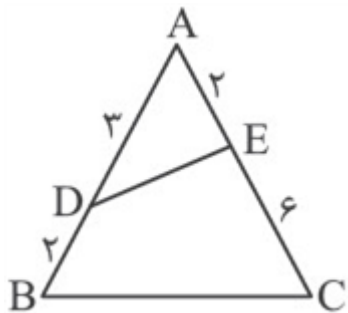
$$\xrightarrow{CM=BM} \cot \hat{C} - \cot \hat{B} = \frac{2HM}{AH} = 2 \cot(\widehat{AMB}) = 2 \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-30^\circ < \alpha < 30^\circ \Rightarrow -60^\circ < 2\alpha < 60^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos 2\alpha \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 \leq -\cos 2\alpha < -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{+5} -3 \leq 5 - \cos 2\alpha < 1 \Rightarrow \min = -3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_{ADE} = \frac{1}{2}(2)(3) \sin \hat{A}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(5)(4) \sin \hat{A}$$

$$\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = \frac{15}{100} = 15\%$$

پس نسبت مساحت ADE به کل برابر است با:

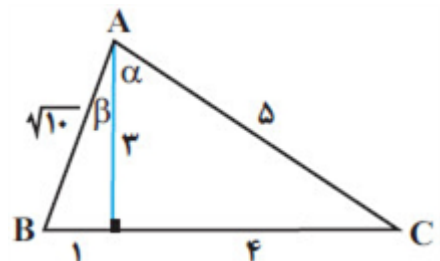
یعنی سهم مثلث ۱۵ درصد و سهم چهارضلعی ۸۵ درصد است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به آن که α و β حاده هستند، پس $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ و به شکل مقابل

می‌رسیم:

با توجه به آن که در شکل $AC = BC$ ، پس:

$$\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan(\hat{B}) = \frac{3}{1} = 3$$



$$\frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} - 2 \cot^2 \theta = \frac{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} - 2 \cot^2 \theta$$

$$= \frac{2}{\sin^2 \theta} - 2 \cot^2 \theta = 2(1 + \cot^2 \theta) - 2 \cot^2 \theta = 2 + 2 \cot^2 \theta - 2 \cot^2 \theta = 2$$

$$\begin{aligned} \text{شیب خط} = \operatorname{tg} \theta &= \frac{-1}{4} \\ \downarrow \\ \operatorname{Cotg} \theta &= \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = -4 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3x + 12y &= 25 \\ \downarrow \\ y &= -\frac{1}{4}x + \frac{25}{12} \end{aligned}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \theta} \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \theta} \Rightarrow \operatorname{Cos}^2 \theta = \frac{16}{17} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \operatorname{Cotg} \theta + 34 \operatorname{Cos}^2 \theta = (-4) + 34 \left(\frac{16}{17} \right) = -4 + 32 = 28$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. همان طور که می‌دانیم $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha}$ ۱۲

$$\frac{\operatorname{Cos} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha}} = \operatorname{Cos}^3 \alpha = \frac{\sqrt{25}}{8} \Rightarrow \operatorname{Cos} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\operatorname{Cos} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}} \operatorname{Sin}^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{Sin} \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع اول}} \operatorname{Sin} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Cotg} \alpha = \frac{\operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

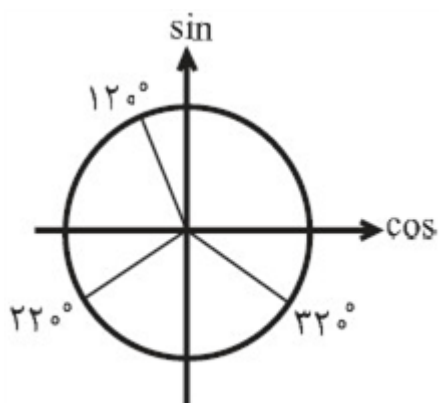
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اتحاد مثلثاتی $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha}$ و $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{Cotg} \alpha}$ خواهیم داشت: ۱۳

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\operatorname{Cotg}^2 \alpha} &= \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \quad (1) \Rightarrow 1 + \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m}{n} - 1} \right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - m^2} \right)^2} \\ \Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{m}{n} - 1} &= \frac{1}{1 - m^2} \Rightarrow 1 + \frac{n}{m - n} = \frac{1}{1 - m^2} \Rightarrow \frac{m - n + n}{m - n} = \frac{1}{1 - m^2} \\ \Rightarrow \frac{m}{m - n} &= \frac{1}{1 - m^2} \Rightarrow m - m^2 = m - n \Rightarrow n = m^2 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به دایره‌ی مثلثاتی: ۱۴

