



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون : بانک تست حسابان سال یازدهم تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱  
ریاضی (فصل ۴ مثلثات)

۱ اگر  $\tan \beta + \cot \beta = \tan \alpha$ ، آنگاه حاصل  $\frac{\cot \beta}{\tan(\alpha - \beta)}$  کدام است؟  $\left(\alpha - \beta \neq \frac{k\pi}{2}\right)$

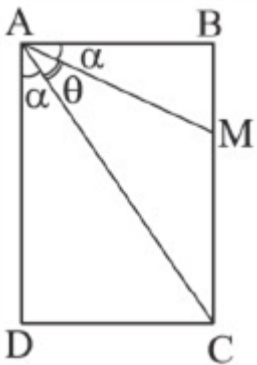
۱  $\frac{1}{2}$

۲  $\frac{1}{3}$

۳  $\frac{1}{4}$

۴ ۳

۲ در مستطیل شکل مقابل،  $BM = 2$  و  $AD = 8$  است، حاصل  $\tan \theta$  کدام است؟



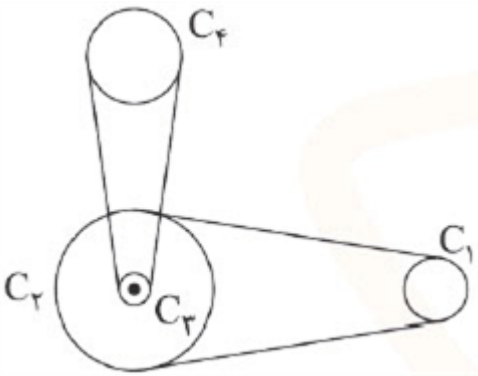
۱  $\frac{3}{4}$

۲  $\frac{4}{3}$

۳  $\frac{3}{5}$

۴  $\frac{4}{5}$

۳ در شکل مقابل شعاع دایره‌های  $C_1, C_2, C_3$  و  $C_4$  به ترتیب ۳،  $\frac{7}{5}$ ،  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{4}{5}$  و دو دایره  $C_2$  و  $C_3$  هم‌مرکز و به هم چسبیده‌اند. اگر  $C_4$  کمان  $\frac{7\pi}{5}$  رادیان را طی کند،  $C_1$  چه کمانی را بر حسب رادیان طی می‌کند؟



۱  $10/5\pi$

۲  $21/5\pi$

۳  $112/5\pi$

۴  $7\pi$

۴ شکل نمودار تابع  $y = \sin(4\pi + x)$  در کدام بازه با شکل نمودار آن در سایر بازه‌ها متفاوت است؟

۱  $[-2\pi, 0]$

۲  $[4\pi, 6\pi]$

۳  $[3\pi, 5\pi]$

۴  $[-8\pi, -6\pi]$

۵ کدام یک از روابط مثلثاتی زیر درست نیست؟

۲  $\cos^2 \alpha = -\cos^2 \alpha + 1$

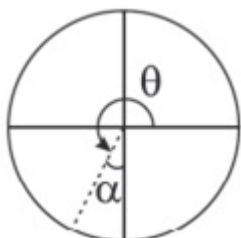
۱  $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۴  $\cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

۳  $\sin^2 \alpha = 2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha$

۶ اگر  $\log(\sin \alpha) = -2$  و  $\log(\cos \beta) = -3$ ، آنگاه حاصل  $\log(\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cdot \cos \alpha)$  را به دست آورید.

۷ با توجه به دایرهی مثلثاتی در شکل مقابل، اگر  $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ ، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟



۴  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۲  $\sqrt{3}$

۱  $\sqrt{2}$

۸ اگر  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 4$  باشد، حاصل  $\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + 2 \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)$  کدام است؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۹ اگر  $f(x) + f(-x) = 0$  باش، ضابطه  $f(x)$  کدام تابع می‌تواند باشد؟

۲  $f(x) = \tan x + \cos x$

۱  $f(x) = \sin x + \cos x$

۴  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

۳  $f(x) = \tan x + \cot x$

۱۰ دو شهر A و B، دارای طول جغرافیایی برابرند و عرض جغرافیایی آنها به ترتیب  $28^\circ$  و  $22^\circ$  است. اگر شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنیم، فاصله تقریبی دو شهر روی کره زمین تقریباً چند کیلومتر است؟ ( $\pi \approx 3.14$ )

