



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

عنوان آزمون : بانک تست حسابان سال یازدهم تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱
ریاضی (فصل ۵ حد و پیوستگی)

۱) تابع ناصفر f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3}|ax+a|}{|x^3+(m-2)x+a^2|}$ روی $R - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) تابع پیوسته f یک به یک بوده و وارون خود را فقط در نقطه $A(a, f(a))$ قطع می‌کند. اگر $f(0) = 2$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) a ۴) $f'(a)$

۳) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x-1}-2}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) ۵ ۴) صفر

۴) اختلاف حد چپ و راست تابع $f(x) = \left[\frac{1}{\cos(\pi x)} \right] x^2 - \left[4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right) \right] x^2$ در $x = 3$ کدام است؟ ([] : نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۵

۵) اگر $f(x) = \begin{cases} m[3x-7] - 4a + 3m & x \geq 3 \\ 2b[x^2-3x] - 3a + 2 & x < 3 \end{cases}$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد، حاصل $\frac{f(b^3-m)}{a}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۲ ۴) ۲

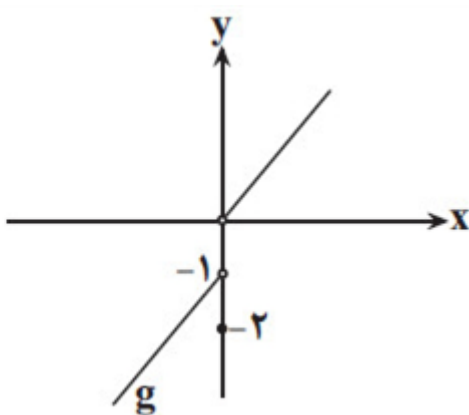
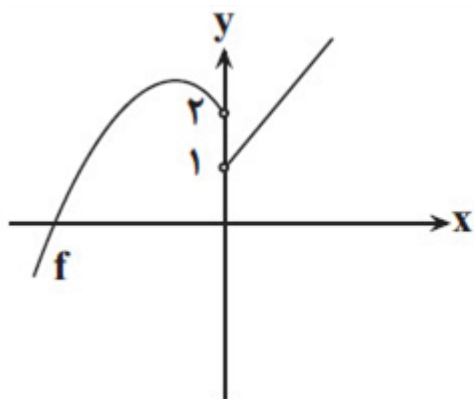
۶) اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - \sqrt{x+m}}{\sqrt{1-\cos \pi x}} = n$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - \sqrt{x+m}}{\sqrt{1-\cos \pi x}}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ ($n \in \mathbb{R}$)

۱) $-\frac{105}{4}$ ۲) $-\frac{35}{12}$ ۳) $\frac{35}{12}$ ۴) $\frac{105}{4}$

۷) مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} - 4}{x-3}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۸ اگر نمودارهای دو تابع f و g به صورت زیر باشند، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ کدام است؟



۴ وجود ندارد.

۳ ۱

۲ ۰

۱ -۱

۹ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a + [x] & x < 0 \\ b(-1)^{\left[\frac{x+1}{x+2}\right]} & x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

([] نماد جزء صحیح است.)

۴ -۱

۳ ۱

۲ $\sqrt{2}$

۱ $-\sqrt{2}$

۱۰ اگر در ریشه‌ای از معادله $x^2 - ax + b = 0$ ، حد تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ موجود بوده و تابع f در آن

پیوسته نباشد، مقدار $\left[\frac{b - 2a}{3}\right]$ کدام است؟

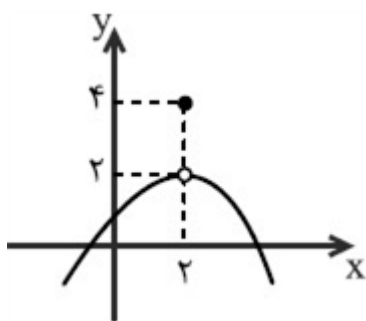
۴ صفر

۳ ۱

۲ -۲

۱ -۳

۱۱ با توجه به شکل مقابل، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]$ کدام است؟ ([] ، [] نماد جزء صحیح است.)



۴ ۲

۳ -۱

۲ ۱

۱ صفر

۱۲ دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{[x] + [-x]}$ یک همسایگی محذوف کدام مقدار است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۴ هیچ کدام

۳ -۱

۲ ۱

۱ صفر

۱۳) حد راست تابع $f(x) = [-x] [-x^2]$ در $x = 2$ چقدر است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۱۴) اگر $f(x) = [x] + [-x]$ به طوری که $y = |f(x) + k|$ در تمام R پیوسته باشد، مقدار k کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۵) حد عبارت $\frac{1}{x^2} \left(1 - x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right] \right)$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) حد ندارد.

