



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

زمان آزمون :

نام درس :

نام آموزشگاه :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم

ریاضی (فصل ۱ مجموعه الگو و دنباله)

۱ جملات اول، پنجم و نهم یک دنباله هندسی صعودی که مجموعشان ۸۴ است، به ترتیب جملات دوم، چهارم و دوازدهم یک دنباله حسابی هستند. اختلاف واسطه‌های حسابی و هندسی جملات سوم و هشتم دنباله حسابی کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

۲ دو جمله متوالی دنباله $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}}n^2 - \frac{1}{2^{n-1}}n - 1 & ; n \text{ زوج} \\ \frac{2n}{17} & ; n \text{ فرد} \end{cases}$ برابر عدد صحیح k هستند. مقدار $\sqrt{k} + (a_{17})^{a_{20}}$ کدام است؟

۹ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

۳ در انتخاباتی صدهزار نفر به پنج نامزد طوری رأی داده‌اند که آرای این نامزدها، یک دنباله حسابی تشکیل داده است. اگر مجموع آرای سه نامزد برتر، سه برابر مجموع آرای دو نامزد دیگر باشد، نفر اول، چند رأی از نفر آخر، بیشتر کسب کرده است؟

۲۰۰۰۰ (۴)

۱۵۰۰۰ (۳)

۱۰۰۰۰ (۲)

۵۰۰۰ (۱)

۴ بین اعداد ۴- و ۲۶، نه واسطه حسابی درج کرده‌ایم، واسطه هندسی بین اولین جمله دنباله و اولین جمله درج شده می‌تواند با چندمین جمله درج شده برابر باشد؟

چهارمین (۴)

پنجمین (۳)

دومین (۲)

سومین (۱)

۵ اعداد طبیعی زوج را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شماره آن دسته باشد، مانند: $(۲), (۴, ۶), (۸, ۱۰, ۱۲), (۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۰), \dots$ مجموع جملات دسته بیستم کدام است؟

۸۰۳۰ (۴)

۸۰۲۰ (۳)

۸۰۱۰ (۲)

۸۰۰۰ (۱)

۶ اگر متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ برابر $A \cap B$ باشد، کدام عبارت قطعاً درست است؟ S مجموعه مرجع و ناتهی است.

$B = \emptyset$ یا $A = \emptyset$ (۴)

$A \cup B = S$ (۳)

$A \subseteq B'$ (۲)

$A \subseteq B$ (۱)

۷ جملات x, y, z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و مجموع آنها برابر ۲۱ است. اگر $x + ۶, y + ۴, z + ۲$ یک دنباله هندسی باشد، مقدار $\left[\frac{xy}{z}\right]$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۸ مقدار $a_7 = \frac{17}{12}$ از رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a_1}{a_n} \right)$ تقریبی از $\sqrt{k}$ است. اگر $k \in \mathbb{N}$ و $a_1 = k$ باشد، مقدار k کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به‌ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنباله حسابی است؟

- ۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{8}{5}$ ۳) ۳ ۴) ۴

در یک دنباله حسابی مجموع ۳ جمله اول برابر با ۲۴ و مجموع معکوس جمله دوم با معکوس جمله ششم برابر با $\frac{7}{40}$ می‌باشد، جمله چندم دنباله ۱۳۴ است؟

- ۱) ۴۲ ۲) ۴۳ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

در یک مراسم ازدواج ۷۵ مهمان حضور دارند. اگر ۴۰ نفر از مهمانان فامیل عروس و ۵۵ نفر فامیل داماد باشند، چند نفر فامیل مشترک عروس و داماد هستند؟

- ۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) صفر

اعداد $3^a, \frac{1}{3}, (\sqrt{3})^{-b}, 3^{4a}, \dots$ تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. حاصل $a - b$ کدام است؟

- ۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۲

چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که باقیمانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۵ برابر ۴ باشد؟

- ۱) ۱۷۸ ۲) ۱۷۹ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۸۱

چندمین جمله از دنباله‌ی $\frac{1}{17.1}, \frac{3}{7}, \frac{6}{21}, \frac{3}{63}, \frac{6}{189}, \dots$ برابر $\frac{1}{17.1}$ است؟

- ۱) دهم ۲) هفتم ۳) دوازدهم ۴) نهم

علی در روز اول ۱۵ صفحه از یک کتاب را خوانده و هر روز ۲ صفحه از بقیه‌ی کتاب را مطالعه می‌کند. خواهرش در روز اول ۷ صفحه و هر روز ۳ صفحه از بقیه کتاب را مطالعه می‌کند. در نهمین روز کدام‌یک تعداد صفحات بیشتری مطالعه کرده و چقدر؟

- ۱) علی - ۱ صفحه ۲) خواهرش - ۱ صفحه ۳) علی - ۲ صفحه ۴) هر دو مساوی‌اند.

کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح نیست؟

۱) $N = \{|k| | k \in \mathbb{Z}\}$ ۲) $N = \{-k | k \in \mathbb{Z} - W\}$

۳) $Q' = R - Q$ ۴) $W = N \cup \{0\}$

مجموعه‌ی $A - B$ ، ۷ عضو بیش‌تر از مجموعه‌ی $A \cap B$ دارد. اگر بدانیم تعداد عضوهای مجموعه‌ی $A - B$ دو برابر تعداد عضوهای مجموعه‌ی $B - A$ است و $n(A \cup B) = 23$ ، $n(B - A)$ کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

دنباله‌ی بازگشتی $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1 = -1$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب صد جمله‌ی اول دنباله، کدام است؟

- ۱) -۲۰۱ ۲) -۱۹۹ ۳) -۱۹۷ ۴) ۱۹۷

۱۹ کدام گزینه همواره درست است؟

۱ اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، $A \cap B$ نیز نامتناهی است.

۲ اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، $A - B$ نیز نامتناهی است.

۳ اگر A و B دو مجموعه باشند که $A \subseteq B$ و B نامتناهی باشد، A نیز نامتناهی است.

۴ اگر A و B دو مجموعه باشند که $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، B نیز نامتناهی است.

۲۰ مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند برابر ۱۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۸۳ می‌باشد. کوچک‌ترین عدد کدام است؟

۱ ۵ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۱

۲۱ تعداد شرکت‌کنندگان در یک کنسرت ۶۵ نفر است که ۱۸ نفر آن‌ها هنرمند و ۱۰ نفر برای اولین بار در کنسرت شرکت کرده‌اند. اگر ۶ نفر از هنرمندان حاضر برای اولین بار در کنسرت شرکت کرده باشند، چند نفر از شرکت‌کنندگان نه هنرمند هستند و نه برای اولین بار شرکت کرده‌اند؟

۱ ۳۸ ۲ ۴۳ ۳ ۴۷ ۴ ۳۱

۲۲ اگر مجموعه‌ی A ، اعداد طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰ و مجموعه‌ی B اعداد طبیعی مضرب ۷ و کوچک‌تر از ۱۰۰ باشند، آنگاه تعداد اعضای که به مجموعه‌ی A یا B تعلق دارند کدام است؟

۱ ۴۴ ۲ ۴۰ ۳ ۴۳ ۴ ۴۷

۲۳ جمله‌ی چندم دنباله‌ی حسابی $5, \dots, 4 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}$ ، برابر $47\sqrt{2} - 52$ است؟

۱ ۴۸ ۲ ۴۹ ۳ ۵۰ ۴ ۵۱

۲۴ در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر $\frac{3}{4}$ و مجموع سه جمله بعدی ۶- است. جمله اول دنباله کدام است؟

۱ ۲ ۲ -۲ ۳ $-\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{4}$

۲۵ اگر مجموعه مرجع نامتناهی باشد و مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی باشد، چقدر از مجموعه‌های $A - B$ و $A' \cap B'$ و $A' \cup B$ لزوماً متناهی هستند؟

۱ صفر ۲ یک ۳ دو ۴ سه

۲۶ در دنباله هندسی $8^{2m}, 16^{2m-1}, 4^{m+1}$ مقدار m کدام است؟

۱ ۴ ۲ ۳ ۳ ۲ ۴ ۱

۲۷ اگر $n(A \cap B) = 4$ ، $n(B \cap C) = 0$ ، $n(A \cap C) = 0$ ، $n(A) = 10$ ، $n(B) = 4$ و $n(C) = 7$ باشد، آنگاه $n(A \cup B \cup C)$ کدام است؟

۱ ۲۱ ۲ ۱۴ ۳ ۱۷ ۴ ۱۲

۲۸ اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، کدام یک از گزینه‌های زیر درباره این دو مجموعه نادریست است؟

۱ مجموعه $A \cap B$ ممکن است نامتناهی باشد. ۲ مجموعه $A \cup B$ لزوماً نامتناهی است.

۳ مجموعه $A \cap B$ ممکن است متناهی باشد. ۴ مجموعه $A - B$ لزوماً نامتناهی است.

۲۹) متمم عبارت زیر، کدام گزینه است؟ (A و B زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع U هستند.)
 $(A \cap B) \cup (A \cap (A' \cup B')) = ?$

- ۱) A ۲) A' ۳) U ۴) $\emptyset$

۳۰) در دنباله‌ی حسابی $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots$ ، جمله‌ی اول را با $\frac{8}{3}$ ، جمله‌ی دوم را با $\frac{7}{3}$ ، جمله‌ی سوم را با $\frac{6}{3}$ و ... جمع می‌کنیم. جمله‌ی شصت و پنجم دنباله‌ی جدید چه قدر است؟