۴ ۷۰۰

۳ ۷۲۰

۲ ۶۷۰

۱ ۶۲۰

۱۱ دو تابع  $y = |x^2 - 1|$  و  $y = |\cos x|$  در چند نقطه مشترکند؟

۴ سه

۳ دو

۲ یک

۱ صفر

۱۲ کدام گزینه صحیح است؟

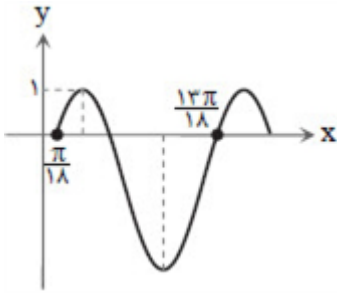
۴  $\tan 280^\circ > \tan 120^\circ$

۳  $\tan 2 > \tan 3$

۲  $\tan 210^\circ > \tan 10^\circ$

۱  $\tan 3 > \tan 1$

۱۳ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{4}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟



۲ (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۱۴ اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  زوایای یک مثلث باشند و  $\operatorname{tg}(A + 10^\circ) \operatorname{tg}(C + 5^\circ) = 1$ ، کدام درست است؟

$B = 75^\circ$  (۲)

$B = 105^\circ$  (۱)

$A + C = 125^\circ$  (۴)

$A + C = 15^\circ$  (۳)

۱۵ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\cos 15^\circ$

ب)  $\operatorname{tg} 105^\circ$

پ)  $\sin \frac{\pi}{12}$

ت)  $\sin 120^\circ$

ث)  $\cos 135^\circ$

۱۶ سینوس کدام زاویه‌ی زیر بزرگ‌تر است؟

$\frac{8\pi}{9}$  rad (۴)

۳ rad (۳)

$\frac{2\pi}{3}$  rad (۲)

۲ rad (۱)

۱۷ نمودار  $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$  بر نمودار  $g(x) = \sin(x + \alpha)$  منطبق است. مقدار  $\alpha$  کدام عدد می‌تواند باشد؟

$-\frac{\pi}{2}$  (۴)

$\frac{5\pi}{6}$  (۳)

$-\frac{\pi}{6}$  (۲)

$\frac{\pi}{3}$  (۱)

۱۸ حاصل عبارت  $\frac{\sin(75^\circ) + \cos(-420^\circ)}{2 \tan(-315^\circ)}$  با مقدار کدام گزینه برابر است؟

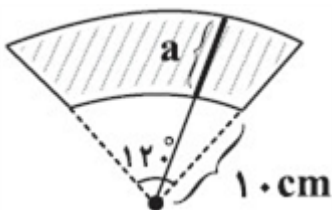
$\sin(150^\circ)$  (۴)

$\cos(270^\circ)$  (۳)

$\sin(210^\circ)$  (۲)

$\cos(210^\circ)$  (۱)

۱۹ تیغه‌ی برف پاک‌کن عقب یک اتومبیل، سطح هاشور خورده‌ی شکل زیر به مساحت  $308\pi$  سانتی‌متر مربع را تمیز می‌کند. اگر زاویه‌ی طی شده  $120^\circ$  باشد، طول تیغه‌ی برف‌پاک‌کن ( $a$ ) چند سانتی‌متر است؟



۴۲ (۴)

۳۲ (۳)

۲۲ (۲)

۱۲ (۱)

۲۰ در مدت ۴۸ دقیقه، عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه‌شمار، در مجموع چندرادیان طی می‌کنند؟

۴  $\frac{28\pi}{15}$

۳  $\frac{26\pi}{15}$

۲  $\frac{9\pi}{5}$

۱  $\frac{8\pi}{5}$

۲۱ اگر  $\frac{5\pi}{6} < \theta < 45^\circ$  و  $\sin \theta = \frac{2m+6}{3}$  باشد، آن‌گاه حدود  $m$  کدام است؟

۴  $\left(-\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right]$

۳  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

۲  $\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

۱  $\left[\frac{3\sqrt{2}-12}{4}, -\frac{3}{2}\right]$

۲۲ دو زاویه متمم: دو زاویه متمم یک‌دیگر هستند هرگاه جمع آن‌ها برابر  $90^\circ$  یا  $\frac{\pi}{2}$  رادیان باشد و برای دو زاویه متمم علامت تغییر نمی‌کند، اما  $\sin$  به  $\cos$ ،  $\cos$  به  $\sin$ ،  $\sin$  به  $\operatorname{tg}$  و  $\operatorname{Cotg}$  به  $\operatorname{tg}$  تبدیل می‌شود. (مثال)

۱)  $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$

۲)  $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

۳)  $\operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{Cotg} 20^\circ$

۴)  $\operatorname{Cotg}\left(\frac{7\pi}{19}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{38}\right)$

$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{19} = \frac{19\pi - 14\pi}{38} = \frac{5\pi}{38}$

۲۳ در دایره‌ای به محیط  $16\pi$  طول کمان مقابل به زاویه  $150^\circ$  را بیابید.