۱۶) تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & x > \pi \\ a \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) & x \leq \pi \end{cases}$ در $x = \pi$ پیوسته است. حاصل $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ چقدر است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ برابر کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}} - 2}{x-1}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۱۹) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{\sqrt{x}-14}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $-\frac{1}{7}$ ۳) حد ندارد ۴) صفر

۲۰) تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} & , x > 1 \\ a \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & , x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در R پیوسته است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱) اگر $b \in R$ و $b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + ax}}{x^2 - 3x + 2}$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۲۲ با فرض $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x - \sqrt{2}x}$ ، برای $\lim_{x \rightarrow 0} f(2 - x^2)$ ، اختلاف مقادیر حد چپ و راست کدام است؟

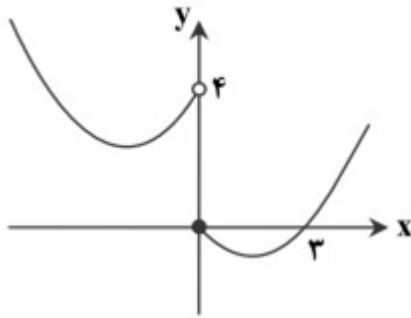
۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۲۳ شکل مقابل، نمودار تابع $y = f(x)$ است. کدام گزینه نادرست است؟



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ (۱)

۲۴ اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد ولی تابع g در $x = a$ فاقد حد باشد، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

$\frac{f}{g}$ در $x = a$ حد ندارد. (۱) $\frac{g}{f}$ در $x = a$ حد ندارد. (۲)

fg در $x = a$ حد دارد. (۳) fg در $x = a$ حد ندارد. (۴)

۲۵ تابع $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} & x \geq a \\ 3x + a & x < a \end{cases}$ به ازای چه مجموعه مقادیر a در $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

$\{+1, -1\}$ (۱) $\{+1\}$ (۲) $\{-1\}$ (۳) هیچ مقدار a (۴)

۲۶ حاصل $A = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{[x] \cos^2 x + \sin^2 x} \times \frac{2}{\cos x + \sin x}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

وجود ندارد. (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴)

۲۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + \sqrt{x + 2}}$ کدام است؟

صفر (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{-4}{3}$ (۳) ۱ (۴)

۲۸ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{[4 \sin^2 \pi x] - 6x}{ax + b} = \frac{1}{4}$ باشد حاصل $a + b$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

-۸ (۱) -۱۲ (۲) -۱۶ (۳) -۲۴ (۴)

۳۹ اگر $f(x) = \begin{cases} ax + a^2 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد داشته باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۲ ۳ -۲ ۴ -۱

۳۰ اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{mx^3 + 3x + mx^2 + 3}{x^2 - (2m - 1)x - 2m} = -1$ مقدار m کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ -۲ ۳ ۱ ۴ -۱

۳۱ مقدار $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x + \cos 2x}{(x - \pi)^2}$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

- ۱ $\frac{5}{4}$ ۲ $\frac{5}{2}$ ۳ $-\frac{5}{4}$ ۴ $-\frac{5}{2}$

۳۲ حد راست تابع $f(x) = \frac{\sqrt{\cos 3x - \cos x}}{\sin 3x - \sin x}$ در $x = \pi$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $-\sqrt{2}$ ۳ -۱ ۴ ۱

۳۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 - \sqrt{5 - x}}{x - 1}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{5}{2}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $\frac{5}{4}$ ۴ $\frac{3}{4}$

۳۴ تابع $y = \lfloor \cos x \rfloor$ در چند نقطه از بازه $(0, 2\pi)$ ناپیوسته است؟

- ۱ هیچ ۲ یک ۳ دو ۴ سه

۳۵ تابع $f(x) = [x] + \sqrt[n]{(x - [x])^n}$ در $x = 1$ چگونه است؟ $[]$ ، علامت جزء صحیح است، $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

۱ فقط پیوستگی راست دارد. ۲ فقط پیوستگی چپ دارد.

۳ پیوسته است. ۴ نه از راست پیوسته و نه از چپ پیوسته است.