- ۱) $\frac{139}{3}$ ۲) ۱۲۵ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

۳۱) در یک جامعه‌ی ۵۰ نفری در سال ۹۶، ۲۰ نفر سفر خارجی و ۴۱ نفر سفر داخلی داشته‌اند. اگر ۱۵ نفر هم سفر داخلی و هم سفر خارجی داشته باشند، چند نفر در سال ۹۶ به مسافرت نرفته‌اند؟

- ۱) ۱۱ ۲) ۶ ۳) ۱۴ ۴) ۴

۳۲) اگر اعداد $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، کدام سه عدد به ترتیب از چپ به راست همواره سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی هستند؟

- ۱) a, b, c ۲) $a, 2b, c$ ۳) a, b^2, c ۴) $\frac{1}{a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{c}$

۳۳) اگر $n(U) = 40$ و A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم، در مجموعه‌ی مرجع U باشند و $n[(A - B) \cup (B - A)] = 30$ باشد، $n(A \cup B)$ کدام است؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۳۴) اگر Z مجموعه‌ی مرجع باشد، آنگاه مجموعه‌ی W' کدام است؟

- ۱) N ۲) $\{-k \mid k \in N\}$ ۳) $Z - N$ ۴) $R - W$

۳۵) کدام مجموعه‌ی زیر، تهی نیست؟

- ۱) $W \cap (Z - N)$ ۲) $N \cap (Z - W)$ ۳) $N \cap (Q - Z)$ ۴) $Z \cap (R - Q)$

۳۶) توپی را از ارتفاع ۳۰ متری رها می‌کنیم. اگر پس از هر بار زمین خوردن ۳۰ درصد دفعه‌ی قبل بالا بیاید، پس از برخورد ۵ ام تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

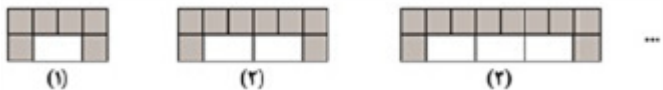
- ۱) $\frac{2187}{5}$ متر ۲) $\frac{729}{5}$ متر ۳) $\frac{2187}{2}$ سانتی‌متر ۴) $\frac{729}{2}$ سانتی‌متر

۳۷) مطابق شکل زیر، مستطیلی در نظر می‌گیریم که طول و عرض آن به ترتیب ۲ و ۱ سانتی‌متر باشند، در داخل آن مجدداً مستطیلی در نظر می‌گیریم که نسبت طول به عرض آن ۲ باشد و در داخل مستطیل پدید آمده این عمل را مجدداً تکرار می‌کنیم. محیط مستطیل حاصل در مرحله‌ی هفتم چه کسری از محیط مستطیل اول است؟



- ۱) $\frac{1}{32}$ ۲) $\frac{1}{64}$ ۳) $\frac{3}{32}$ ۴) $\frac{3}{64}$

۳۸ با توجه به الگوی زیر برای ۷۲ کاشی تیره، چند کاشی سفید لازم است؟



۳۴ (۲)

۳۳ (۱)

(۴) با ۷۲ کاشی تیره چنین شکلی نمی‌توان ساخت.

۳۵ (۳)

۳۹ اگر ۶۰٪ دانش‌آموزان کلاسی عضو تیم فوتبال، ۵۰٪ دانش‌آموز کلاس عضو تیم والیبال باشند و ۵٪ آن‌ها عضو هیچ تیمی نباشند، در این صورت چند درصد دانش‌آموزان عضو هر دو تیم هستند؟

۵ (۴)

۱۰ (۳)

۱۵ (۲)

۲۰ (۱)

۴۰ در یک کلاس مهدکودک از ۳۰ کودک مراقبت می‌شود. مربی آن‌ها از آنان خواست تا رنگ مورد علاقه‌شان را بگویند. ۷ کودک فقط به رنگ قرمز، ۶ کودک فقط به رنگ صورتی و ۴ کودک فقط به رنگ آبی علاقه داشتند و ۲ کودک نیز به هر سه رنگ علاقه داشتند و ۳ کودک نیز به هیچ‌یک از این رنگ‌ها علاقه نداشتند. چند کودک فقط به دو رنگ علاقه دارند؟

۱۱ (۴)

۸ (۳)

۱۴ (۲)

۹ (۱)

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جملات دنباله‌های هندسی و حسابی را به ترتیب با t_n و a_n نمایش می‌دهیم. طبق فرض

$$\begin{cases} t_1 = a_2 \\ t_5 = a_6 \\ t_9 = a_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = a_1 + d \quad (1) \\ t_1 q^4 = a_1 + 3d \quad (2) \\ t_1 q^8 = a_1 + 11d \quad (3) \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{aligned} (2) - (1) & \Rightarrow t_1(q^4 - 1) = 2d \xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} q^4 = 4 \Rightarrow t_1 + t_5 + t_9 = 84 \\ (3) - (2) & \Rightarrow t_1 q^4(q^4 - 1) = 8d \quad (t_1 \neq 0, q \neq 1) \\ \Rightarrow t_1 + t_1 q^4 + t_1 q^8 & = t_1 + 4t_1 + 16t_1 = 84 \Rightarrow 21t_1 = 84 \Rightarrow t_1 = 4 \\ \xrightarrow{t_1(q^4-1)=2d} d & = \frac{4(4-1)}{2} = 6 \\ a_2 = t_1 & = 4 \end{aligned}$$