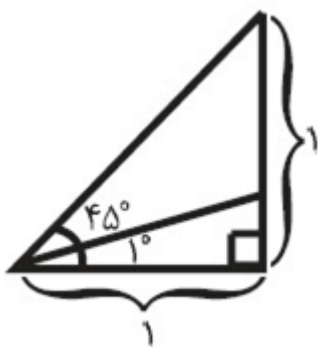
$$\begin{cases} \sin 22^\circ < 0, \sin 32^\circ < 0, \sin 12^\circ > 0 \\ \cos 12^\circ < 0, \cos 22^\circ < 0, \cos 32^\circ > 0 \end{cases}$$

پس داریم:



$$\left. \begin{matrix} \operatorname{tg} 12^\circ < 0 \\ \operatorname{tg} 22^\circ > 0 \\ \operatorname{tg} 32^\circ < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 22^\circ \operatorname{tg} 32^\circ > 0$$

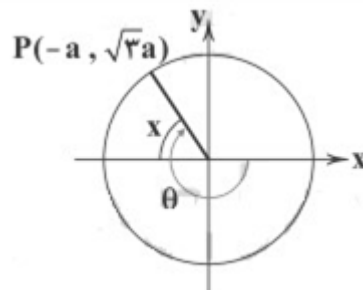
در مورد گزینه‌ی ۴ شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$\frac{\operatorname{tg} 1^\circ}{\operatorname{Cotg} 1^\circ} = \operatorname{tg} 1^\circ < \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\theta = -(180^\circ + x)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً با توجه به شکل: ۱۵



$$\tan x = \frac{|\sqrt{3}a|}{|-a|} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\theta = -(180^\circ + 60^\circ) = -240^\circ$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶

در مثلث CDE با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم: $CD = \sqrt{10}$.

$$\left. \begin{matrix} \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{AB} = 2 \\ \sin \beta = \frac{DE}{CD} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha + \sin \beta = 2 + \frac{\sqrt{10}}{10}$$

۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{محیط لوزی} = 40 = 4 \times AB \Rightarrow AB = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{OB}{10} = \frac{6}{10} \Rightarrow OB = 6$$

در مثلث قائم الزاویه ی AOB داریم:

با استفاده از رابطه ی فیثاغورس در این مثلث خواهیم داشت:

$$OB^2 + AO^2 = AB^2 \Rightarrow 6^2 + AO^2 = 10^2 \Rightarrow AO = 8$$

بنابراین:

$$\text{مساحت لوزی} = 4 \times \text{مساحت مثلث AOB} = 4 \times \frac{1}{2} \times OA \times OB = 2 \times 6 \times 8 = 96$$

۱۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$A = \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cotg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cotg}^2 x} = \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)^2 - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Cotg} x}{(\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)^2 - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Cotg} x} = \frac{2^2 - 2}{2^2 - 2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$x^2 + 5^2 = (\sqrt{26})^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\operatorname{Cotg} \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{5}{1} = 5$$

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ است، پس داریم:

$$\frac{\sin \alpha (1 + \cot^2 \alpha) - \sin^3 \alpha (1 + \cot^2 \alpha)}{\sqrt{\cos^2 \alpha}}$$

$$= \frac{\sin \alpha (1 + \cot^2 \alpha) (1 - \sin^2 \alpha)}{|\cos \alpha|} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \cos^2 \alpha}{-\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha}{-\cos \alpha \sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

دقت کنید چون انتهای کمان α در ربع سوم است، $\cos \alpha < 0$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ خواهد بود.

۲۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه ۴}} \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۲۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافیت که تک تک جملات صورت و مخرج را بر $\cos \alpha$ تقسیم کنیم.

$$\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{3 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 2}{2 \operatorname{tg} \alpha - 3} = \frac{4}{1} = 4$$

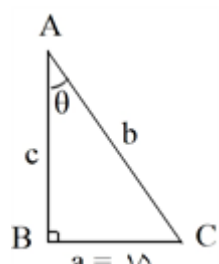
$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Rightarrow \frac{1 + \sin x - (1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \\
 \Rightarrow \frac{\sin x (1 + \sin x)}{1 + \sin x} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\Delta}} = \Delta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \\
 \frac{\cos^2 \alpha \times \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha \times \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \cos^2 x - \underbrace{2 \sin^2 x}_{(1 - \cos^2 x)} = \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 2 + 2 \cos^2 x \\
 \Rightarrow A &= 3 \cos^2 x - 2
 \end{aligned}$$