۳۶ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} [\sqrt{3} \cot x] + a & x > \frac{\pi}{6} \\ \cos 2x + \sin x & x = \frac{\pi}{6} \\ [-2 \cos 2x] - b & x < \frac{\pi}{6} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ پیوسته باشد، ab کدام است؟
($[]$ نماد جزء صحیح است.)

- ۱ ۳ ۲ -۳ ۳ ۲ ۴ -۲

۳۷ تابع $y = [5x] - [10x]$ در بازه $[3, 4]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

- ۱ ۵ ۲ ۱۰ ۳ ۱۵ ۴ ۱

۳۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^2 x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ برابر کدام است؟

۴) $2\sqrt{2}$

۳) ۲

۲) $-\sqrt{2}$

۱) $-2\sqrt{2}$

۳۹) حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + \sqrt{x + 2}}$ کدام است؟

۴) ۱

۳) $-\frac{4}{3}$

۲) $\frac{4}{3}$

۱) صفر

۴۰) حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} [2 \cos x - 1]$ کدام است؟ () نماد جزء صحیح است.)

۴) وجود ندارد.

۳) -۱

۲) ۱

۱) صفر

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}|a||x+1|}{|x^2 + (m-2)x + a^2|}$$

$$\left. \begin{aligned} a \notin D_f \Rightarrow x = a \Rightarrow (x = a \text{ در مخرج کسر}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{موجود} \end{aligned} \right\} \text{حد صورت} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{3}|a||a+1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ می شود} \\ \text{یا} \\ a = -1 \checkmark \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^2 + (m-2)x + 1|}$$

$$x = -1 \Rightarrow |-1 + (m-2)(-1) + 1| = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^2 + 1|} = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^2 - x + 1|} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون بین f و f^{-1} یک نقطه برخورد است پس این نقطه برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad \text{یعنی: } f(a) = a \text{ در ضمن } a \neq 0 \text{ چون } f(0) = 2 \text{ پس:}$$

تذکر: در اصل سؤال کلمه «فقط» وجود نداشت که در این صورت سؤال ایراد پیدا می کرد و جواب هر عددی می توانست بشود. مثلاً:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} & & f \\ (2, 0) & \text{یکی از نقاط برخورد } f \text{ و } f^{-1} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & f(a) \end{array}$$

۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه هوییتال کمک می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = \frac{1 + \frac{2}{2}}{4} = \frac{5}{12}$$

۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= [2^+] (9) - [(-1)^-] (3) = 18 + 6 = 24 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= [2^-] (9) - [(-1)^-] (3) = 9 + 6 = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9$$

۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

(۱): تابع دارای جزء صحیح، زمانی پیوسته می شود که ضریبش صفر باشد: $b = 0, m = 0$

(۲): زمانی یک تابع چندضابطه ای پیوسته می شود که ضابطه بالا و پایین آن در نقطه مرزی برابر باشند:

$$-4a = -3a + 2 \Rightarrow a = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 8 & x \geq 3 \\ 8 & x < 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(b^2 - m)}{a} = \frac{f(0)}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حد مخرج صفر است، پس حد صورت هم باید صفر باشد:

$$2(2) - \sqrt{2+m} = 0 \Rightarrow m = 14$$

حال حاصل حد را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2x - \sqrt{x+14}}{\sqrt{1-\cos \pi x}} \times \frac{2x + \sqrt{x+14}}{2x + \sqrt{x+14}} \times \frac{\sqrt{1+\cos \pi x}}{\sqrt{1+\cos \pi x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2}(4x^2 - x - 14)}{8|\sin \pi x|} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi(x-2)(4x+7)}{\sin \pi(x-2)} = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \left(\lim_{x \rightarrow 2} (4x+7) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi(x-2)}{\sin \pi(x-2)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \times 15 \times 1 \Rightarrow n = \frac{15\sqrt{2}}{8\pi} \\ mn\pi &= \frac{14 \times 15\sqrt{2}}{8} = \frac{105}{4} \sqrt{2} \end{aligned}$$

در نهایت داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x-2} - 2 + \sqrt{x+1} - 2}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(\sqrt{x-2}-1)\frac{(\sqrt{x-2}+1)}{\sqrt{x-2}+1} + (\sqrt{x+1}-2)\frac{(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}+2}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2(x-2)}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x+1}+2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از روی هر دو نمودار مشخص است که توابع f و g در نقطه $x=0$ حد ندارند، اما ممکن

است تابع مجموع آنها در این نقطه حد داشته باشد:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 + 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2 + (-1) = 1 \end{aligned}$$