۲۴ حاصل عبارت  $\frac{\sin(225^\circ) - 2\cos(240^\circ) - 1}{2\operatorname{tg}(-570^\circ) - \operatorname{Cotg}(420^\circ)}$  کدام است؟

۴  $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

۳  $-\frac{\sqrt{6}}{18}$

۲  $\frac{\sqrt{6}}{18}$

۱  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

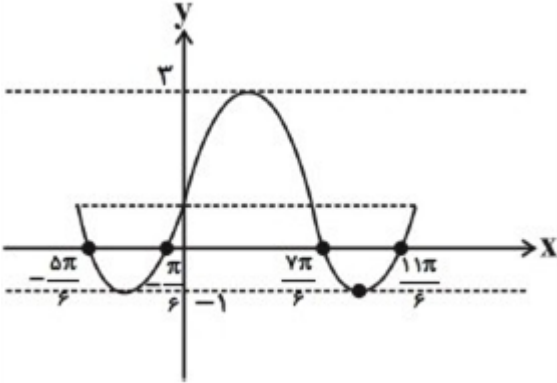
۲۵ شکل زیر بخشی از نمودار چند تابع زیر می‌تواند باشد؟

الف)  $y = -2 \left( \sin(x - \pi) - \frac{1}{2} \right)$

ب)  $y = 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + 1$

پ)  $y = 2 \sin x + 1$

ت)  $y = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} + x \right) + 1$



۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

۱ صفر

۲۶ برد تابع  $y = \cos \left( \pi \times \left( \frac{\sin x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right)$  کدام است؟

۴  $\left[ -1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

۳  $\left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$

۲  $[-1, 1]$

۱  $\left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

۲۷ اگر  $\sin x \cos x < 0$  و  $\tan x \sin x > 0$ ، انتهای کمان x در کدام ناحیه قرار دارد؟

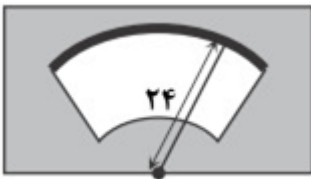
۴ چهارم

۳ سوم

۲ دوم

۱ اول

۲۸ در شکل زیر، طول برف‌پاک‌کن ۲۴ سانتی‌متر است. اگر برف‌پاک‌کن کمانی به اندازه  $120^\circ$  طی کند، طول کمان طی‌شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟



۴  $16\pi$

۳  $12\pi$

۲  $8\pi$

۱  $6\pi$

۲۹ اگر  $f(x) = \sin^2 x - 1$  و  $g(x) = x^2 + x$ ، مقدار تابع  $y = \text{gof}(x)$  به ازای  $x = \frac{\pi}{16}$  کدام است؟

۴  $2^{-\frac{5}{2}} - 2^{-2}$

۳  $2^{-\frac{7}{2}} - 2^{-2}$

۲  $2^{-\frac{9}{2}} - 2^{-2}$

۱  $2^{-\frac{5}{2}} - 2^{-4}$

۳۰ اگر  $\tan 10^\circ = a$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\sin 50^\circ - \sin 40^\circ \cos 10^\circ}{\cos 50^\circ + \sin 40^\circ \sin 10^\circ}$  برحسب a کدام است؟

۴  $-\frac{a}{2}$

۳  $2a$

۲  $\frac{a}{2}$

۱ a

۳۱ اگر  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 20^\circ + 3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 20^\circ = 3$  آن گاه  $\operatorname{Cotg}(25^\circ - \alpha)$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳) -۲      ۴)  $-\frac{1}{2}$

۳۲ حاصل عددی  $A = (\operatorname{Cotg} 12^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ)^2 (1 - 2 \operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{Cotg} 48^\circ)$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

۳۳ اگر  $\tan(x+y) = 3$  و  $\tan(2x+y) = 2$  آن گاه  $\tan y$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{11}{2}$       ۲)  $\frac{11}{2}$       ۳)  $\frac{2}{11}$       ۴)  $-\frac{1}{11}$

۳۴ مقدار کسینوس زاویه‌ی  $15^\circ$  را حساب کنید.