حال می‌دانیم که کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار $\cos^2 x$ به ترتیب ۰ و ۱ است، بنابراین:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \cos^2 x \leq 1 &\xrightarrow[\text{در ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین نامساوی را ۴ ضرب می‌کنیم}} 0 \leq 4 \cos^2 x \leq 4 \\
 -2 \leq 4 \cos^2 x - 2 \leq 1 &\Rightarrow -2 \leq A \leq 1
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \widehat{tg A} = \widehat{tg \theta} = 0.75 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3}{4} \xrightarrow{a=15} \frac{15}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{60}{3} = 20 \\ 1 + \widehat{tg^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{b^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{b^2}{20^2} \Rightarrow b^2 = \frac{25 \times 400}{16} = 25 \times 25 \Rightarrow b = 25$$

محیط = $a + b + c = 15 + 25 + 20 = 60$

$$\tan \alpha \cdot \sin \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} > 0 \xrightarrow{\sin^2 \alpha > 0} \cos \alpha > 0 \quad (1)$$

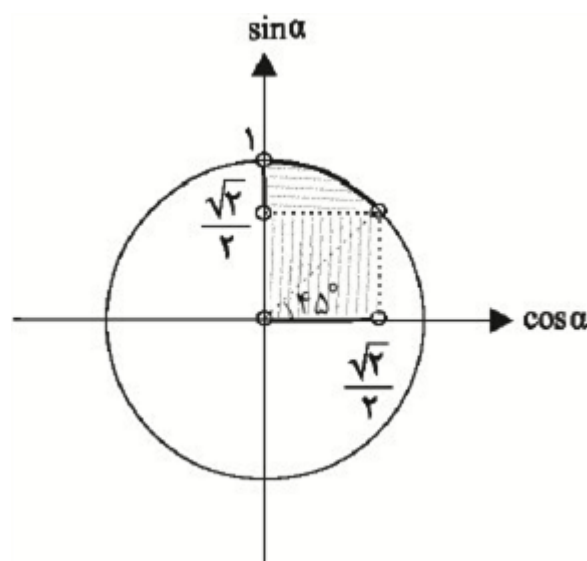
$$\sin \alpha - \cos \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha > \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \sin \alpha > \cos \alpha > 0$$

تنها در ناحیه اول و چهارم است که $\cos \alpha$ مثبت است و از طرفی در دو ناحیه اول و دوم $\sin \alpha$ مثبت است. پس اشتراک آنها ناحیه اول است. مطابق شکل زیر، در ناحیه اول تنها در محدوده $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، رابطه $\sin \alpha > \cos \alpha$ برقرار است.

$$45^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < 1 \\ 0 < \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \cos \alpha < \sin \alpha$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای هر زاویه θ داریم:

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow[\sin \theta < 0]{\theta \text{ در ربع سوم است}} \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای هر زاویه‌ی α و β می‌دانیم:

$$-1 \leq \cos \beta \leq 1 \quad (I)$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \sin \alpha \leq 2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)+(II)} -3 \leq \cos \beta - 2 \sin \alpha \leq 3$$

$$\times \frac{1}{5} \rightarrow -\frac{3}{5} \leq \underbrace{\cos \beta - 2 \sin \alpha}_\theta \leq \frac{3}{5}$$

$$-\frac{3}{5} \leq \sin \theta \leq \frac{3}{5} \quad (*)$$

با توجه به شرط $(*)$ ، $\sin \theta$ نمی‌تواند $-\frac{7}{10}$ باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف به صورت زیر است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

$$\cos \alpha \cot \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} < 0 \xrightarrow{\cos^2 \alpha > 0} \sin \alpha < 0$$

$$\sin \alpha \cos \alpha > 0 \xrightarrow{\sin \alpha < 0} \cos \alpha < 0$$

با توجه به اینکه $\sin \alpha < 0$ و $\cos \alpha < 0$ ، از نکته بالا نتیجه می‌گیریم که α در ناحیه سوم قرار دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راه حل اول: نکته: $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \cot^2 x \times \frac{1}{1 + \cot^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \times \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

راه حل دوم: نکته: $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ، $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \tan^2 x \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} + \cot^2 x \times \frac{1}{1 + \cot^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \times \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

راه حل سوم: نکته: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

$$A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x (1 + \cot^2 x) + \cot^2 x (1 + \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x)}$$

$$= \frac{\tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1}{1 + \tan^2 x + \cot^2 x + 1} = 1$$

۳۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حاصل ضرب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ منفی است، یعنی هر دو مختلف‌العلامت هستند. پس هریک از دو حالت زیر می‌تواند اتفاق بیفتد.