چون حدهای راست و چپ در نقطه $x=0$ برای تابع مجموع، یک مقدار یکسان به دست آمد، بنابراین می‌توان

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 1 \quad \text{نوشت:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} &\xrightarrow{1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2}x}{|x|} = \sqrt{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} a + [x] &= a + \left[\cdot^- \right] = a - 1 \\ a - 1 &= \sqrt{2} \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \\ b &= \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - b = (1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 1$$

گزینه ۱۰ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{ریشه} = 1 &\Rightarrow 5 - a + b = 0 \Rightarrow a - b = 5 \\ \text{ریشه صورت } f &= 1 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \\ \left[\frac{b - 2a}{3} \right] &= \left[\frac{-3 - 4}{3} \right] = -3 \end{aligned}$$

تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x = 1$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x = 1$ صفر شود، در غیر این صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ بنابراین:

با توجه به نمودار تابع f ، اگر x با مقادیر کمتر از ۲ یا بیشتر از ۲، به ۲ نزدیک شود، تابع f با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، بنابراین $1 < f(x) < 2$ ، در نتیجه: $[f(x)] = 1$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = 1$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] \right] - \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = 2 - 1 = 1 \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۱۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{[x] + [-x]} \\ \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ [x] + [-x] \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \end{cases} &\Rightarrow \text{دامنه تابع} = (-1, 1) - \{0\} \end{aligned}$$

دامنه این تابع یک همسایگی محذوف $x = 0$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [-x] [-x^2] = [-(2^+)] [-(4^+)] = [(-2)^-] [(-4)^-] = (-3)(-5) = 15$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک تعریف تابع f داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس:

$$y = |f(x) + k| = \begin{cases} |k - 1| & x \notin \mathbb{Z} \\ |k| & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

برای آن که y در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید در نقاط صحیح پیوسته باشد، پس:

$$|k| = |k - 1| \Rightarrow k - 1 = -k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱۵ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(1 - x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right] \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \left[\frac{1}{x^2} \right] \right)$$

با تغییر متغیر $\frac{1}{x^2} = t$ ، حد بالا به صورت $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t - [t])$ است. $y = t - [t]$ یک تابع متناوب است و توابع متناوب غیرثابت در بی‌نهایت حد ندارند.

۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. لازم است مقدار تابع و حدود چپ و راست تابع در $x = \pi$ با هم برابر باشند:

$$f(\pi) = a \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} a, \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}}{x - \pi} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)}{x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

پس باید:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}}\right) = 1 \cos\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

در این صورت:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۷

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{1 - \sqrt{1 + x^2}} &\times \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)(2)(2)}{-x^2} = -12 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 = -12 \times \frac{1}{4} = -3 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۸

$$\begin{aligned} P &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3 + \sqrt{x}} - 2)(\sqrt{3 + \sqrt{x}} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{3 + \sqrt{x}} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \sqrt{x} - 4}{4(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{4(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی است حد چپ و راست و مقدار تابع را در $x = 1$ با هم مساوی قرار بدهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(a \sin \frac{\pi}{2} x\right) = a \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} \stackrel{(*)}{\rightarrow} \frac{a}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow a = 2$$

۲۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد مخرج در نقطه‌ی $x = 1$ برابر صفر است، پس برای این که حاصل حد عبارت کسری عدد حقیقی شود، لازم است حد صورت نیز در نقطه‌ی $x = 1$ برابر صفر شود.

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{1^2 + a} = 0 \Rightarrow a = 3$$

حال حد موردنظر به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3x}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} \text{ ابهام}$$

با استفاده از قاعده‌ی هسپیتال داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3x}}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}{2x-3} = \frac{-\frac{5}{4}}{-1} = \frac{5}{4} \Rightarrow b = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow a - b &= 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

۲۲

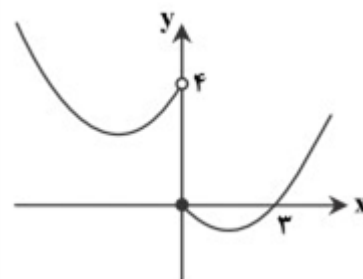
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر $x \rightarrow 0$ ، آن گاه $x^2 \rightarrow 0^+$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(2 - x^2) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - \sqrt{2x}} = \frac{0}{0} \text{ (مبهم)} \\ \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x - \sqrt{2x}} \times \frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)(x + \sqrt{2x})}{x^2 - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)(x + \sqrt{2x})}{x(x-2)} = \frac{-16}{2} = -8 \end{aligned}$$

بنابراین چون حاصل حد راست و چپ یکسان است در نتیجه حاصل تفاضل آنها برابر صفر است.