در دنباله حسابی، جملات سوم و هشتم برابر هستند با:

$$a_3 = a_2 + d = 10, a_8 = a_2 + 6d = 40$$

اختلاف واسطه‌های حسابی و هندسی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \text{واسطه حسابی} = \frac{10+40}{2} = 25 \\ \text{واسطه هندسی} = \sqrt{10 \times 40} = 20 \end{cases} \Rightarrow 25 - 20 = 5$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید از کوچک به بزرگ، به ترتیب، سراغ مضارب فرد عدد ۱۷ برویم. ضمناً ضابطه بالایی (به

ازای n های زوج) را به صورت $\frac{1}{2(n+10)}(n+10)(n-20)$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} a_{50} & = \frac{1}{2 \times 10} (50+10)(50-20) = 9 \\ a_{51} & = \frac{2 \times 51}{17} = 6 \end{aligned} \Rightarrow k = 9 \Rightarrow \sqrt{k} = 3$$

$$a_{17} = \frac{3 \times 17}{17} = 3, a_{20} = 0 \Rightarrow (a_{17})^{a_{20}} = 1 \Rightarrow \sqrt{k} + (a_{17})^{a_{20}} = 3 + 1 = 4$$

توجه: اثبات اینکه به غیر از جملات متوالی پنجاه و پنجاه و یکم، هیچ دو جمله متوالی دیگر برای مقدار صحیح یکسان نیستند را خودتان بررسی کنید.

۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a_3 - 2d + a_3 - d + a_3 + a_3 + d + a_3 + 2d = 100000 \Rightarrow a_3 = 20000$$

$$3a_3 + 3d = 3(2a_3 - 3d) \Rightarrow d = 5000$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{آرای نفر اول: } 30000 \\ \text{آرای نفر آخر: } 10000 \end{array} \right\} \rightarrow a_5 - a_1 = 20000$$

۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا قدرنسبت دنباله حسابی را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{26 - (-4)}{9 + 1} = \frac{30}{10} = 3$$

بنابراین جملات دنباله حسابی به صورت زیر است:

$$-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اولین جمله دنباله: } -4 \\ \text{اولین جمله درج شده: } -1 \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 = (-4)(-1) = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، ۲ همان سومین جمله دنباله حسابی و دومین جمله درج شده است.

۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جملات اول هر دسته به صورت $۲, ۴, ۸, ۱۶, \dots$ می‌باشند که تشکیل یک دنباله درجه دوم

$$a_x = ax^2 + bx + c \quad \text{داده‌اند.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a + b + c = 2 \\ a_2 &= 4a + 2b + c = 4 \\ a_3 &= 9a + 3b + c = 8 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3a + b &= 2 \\ 5a + b &= 4 \end{aligned} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow a_x = x^2 - x + 2 \xrightarrow{a_{20}} \text{جمله اول دسته بیستم} = 400 - 20 + 2 = 382$$

جملات هر دسته تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d = 2$ می‌دهند.

بنابراین آخرین جمله دسته برابر است با $420 = 19 \times 2 + 382$ در یک دنباله حسابی میانگین جملات برابر است با میانگین

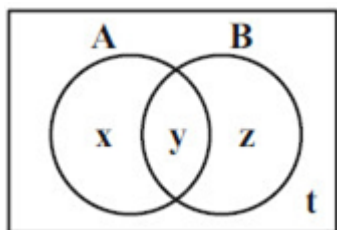
جملات اول و آخر. پس مجموع جملات دسته بیستم برابر است با:

$$20 \times \frac{382 + 420}{2} = 10 \times 802 = 8020$$

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نواحی مختلفی که از مشخص کردن دو مجموعه در نمودار ون پدید می‌آید را نام‌گذاری

می‌کنیم سپس عبارت را براساس نواحی مشخص شده می‌نویسیم.



$$\begin{aligned} ((A - B) \cup (B - A))' &= \{y, t\} \\ A \cap B = \{y\} &\Rightarrow \{y, t\} = \{y\} \Rightarrow \text{در ناحیه } t \text{ هیچ عضوی وجود ندارد} \\ &\Rightarrow A' \cap B' = \emptyset \\ S = (A \cup B) \cup (A' \cap B') &\Rightarrow S = (A \cup B) \cup \emptyset \Rightarrow S = A \cup B \end{aligned}$$

۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ 2y = x + z \end{cases} \Rightarrow y = 7, x + z = 14$$

$$\text{دنباله هندسی} \quad 7 - d, 7, 7 + d \xrightarrow{13 - d, 11, 9 + d} \quad \text{دنباله حسابی}$$

$$11^2 = (13 - d)(9 + d) \Rightarrow d^2 - 4d + 4 = 0 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 2 = 5 \\ y = 7 \\ z = 7 + 2 = 9 \end{cases}$$

$$\left[\frac{xy}{z} \right] = \left[\frac{5 \times 7}{9} \right] = \left[\frac{35}{9} \right] = 3$$

۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بهترین راه حل برای این تست، بررسی تک تک گزینه‌هاست. با فرض:

$$a_1 = k = 2$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n} \left(a_n + \frac{a_1}{a_n} \right) \xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{1} \left(a_1 + \frac{a_1}{a_1} \right) = \frac{1}{1} (2 + 1) = \frac{1}{1} (3) = \frac{3}{1} \\ \xrightarrow{n=2} a_3 &= \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{1} + \frac{2}{\frac{3}{1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{1} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{3} \right) = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

پس: $k = a_1 = 2$

اگر بقیه گزینه‌ها را بررسی کنیم، به $a_3 = \frac{17}{12}$ نمی‌رسیم.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_n - a_1}{4} = d \\ \frac{b_1 - b_2}{5} = d' \end{aligned} \right\} \frac{d'}{d} = \frac{4}{5} \quad \begin{aligned} &b_n: \text{الگوی خطی} \\ &a_n: \text{دنباله حسابی} \end{aligned}$$

$$b_1 = 0 \Rightarrow b_1 + 9d' = 0$$

$$\frac{b_{15}}{d} = \frac{b_1 + 14d'}{d} = \frac{-9d' + 14d'}{d} = \frac{5d'}{d} = 5 \left(\frac{4}{5} \right) = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 24$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3d = 24 \Rightarrow a_1 + d = 8 \Rightarrow a_2 = 8 \quad (1)$$

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_7} = \frac{7}{40} \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{a_7} = \frac{7}{40} \Rightarrow \frac{1}{a_7} = \frac{7}{40} - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_7} = \frac{1}{20} \Rightarrow a_7 = 20 \xrightarrow{(1)} d = 3 \xrightarrow{(1)} a_1 = 5$$

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2 \Rightarrow 3n + 2 = 124 \Rightarrow 3n = 122 \Rightarrow n = 44$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر A فامیل عروس و B فامیل داماد باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = 75, n(A) = 40, n(B) = 55$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 75 = 40 + 55 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 95 - 75 = 20$$

$$t_1 = 3^a, t_2 = 3^{2a} \Rightarrow q^2 = \frac{3^{2a}}{3^a} = 3^a \Rightarrow q = 3^a$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱

$$t_2 = \frac{1}{3} = 3^a \times 3^a \Rightarrow 3^{2a} = 3^{-1} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = (\sqrt{3})^{-b} = \frac{1}{3} \times 3^a \Rightarrow 3^{-\frac{b}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow b = 1$$

$$2a - b = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اولین عدد سهرقمی بخش‌پذیر بر ۵ برابر ۱۰۰ است، پس اولین عدد دنباله‌ی موردنظر ۱۰۴

است. آخرین عدد سهرقمی بخش‌پذیر بر ۵ عدد ۹۹۵ است. پس آخرین عدد دنباله‌ی موردنظر ۹۹۹ خواهد بود.

$$t_n = 104, 109, \dots, 999 \Rightarrow n = \frac{999 - 104}{5} + 1 = 180$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. صورت کسرها، در جملات دنباله، یک در میان ۳ و ۶ هستند. مخرج کسرهای نیز یک دنباله‌ی

هندسی با جمله‌ی اول ۷ و قدرنسبت ۳ می‌باشد. بنابراین برای دنباله با جمله‌ی عمومی a_n داریم:

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{7 \times 3^{n-1}} & n \text{ فرد} \\ \frac{6}{7 \times 3^{n-1}} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{1701} = \frac{6}{7 \times 3^{n-1}} \Rightarrow 7 \times 3^{n-1} = 2 \times 3 \times 7 \times 243$$

اگر $\frac{1}{1701}$ برای n زوج باشد:

$$\Rightarrow 3^{n-1} = 2 \times 3^6 \Rightarrow$$

این رابطه برقرار نیست.

بنابراین برای n فرد داریم:

$$a_n = \frac{1}{1701} = \frac{3}{7 \times 3^{n-1}} \Rightarrow 7 \times 3^{n-2} = 3^5 \times 7 \Rightarrow n = 7$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵

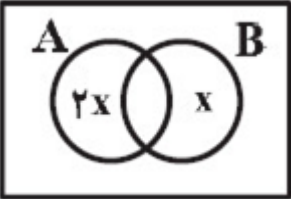
$$\begin{aligned} & \Rightarrow a_1 = a_1 + 8d = 15 + 8(2) = 15 + 16 = 31 \\ & \Rightarrow a_1 = a_1 + 8d = 7 + 8(3) = 7 + 24 = 31 \end{aligned}$$

صفحات خوانده شده علی: ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱, ...
صفحات خوانده شده خواهرش: ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ...