(۱) $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$ که $\left\{ \begin{array}{l} \text{سینوس در ربع اول و دوم مثبت است} \\ \text{کسینوس در ربع دوم و سوم منفی است} \end{array} \right\}$ پس θ در ربع دوم است.

(۲) $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta > 0$ که $\left\{ \begin{array}{l} \text{سینوس در ربع سوم و چهارم منفی است} \\ \text{کسینوس در ربع اول و چهارم مثبت است} \end{array} \right\}$ پس θ در ربع چهارم است.

۳۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Delta ABH: \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{AB} \Rightarrow AB = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

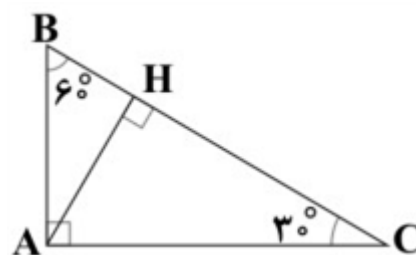
$$\Rightarrow AB = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Delta ACH: \sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = 6$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث } ABC = 2\sqrt{3} + 6 + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 6$$

و بنابه رابطه‌ی فیثاغورس داریم:



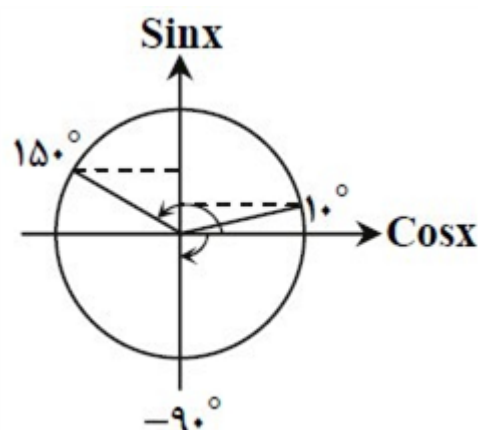
۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به بررسی هریک از گزینه‌ها می‌پردازیم: مطابق دایره‌ی مثلثاتی در ربع اول با افزایش زاویه،

مقدار سینوس افزایش و مقدار کسینوس کاهش می‌یابد پس باید در گزینه ۱، $\sin 10^\circ < \sin 70^\circ$ و در گزینه ۲،

$\sin 150^\circ > \sin 10^\circ$ باشد. به کمک دایره‌ی مثلثاتی و مقایسه‌ی مقادیر $\sin 10^\circ$ و $\sin 150^\circ$ واضح است که $\sin 150^\circ > \sin 10^\circ$

همچنین داریم: $\cos(-90^\circ) = 0 > \cos 150^\circ$. بنابراین تنها گزینه ۳ درست است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: ۳۵

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{Cotg} 30^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{Cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Sin} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مطابق نکته، با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$\frac{2 \operatorname{Cos} 45^\circ + 4 \operatorname{Sin} 60^\circ}{2 - 2 \operatorname{Cotg} 30^\circ \times \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 - 2 \times (\sqrt{3}) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{1+3}{2-2} = -4$$

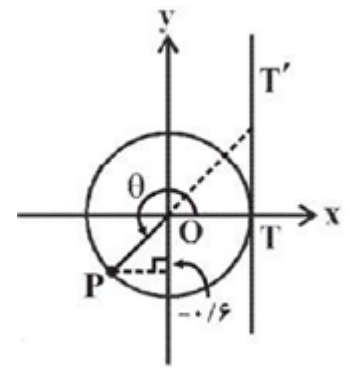
گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{1 - \left(\frac{-6}{10}\right)^2} \Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{100}{64}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{36}{64} \xrightarrow{\tan \theta > 0} \tan \theta = \sqrt{\frac{36}{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow TT' = \frac{3}{4}$$

$$S(\triangle OTT') = \frac{1}{2} OT \times TT' = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1 = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{از طرفی}$$

در نهایت داریم:

$$\text{عبارت} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \sin^2 \theta = 2 \tan \theta \times \sin^2 \theta$$

۳۸

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$$

$$(۲, -۲) \Rightarrow r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۲^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-۲}{۲} = -۱$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{۲}{-۲} = -۱$$

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{(-۹)^۲ + (-۱۲)^۲} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-۱۲}{۱۵} = \frac{-۴}{۵}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-۱۲}{-۹} = \frac{۴}{۳}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-۹}{۱۵} = \frac{-۳}{۵}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-۹}{-۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۳۹

۴۰

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4
33	1	2	3	4

34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4