۲۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



توجه کنید که طبق شکل $f(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ ، پس تساوی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ برقرار نیست.

سایر گزینه‌ها درست‌اند.

۲۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر f در $x = a$ دارای حد صفر باشد، آن گاه fg و $\frac{f}{g}$ در $x = a$ می‌توانند حد داشته باشند.

اما اگر $\lim_{x \rightarrow a} f \neq 0$ باشد، fg در $x = a$ حد ندارد. اما در هر صورت $\frac{g}{f}$ در $x = a$ فاقد حد است.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \left(x + \frac{r}{x} \right) = a + \frac{r}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (rx + a) = ra$$

$$a + \frac{r}{a} = ra \xrightarrow{\times a} a^r + r = ra^r \Rightarrow ra^r = r \Rightarrow a = \pm 1$$

اگر $a = 1$ باشد، $f(x) = \begin{cases} x + \frac{r}{x} & x \geq 1 \\ rx + 1 & x < 1 \end{cases}$ است که در R پیوسته است.

ولی اگر $a = -1$ باشد، $f(x) = \begin{cases} x + \frac{r}{x} & x \geq -1 \\ rx - 1 & x < -1 \end{cases}$ می‌شود که در $x = 0$ پیوسته نیست. پس فقط $a = 1$

قابل قبول است.

$$x \rightarrow -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \left[-\frac{\pi}{4} \right] = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sqrt{\sin x \cos x}}{-\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x - \cos x}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + \sqrt{x+2}} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{x+2}} \times \frac{x - \sqrt{x+2}}{x - \sqrt{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x^2 - 1)(-2)}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-1)(x+1)(-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

روش دوم: استفاده از هوییتال

$$x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{x+2}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{-2}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

نکته (قاعده‌ی هوییتال): اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

وقتی $x \rightarrow \frac{1}{3}^-$ داریم $\sin \pi x \rightarrow 3^-$ ، زیرا:

$$x < \frac{1}{3} \Rightarrow \pi x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin \pi x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \pi x < \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{[\sin \pi x] - \frac{3}{2}}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x}{ax + b} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{1}{4} (*)$$

حد صورت صفر است، ولی حاصل حد برابر عدد حقیقی مخالف صفر است، پس باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\frac{a}{3} + b = 0 \quad \text{یعنی} \quad b = -\frac{a}{3} \quad \text{حال با استفاده از قاعده‌ی هوییتال در (*) داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x}{ax + b} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} \frac{-\frac{3}{2}}{a} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{1}{4} \Rightarrow a = -24 \xrightarrow{a=-3b} b = 8$$

$$\text{بنابراین: } a + b = -24 + 8 = -16$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a^+ + a = 3 - 1 \Rightarrow a^+ + a - 2 = 0$$

$$(a + 2)(a - 1) = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow 2 \\ a = -2 \Rightarrow -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{mx^2 + 3x + mx^2 + 3}{x^2 - (2m - 1)x - 2m} = \frac{-m - 3 + m + 3}{1 + 2m - 1 - 2m} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{mx^2(x + 1) + 3(x + 1)}{x^2 + x - 2mx - 2m} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(mx^2 + 3)}{(x + 1)(x - 2m)} = \frac{m + 3}{-1 - 2m} = -1 \Rightarrow m + 3 = 2m + 1$$

$$\Rightarrow m = 2$$

روش دوم: هوییتال:

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2mx^2 + 3 + 2mx}{x^2 - 2m + 1} = \frac{2m + 3 - 2m}{-2 - 2m + 1} = -1 \Rightarrow m = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \cos \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin \left(\frac{\Delta \pi}{2} - \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \times \frac{\Delta}{2} (\pi - x) \times \frac{1}{2} (\pi - x)}{(x - \pi)^2} = \frac{\Delta}{2}$$

روش دوم (هوییتال):

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-2 \sin 2x - 2 \sin 2x}{2(x - \pi)} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-4 \cos 2x - 4 \cos 2x}{2} = \frac{-4(-1) - 4(1)}{2} = \frac{\Delta}{2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$f(x) = \frac{\sqrt{-\sin^2 x \sin x}}{\sin x \cos^2 x} = \frac{\sqrt{-\sin^2 x \cos x \sin x}}{\sin x \cos^2 x} = \frac{\sqrt{-\sin^2 x \cos x}}{\sin x \cos^2 x}$$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\sin x| \sqrt{-\cos x}}{\sin x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{-\cos x}}{\cos^2 x} = -1$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^5 - (5-x)}{(x-1)(x+1+\sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 5x - 4}{5(x-1)}$$