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$\{|k| | k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = W \neq N$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر اگر $n(B - A) = x$ باشد، پس $n(A - B) = 2x - 7$ و $n(A \cap B) = 2x - 7$ عضو دارد. با توجه به این که $n(A \cup B) = 23$ است، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 23 = 5x - 7 \Rightarrow 5x = 30$$


$$\downarrow$$

$$n(A - B) + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow x = 6 \Rightarrow n(B - A) = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چند جمله‌ای اول دنباله را می‌نویسیم: ۱۸

$$\begin{aligned} a_n &: -1, 3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}, \dots = \frac{+1}{-1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots \\ \Rightarrow a_n &= \frac{2n-1}{2n-3} \Rightarrow a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{199} \\ &= (-1) \times \cancel{3} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \dots \times \frac{\cancel{197}}{\cancel{195}} \times \frac{199}{\cancel{197}} = (-1) \times 199 = -199 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty) \Rightarrow A \cap B = \{0\}$$

رد گزینه «۱»:

$$A = W, B = N \Rightarrow A - B = \{0\}$$

رد گزینه «۲»:

از طرفی اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، از آنجا که تمام اعضای مجموعه A در B نیز می‌باشد، بنابراین B نیز نامتناهی است. اما اگر B نامتناهی باشد، نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت A متناهی یا نامتناهی است.

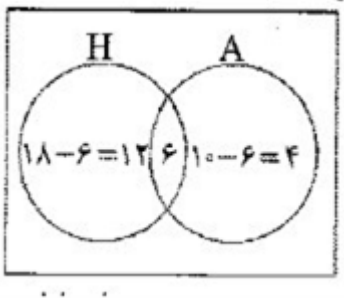
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سه عدد را $b, b+d$ و $b-d$ می‌نامیم. ۲۰

$$\begin{aligned} b-d+b+b+d &= 15 \Rightarrow 3b = 15 \Rightarrow b = 5 \\ (b-d)^2 + b^2 + (b+d)^2 &= 83 \Rightarrow (5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 = 83 \\ \Rightarrow d^2 - 10d + 25 + 25 + d^2 + 10d + 25 &= 83 \\ \Rightarrow 2d^2 + 75 &= 83 \Rightarrow 2d^2 = 8 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = \pm 2 \end{aligned}$$

پس کوچک‌ترین عدد $3 = 5 - 2$ و بزرگ‌ترین عدد $7 = 5 + 2$ می‌باشند.

۲۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اطلاعات سؤال را در نمودار ون وارد می‌کنیم. شرکت‌کنندگان برای اولین بار را با A و هنرمندان را با H نشان می‌دهیم.



با توجه به نمودار ون تعداد شرکت‌کنندگانی که نه هنرمند بوده و نه برای اولین بار آمده‌اند، برابر است با:

$$65 - (12 + 6 + 4) = 43$$

۲۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \{3, 6, 9, \dots, 99\} \Rightarrow n(A) = \frac{99}{3} = 33$$

$$B = \{7, 14, 21, \dots, 98\} \Rightarrow n(B) = \frac{98}{7} = 14$$

مضارب ۲۱ = هم مضرب ۳ و هم مضرب ۷

$$\Rightarrow A \cap B = \{21, 42, 63, 84\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$: تعداد اعضای که به A یا B تعلق دارند

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 33 + 14 - 4 = 43$$

۲۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$d = t_2 - t_1 = (4 + \sqrt{2}) - (3 + 2\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$$

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 = \frac{(52 - 47\sqrt{2}) - (3 + 2\sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}} + 1 = 50$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a + aq + aq^2 = \frac{3}{4}$$

$$aq^2 + aq^3 + aq^4 = -6 \Rightarrow q^2(a + aq + aq^2) = -6$$

$$\frac{a + aq + aq^2}{q^2(a + aq + aq^2)} = \frac{1}{q^2} = \frac{\frac{3}{4}}{-6} = \frac{-1}{8} \Rightarrow q = -2$$

دو عبارت را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$a - 2a + 4a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

با جایگذاری q در رابطه اول، a را هم پیدا می‌کنیم:

۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموعه مرجع نامتناهی است، پس چون A متناهی است، A' نامتناهی است، ولی در مورد

B' نمی‌توان چیزی گفت یعنی اگر B نامتناهی باشد، B' ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد، بنابراین:

$$A - B' = A \cap B \Rightarrow$$

اشتراک مجموعه متناهی A با هر مجموعه‌ای، متناهی است.

$$A' \cap B' \Rightarrow$$

A' نامتناهی است و چون B' نامشخص است، پس نمی‌توان اظهار نظر کرد.

$$A' \cup B \Rightarrow$$

A' نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعه‌ای، نامتناهی است.