۳۵ اگر  $25^\circ < x < 30^\circ$  و  $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$ ، آن گاه حدود تغییرات  $m$  در کدام فاصله است؟

- ۱)  $\left(1, \frac{3}{2}\right]$       ۲)  $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$       ۳)  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$       ۴)  $\left(\frac{1}{2}, \cos 50^\circ\right)$

۳۶ تابع  $f(x) = -2 \sin 3x$  مفروض است. بیش‌ترین مقدار، کم‌ترین مقدار و دوره‌ی تناوب تابع  $f$  را به دست آورید. سپس با استفاده از آن، نمودار تابع  $f$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

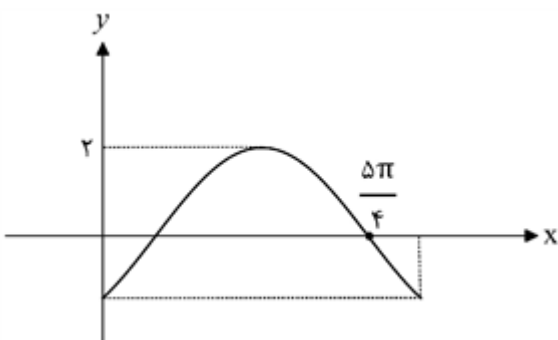
۳۷ اگر  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ ،  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2k}$ ،  $\operatorname{tg} 2\alpha = k$  باشند، کدام تساوی برقرار است؟

- ۱)  $2k^2 - k - 1 = 0$       ۲)  $2k^2 + k - 1 = 0$       ۳)  $6k^2 - 5k + 1 = 0$       ۴)  $6k^2 + 5k + 1 = 0$

۳۸ اگر  $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$  و  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ ، آن گاه حاصل  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{5}$       ۲)  $\frac{7}{5}$       ۳)  $-\frac{7}{5}$       ۴)  $\frac{1}{5}$

۳۹ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = a \sin(x - b)$  را نشان می‌دهد. با فرض این که  $0 < a, b < \pi$ ، حاصل  $a, b$  کدام است؟



- ۱)  $\frac{3\pi}{4}$       ۲)  $\frac{3\pi}{2}$       ۳)  $\frac{\pi}{4}$       ۴)  $\frac{\pi}{2}$

۴۰ فرض کنید  $\tan \alpha = \frac{۳}{۴}$  و  $\tan \beta = \frac{۵}{۱۲}$  و  $\alpha$  و  $\beta$  حاده باشند، عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\cos(\alpha + \beta)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(\ast) \beta \tan \gamma - \alpha \tan = \beta \cot \gamma$$

عبارت مورد نظر را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\alpha \tan + \beta \cot \gamma}{\beta \tan - \alpha \tan} &= \frac{(\beta \tan \alpha \tan + 1) \beta \cot \gamma}{\beta \tan - \alpha \tan} = \frac{\beta \cot \gamma}{\frac{\beta \tan - \alpha \tan}{\beta \tan \alpha \tan + 1}} = \frac{\beta \cot \gamma}{(\beta - \alpha) \tan} \\ \gamma &= \frac{(\beta \tan - \alpha \tan) \gamma}{\beta \tan - \alpha \tan} = \frac{\alpha \tan + \beta \tan \gamma - \alpha \tan}{\beta \tan - \alpha \tan} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha \gamma \cot \gamma = \left( \alpha \gamma - \frac{\pi}{\gamma} \right) \tan = \theta \tan \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \alpha \tan \Rightarrow \gamma = x \Rightarrow \frac{x}{\lambda} = \frac{\gamma}{x} = \alpha \tan \Rightarrow x = DC = AB$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\frac{1}{\gamma} - 1}{1} = \frac{\alpha \gamma \tan - 1}{\alpha \tan \gamma} \Rightarrow$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به دوائر  $C_3$  و  $C_4$  داریم:

$$\frac{\pi \gamma_1}{\delta} = \gamma \theta \Rightarrow \left( \frac{\pi \gamma}{\delta} \right) \delta \gamma = \gamma \theta \delta \gamma \Rightarrow \gamma \theta \gamma = \gamma \theta \gamma \Rightarrow \gamma = \gamma$$