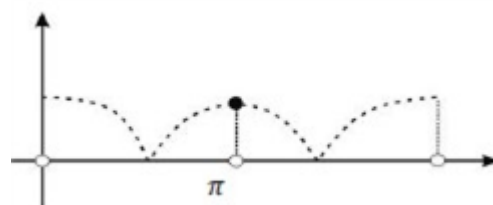
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{5(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{5} = \frac{5}{5}$$

روش دوم: از قاعده‌ی هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5-x}}}{1} = \frac{5}{5}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نمودار این تابع به صورت زیر است: ۳۴

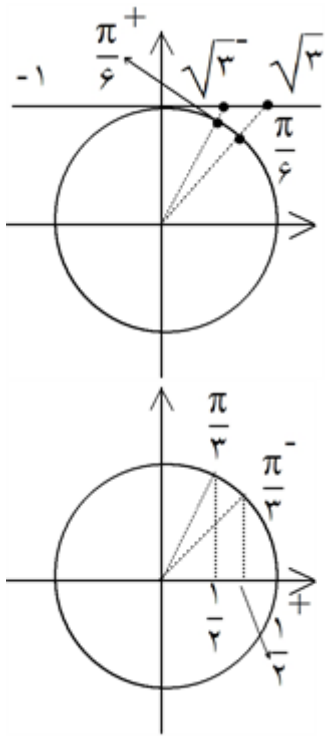
در نقطه‌ی $x = \pi$ تابع ناپیوسته است.



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = [1^+] + \sqrt[n]{(1 - [1^+])^n} = 1 + 0 = 1 \\ f(1) = 1 + \sqrt[n]{(1-1)^n} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-] + \sqrt[n]{(1 - [1^-])^n} = 0 + \sqrt[n]{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

بنابراین تابع در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته است.



$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} ([\sqrt{3} \cot x] + a) = [\sqrt{3} \times \sqrt{3}^-] + a = [3^-] + a = 2 + a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} ([-2 \cos x] - b) = [-2 \cos \frac{\pi}{3}^-] - b = [-2(\frac{1}{2})^+] - b = [-1/\dots] - b = -2 - b$$

حالا مقدار تابع، می‌شود $f(x) = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ بنابراین باید:

$$2 + a = -2 - b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow ab = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $y = [mx] - [nx]$ و $m, n > 0$ در تمامی نقاط صحیح‌کننده‌ی مشترک پیوسته و در غیرمشترک ناپیوسته است. ۳۷

$$3 < x < 4 \Rightarrow 15 < 5x < 20 \Rightarrow 5x = 16, 17, 18, 19 \Rightarrow x \in \{3/2, 3/4, 3/6, 3/8\}$$

$$3 < x < 4 \Rightarrow 30 < 10x < 40$$

$$\Rightarrow 10x = 31, 32, \dots, 39 \Rightarrow x \in \{3/1, 3/2, 3/3, 3/4, \dots, 3/9\}$$

پس تعداد نقاط ناپیوستگی $(4 - 3)$ تا است، یعنی ۵ نقطه‌ی ناپیوستگی دارد.

$$\text{نقاط ناپیوسته} = \{3/1, 3/3, 3/5, 3/7, 3/9\}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با قرار دادن $x = 0$ در تابع داده شده درمی‌یابیم حد از نوع مبهم $\frac{0}{0}$ می‌باشد، پس داریم: ۳۸

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^2 x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan^2 x}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2}{\sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sqrt{2} |\frac{x}{2}|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sqrt{2} (\frac{x}{2})} = -2\sqrt{2}$$

(توجه کنید که می‌توانستیم از هم‌ارزی $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$ در صفر، استفاده کنیم.)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{x+2}} \times \frac{x - \sqrt{x+2}}{x - \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x^2 - 1)(-2)}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x - 1)(x + 1)(-2)}{(x + 1)(x - 2)} = -\frac{4}{3}$$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. در ربع اول دایره ی مثلثاتی، هرچه مقدار یک زاویه افزایش یابد، مقدار سینوس آن زاویه هم افزایش یافته ولی مقدار کسینوس آن کاهش می یابد، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [2 \cos x - 1] = \left[2 \left(\frac{1}{2} \right)^- - 1 \right] = [1^- - 1] = [0^-] = -1$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