پس فقط یک مجموعه از سه مجموعه لزوماً متناهی است.

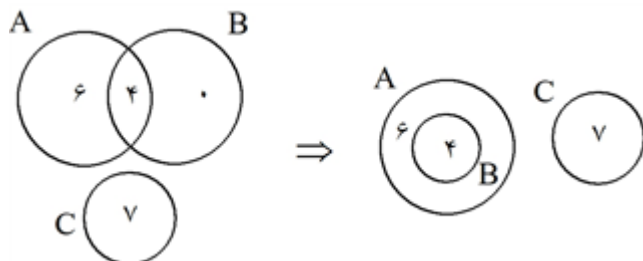
۲۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شرط آن که a, b, c دنباله هندسی بسازند آن است که $b^2 = ac$ باشد.

$$\begin{aligned} ((16)^{2m-1})^2 &= 4^{m+1} \times 8^{2m} \Rightarrow ((2^4)^{2m-1})^2 = (2^2)^{m+1} \times (2^3)^{2m} \\ \Rightarrow 2^{16m-8} &= 2^{2m+2+6m} \\ \Rightarrow 16m-8 &= 2m+2+6m \Rightarrow 8m=10 \Rightarrow m=2 \end{aligned}$$

۲۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون C با A و B اشتراک ندارد، نمودار ون زیر را داریم:



$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 6 + 6 + 7 = 19$$

۲۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تشریح گزینه‌ها:

گزینه «۱»: $\left. \begin{matrix} A = Z \\ B = N \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \cap B = N \Rightarrow$ نامتناهی

گزینه «۲»: چون مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند اجتماع آن‌ها که تمام اعضای A و تمام اعضای B را شامل می‌شود، مجموعه‌ای نامتناهی است.

گزینه «۳»: $\left\{ \begin{matrix} A = \{... و ۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴\} \\ B = \{۴ و ۵ و ۶ و ...\} \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{۴\} \Rightarrow$ متناهی

گزینه «۴»: $\left\{ \begin{matrix} A = \{۳ و ۴ و ۵ و ...\} \\ B = \{۴ و ۵ و ۶ و ...\} \end{matrix} \right\} \Rightarrow A - B = \{۳\} \Rightarrow$ متناهی

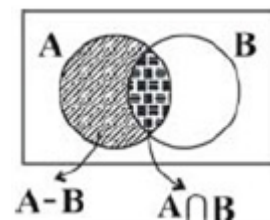
۲۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap (A' \cup B')) &= (A \cap B) \cup (A - (A \cap B)) \\ &= (A \cap B) \cup (A - B) \\ \Rightarrow (A \cap B) \cup (A - B) &= A \Rightarrow A_{\text{متمم}} = A' \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap (A' \cup B')) &= (A \cap B) \cup (A - B) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') \\ &= A \cap U = A \Rightarrow A_{\text{متمم}} = A' \end{aligned}$$



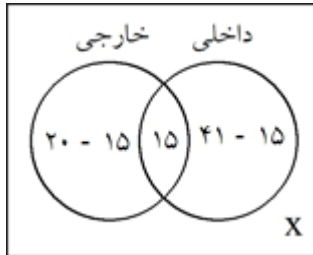
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اعداد $\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{6}{3}, \dots$ خود تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ می‌دهند، بنابراین

داریم:

$$\begin{aligned} 1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \dots \Rightarrow a_1 &= 1, d = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow a_{\frac{1}{3}} = a_1 + \frac{1}{3}d \Rightarrow a_{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{13}{9} \\ \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{6}{3}, \dots \Rightarrow a'_1 &= \frac{8}{3}, d' = \frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a'_{\frac{1}{3}} = a'_1 + \frac{1}{3}d' \Rightarrow a'_{\frac{1}{3}} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{23}{9} \Rightarrow \text{جمله ام دنباله جدید} = a_{\frac{1}{3}} + a'_{\frac{1}{3}} = \frac{13}{9} + \frac{23}{9} = \frac{36}{9} = 4 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. A ← سفر داخلی