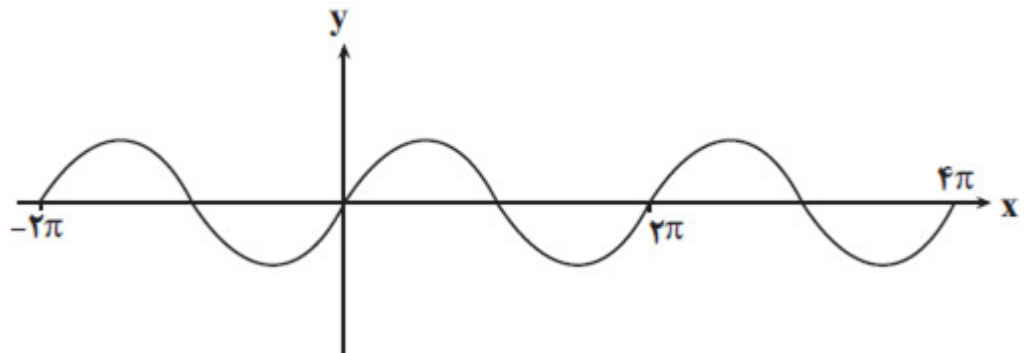
$$\frac{\pi \gamma_1}{\delta} = \gamma \theta \Rightarrow \gamma \theta = \gamma \theta$$

دوائر  $C_3$  و  $C_4$  هم‌مرکزند، پس:

با توجه به دوائر  $C_1$  و  $C_2$  داریم:

$$\pi \frac{\gamma_1}{\gamma} = \gamma \theta \Rightarrow \left( \frac{\pi \gamma_1}{\delta} \right) \delta \gamma = \gamma \theta \gamma \Rightarrow \gamma \theta \gamma = \gamma \theta \gamma \Rightarrow \gamma = \gamma$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با رسم تابع  $x \sin = y$  می‌بینیم که شکل نمودار آن در بازه‌های  $[\pi \gamma, \pi \gamma]$ ,  $[\pi \gamma, 0]$  و به طور کلی در بازه‌های  $Z \ni k, [\pi(\gamma + k\gamma), k\pi \gamma]$  یکسان است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گزینه ۲ باید به صورت زیر باشد.

$$1 - \alpha \gamma \cos \gamma = \gamma \alpha \cos$$

$$(\alpha \cos \beta \sin - \alpha \cos \beta \sin + \beta \cos \alpha \sin) \log = (\alpha \cos \cdot \beta \sin - (\beta + \alpha) \sin) \log$$

$$\delta - = \gamma - \gamma - = (\beta \cos) \log + (\alpha \sin) \log = (\beta \cos \alpha \sin) \log$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\gamma} = \theta \sin - = \left( \theta - \frac{\gamma \pi}{\gamma} \right) \cos = \alpha \cos$$

$$\bar{\gamma} \sqrt{\gamma} = \alpha \tan \rightarrow \lambda = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\gamma}} = \alpha \gamma \tan \Rightarrow \frac{1}{\alpha \gamma \cos} = \alpha \gamma \tan + 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ابتدا دقت می‌کنیم که برای  $x$ ‌های قابل قبول:

$$\frac{x \sin - 1}{x \cos} = \frac{x \cos}{x \sin + 1}$$

(چون با طرفین وسطین به عبارت  $x^2 \sin - 1 = x^2 \cos$  می‌رسیم.)

$$x^2 \sin - 1 = x^2 \cos \Rightarrow x^2 \sin - x^2 \cos = 1 \Rightarrow x^2 (\sin - \cos) = 1 \Rightarrow \sin - \cos = \frac{1}{x^2}$$

$$x \sin^2 + 2 = x \cos \Rightarrow 2 = \frac{x \cos}{x \sin + 1} \Rightarrow 2 = x \sin^2 - x \cos \Rightarrow$$

از طرفی داریم:

$$2 = x \sin^2 - x \cos = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$$(x)f - x \sin - x \cos = (x-) \cos + (x-) \sin = (x-)f$$

گزینه (۲):

$$(x)f - x \tan - x \cos = (x-) \cos + (x-) \tan = (x-)f$$

گزینه (۳):

$$x \cot - x \tan = (x-) \cot + (x-) \tan = (x-)f$$

$$(x)f - = (x \cot + x \tan) - =$$

گزینه (۴):

$$(x)f - x^3 \cos + x^3 \sin = (x-) \cos + (x-) \sin = (x-)f$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اندازه زاویه مرکزی بین دو شهر A و B برحسب درجه برابر است با:

$$= 28^\circ - 22^\circ = 6^\circ \text{ اندازه زاویه مرکزی برحسب درجه}$$

برای تبدیل این زاویه به رادیان آن را در  $\frac{\pi}{180}$  ضرب می‌کنیم:

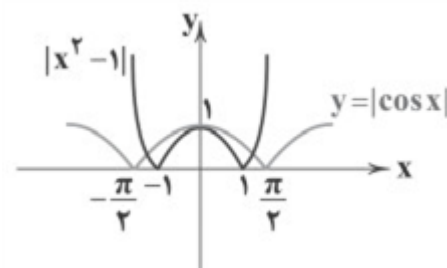
$$= 6^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30} \text{ رادیان اندازه زاویه برحسب رادیان}$$

توجه کنید که طول کمان از رابطه  $L = r\theta$  به دست می‌آید.

$$\widehat{AB} \text{ طول کمان} = \frac{\pi}{30} \times 6400 = 670 \text{ کیلومتر}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودارهای رسم‌شده، دو تابع در سه نقطه

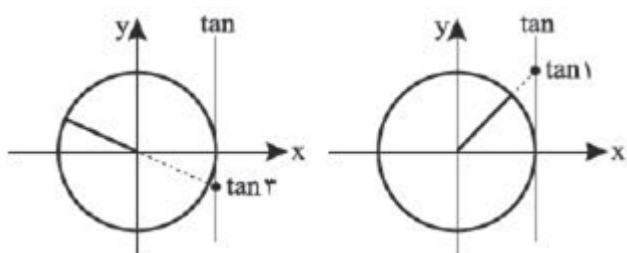
مشترکند. یکی  $x = 0$  و دو نقطه در بازه‌های  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  و  $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ .



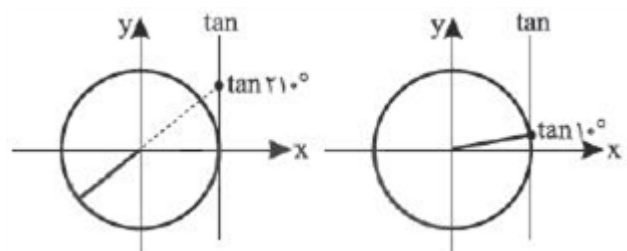
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از دایره مثلثاتی کمک می‌گیریم.

بررسی گزینه‌ها:

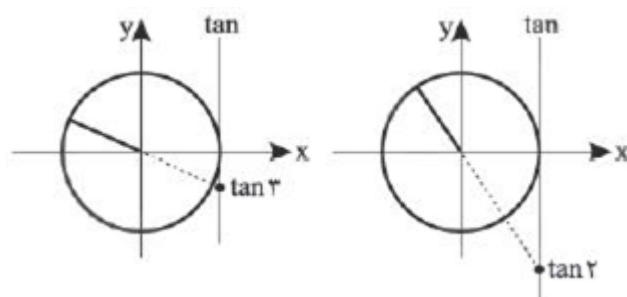
گزینه (۱):  $3\text{tg} < 1\text{tg}$



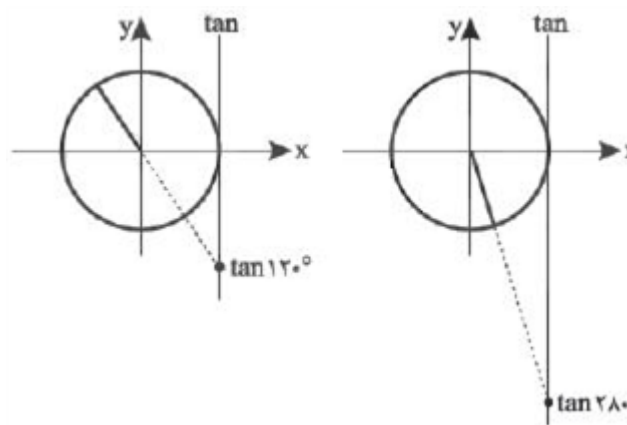
گزینه (۲):  $10\text{tg} < 21\text{tg}$



گزینه (۳):  $2\text{tg} < 3\text{tg}$



گزینه (۴):  $28\text{tg} < 12\text{tg}$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ماکزیمم تابع برابر  $a + |۲|$  است و از روی این شکل این مقدار برابر یک است؛ پس:

$$(bx)\sin ۲ + ۱ - = \left( \frac{\pi}{۲} + bx \right) \cos ۲ - ۱ - = (x)f \Rightarrow ۱ - = a \Rightarrow ۱ = ۲ + a$$

با توجه به شکل دوره‌ی تناوب تابع برابر  $\frac{\pi ۲}{۳} = \frac{\pi}{۱۸} - \frac{\pi ۱۳}{۱۸}$  است؛ پس:

$$۳ \pm b \Rightarrow ۳ = |b| \Rightarrow \frac{\pi ۲}{۳} = \frac{\pi ۲}{|b|}$$

پس  $۲ = b + a$  یا  $۴ - = b + a$  که با توجه به گزینه‌ها فقط عدد ۲ می‌تواند صحیح باشد؛ اما توجه کنید که اگر  $۳ - = b$  باشد، داریم:

$$۰ > \frac{\pi ۳}{۲} \times ۶ - = \left( \frac{\pi}{۱۸} \right)' f \Rightarrow x^۳ \cos ۶ - = (x)' f \Rightarrow (x^۳ -) \sin ۲ + ۱ - = (x)f$$

باید تابع در همسایگی  $x = \frac{\pi}{۱۸}$  نزولی باشد؛ حال آن‌که صعودی است؛ پس تنها  $۳ = b$  قابل قبول است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۰۹۰ = ۰۵ + C + ۰۱۰ + A \Rightarrow (۰۵ + C) \cot g = (۰۱۰ + A) \operatorname{tg}$$

$$۰۱۰۵ = B \Rightarrow ۰۷۵ = C + A \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{۶}\sqrt{+}\bar{۲}\sqrt{-}}{۴} = \frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۳}\sqrt{-}}{۲} + \frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۱}\sqrt{-}}{۲} = ۴۵ \sin ۶۰ \sin + ۴۵ \cos ۶۰ \cos = (۴۵ - ۶۰) \cos = ۰۱۵ \cos \left( \text{الف} \right)$$

$$\frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۱}\sqrt{-}}{۲} + \frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۳}\sqrt{-}}{۲} = ۴۵ \sin ۶۰ \cos + ۴۵ \cos ۶۰ \sin = (۴۵ + ۶۰) \sin = ۱۰۵ \sin \left( \text{ب} \right)$$

$$\frac{\bar{۲}\sqrt{+} + \bar{۶}\sqrt{-}}{۴} = \frac{\bar{۲}\sqrt{-} - \bar{۲}\sqrt{-}}{۴} = \frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۳}\sqrt{-}}{۲} - \frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۱}\sqrt{-}}{۲} = ۴۵ \sin ۶۰ \sin - ۴۵ \cos ۶۰ \cos = (۴۵ + ۶۰) \cos = ۱۰۵ \cos$$

$$\frac{\bar{۶}\sqrt{+} + \bar{۲}\sqrt{-}}{\bar{۶}\sqrt{-} - \bar{۲}\sqrt{-}} = \frac{\frac{\bar{۲}\sqrt{+} + \bar{۶}\sqrt{-}}{۴}}{\frac{\bar{۲}\sqrt{-} - \bar{۲}\sqrt{-}}{۴}} = \frac{۱۰۵ \sin}{۱۰۵ \cos} = ۱۰۵ \operatorname{tg}$$

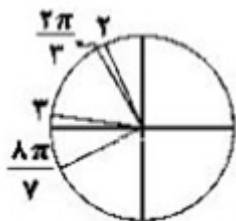
$$\frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۱}\sqrt{-}}{۲} - \frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} \times \frac{\bar{۳}\sqrt{-}}{۲} = \frac{\pi}{۴} \sin \frac{\pi}{۳} \cos - \frac{\pi}{۴} \cos \frac{\pi}{۳} \sin = \left( \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۳} \right) \sin = \frac{\pi}{۱۲} \sin \left( \text{پ} \right)$$

$$\frac{\bar{۲}\sqrt{-} - \bar{۶}\sqrt{-}}{۴} = \frac{\bar{۳}\sqrt{-}}{۲} = ۰۶۰ \sin = (۰۶۰ - ۰۱۸۰) \sin = ۰۱۲۰ \sin \left( \text{ت} \right)$$

$$\frac{\bar{۲}\sqrt{-}}{۲} - = ۰۴۵ \cos - = (۰۴۵ - ۰۱۸۰) \cos = ۰۱۳۵ \cos \left( \text{ث} \right)$$

۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون  $\frac{\pi}{y} + \pi = \frac{4\pi}{y}$  و در ناحیه‌ی سوم قرار دارد، پس  $\frac{4\pi \sin}{y} > 0$  است. ۳ رادیان هم نزدیک به  $\pi$  است و چون  $0 = \pi \sin$  است، پس  $3 \sin$  نزدیک به صفر است. چون هر یک رادیان تقریباً  $57/3^\circ$  می‌باشد، پس  $2 \text{ rad} \approx 114/6^\circ$  و از طرفی  $\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$ ، پس  $(2 \text{ rad}) \sin < \frac{2\pi \sin}{3}$  می‌باشد.