B ← سفر خارجی



$$\begin{aligned} n(U) &= 50 \\ n(A) &= 41 \\ n(B) &= 20 \\ n(A \cap B) &= 15 \end{aligned}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 41 + 20 - 15 = 46 \Rightarrow n(A' \cap B') = n((A \cup B)')$$

$$= n(U) - n(A \cup B) = 50 - 46 = 4 \quad A' \cap B' \text{ مجموعه‌ی افرادی است که مسافرت نرفته‌اند:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$n, m, I \Rightarrow 2m = I + n$$

$$n, m, I \Rightarrow m^2 = nI$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c} : \frac{2}{2b} &= \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{b-c+b-a}{(b-a)(b-c)} \\ \Rightarrow \frac{1}{b} &= \frac{2b-a-c}{b^2-bc-ab+ac} \Rightarrow 2b^2 - \cancel{ab} - \cancel{bc} = b^2 - \cancel{bc} - \cancel{ab} + ac \\ \Rightarrow 2b^2 - b^2 &= ac \Rightarrow b^2 = ac \end{aligned}$$

a, b, c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی اند $\Rightarrow$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$B, A \Rightarrow A - B = A, B - A = B \Rightarrow n[(A - B) \cup (B - A)] = 30$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 30$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$W' = \{-1, -2, -3, \dots\} = \{-k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

۳۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$Z - N = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \quad \text{گزینه ۱:}$$

اشتراک این مجموعه با مجموعه اعداد حسابی که برابر $\{0, 1, 2, \dots\}$ است، مجموعه‌ی تک عضوی $\{0\}$ است.

$$Z - W = \{\dots, -3, -2, -1\} \quad \text{گزینه ۲:}$$

این مجموعه با مجموعه اعداد طبیعی اشتراک ندارد، پس:

$$N \cap (Z - W) = \emptyset$$

گزینه ۳: مجموعه $Q - Z$ ، اعداد گویایی را نمایش می‌دهد که صحیح نباشد، لذا با N اشتراکی ندارند و در

$$N \cap (Q - Z) = \emptyset \quad \text{نتیجه:}$$

$$R - Q = Q' \quad \text{گزینه ۴:}$$

چون Q' (مجموعه‌ی اعداد گنگ) با مجموعه‌ی اعداد صحیح اشتراک ندارد، پس:

$$Z \cap (R - Q) = \emptyset$$

۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$h_1, h_2 = \frac{1}{3}h_1, h_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 h_1, \dots \Rightarrow \text{پس از برخورد } n \text{ ام } h_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n h_1$$

پس از برخورد دوم پس از برخورد اول

$$h_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 h_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 30 = 3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 30$$

$$= 3^6 \times 10^{-4} = 0.0729 \text{ متر} = 7.29 \text{ سانتی‌متر}$$

۳۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نسبت طول به عرض در مستطیل اول ۲ است و در مستطیل دوم نیز این نسبت ۲ است، لذا

اضلاع مستطیل دوم ۱ و $\frac{1}{2}$ و در مستطیل سوم اضلاع $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ خواهند بود، لذا در هر مرحله، اضلاع $\frac{1}{4}$ برابر می‌شوند. درمرحله‌ی هفتم، اضلاع $\frac{1}{4}$ برابر اضلاع اولیه می‌شود، پس محیط مستطیل در مرحله‌ی هفتم برابر است با:

$$P_7 = \frac{1}{4}(P_1) \Rightarrow P_7 = \frac{1}{64}P_1$$

۳۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تعداد کاشی‌های تیره در شکل n ام را با a_n و تعداد کاشی‌های سفید در شکل n ام را با b_n نمایش دهیم، داریم:

$$a_n : 6, 8, 10, \dots \Rightarrow a_n = 2n + 4$$

$$b_n : 1, 2, 3, \dots \Rightarrow b_n = n$$

حال مرحله‌ای را که در آن تعداد کاشی‌های تیره برابر ۷۲ می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$a_n = 72 \Rightarrow 2n + 4 = 72 \Rightarrow 2n = 68 \Rightarrow n = 34$$

بنابراین:

$$b_{34} = 34$$

۳۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تعداد کل دانش‌آموزان را x در نظر بگیریم و دانش‌آموزان عضو تیم فوتبال را با مجموعه‌ی A و دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با B نمایش دهیم، داریم:

$$n(A \cup B)' = \frac{5}{100}x, n(A) = \frac{60}{100}x, n(B) = \frac{50}{100}x \Rightarrow n(A \cup B) = x - n((A \cup B)')$$

$$x - \frac{5}{100}x = \frac{95}{100}x$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow \frac{95}{100}x = \frac{60}{100}x + \frac{50}{100}x - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = \frac{60}{100}x + \frac{50}{100}x - \frac{95}{100}x = \frac{15}{100}x$$

در نتیجه ۱۵٪ دانش‌آموزان عضو هر دو تیم هستند.

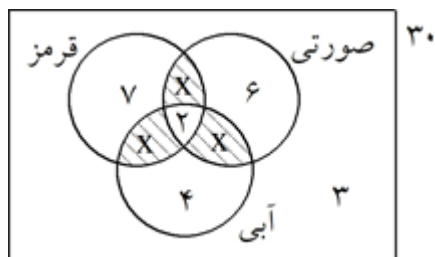
۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) +$$

$$n(A \cap B \cap C)$$

$$30 - 3 = 27 = 6 + 7 + 4 + x + 2 \Rightarrow x = 8$$



1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