۱۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این که  $\alpha \cos = \left(\alpha - \frac{\pi}{y}\right) \sin$  پس کافی است:

$$\frac{\pi}{6} - \alpha \Rightarrow \frac{\pi}{y} = x - \frac{2\pi}{3} + \alpha + x$$

۱۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{y} = 30^\circ \sin = (30^\circ + 360^\circ \times 2) \sin = (750^\circ) \sin$$

$$\frac{1}{y} = 60^\circ \cos = (60^\circ + 360^\circ) \cos = (420^\circ) \cos = (420^\circ -) \cos$$

$$1 = (45^\circ - 360^\circ) \tan - = (315^\circ) \tan - = (315^\circ -) \tan$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{y}}{y} = A \Rightarrow$$

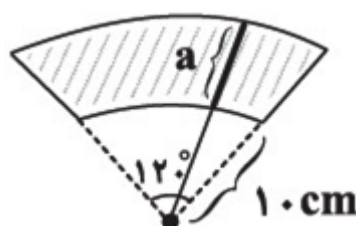
$$\frac{1}{y} = 30^\circ \sin = (30^\circ - 180^\circ) \sin = (150^\circ) \sin$$

۱۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2\pi}{3} = R \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{120^\circ}{180^\circ} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180^\circ}$$

برای مساحت پاک شده (طی شده) توسط تیغه داریم:



$$2 \text{ cm } \pi 30^\circ 8 = \left(\frac{2\pi}{3}\right) 2(10) \frac{1}{y} - \left(\frac{2\pi}{3}\right) 2(10 + a) \frac{1}{y} = S$$

$$\pi 30^\circ 8 = (210 - 2(10 + a)) \times \frac{2\pi}{3} \times \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\text{cm } 22 = a \Rightarrow 1024 = 2(10 + a) \Rightarrow 924 = 100 - 2(10 + a) \Rightarrow$$

۲۰

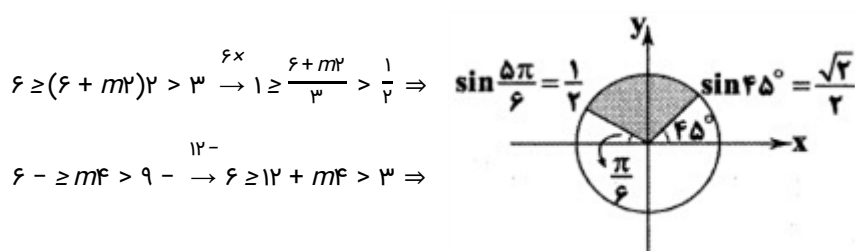
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عقربه دقیقه‌شمار در هر ساعت  $2\pi$  رادیان و عقربه ساعت‌شمار در هر ساعت  $\frac{\pi}{6}$  رادیان طی می‌کنند. بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عقربه دقیقه شمار: } \frac{8\pi}{5} = x \Rightarrow \frac{x}{2\pi} = \frac{48}{60} \\ \text{عقربه ساعت شمار: } \frac{2\pi}{15} = y \Rightarrow \frac{y}{\frac{\pi}{6}} = \frac{48}{60} \end{array} \right.$$

$$\text{رادیان } \frac{2\pi}{15} + \frac{8\pi}{5} = y + x \Rightarrow$$

۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در ناحیه‌ی رنگی، کمترین مقدار  $\sin \theta$ ، برابر با  $\frac{1}{2}$  و بیشترین مقدار آن برابر با ۱ است که به ازای  $\theta = \frac{\pi}{6}$  رخ می‌دهد:



$$\left[ \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right] \ni m \Rightarrow \frac{3}{2} \leq m < \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{6}{4} \leq m < \frac{9}{4} \Rightarrow$$

۲۲

ابتدا باید زاویه را بر حسب رادیان حساب کنیم.

۲۳

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{180} \times 150 = \theta$$

$$\lambda = \frac{16\pi}{2\pi} = R \Rightarrow 2\pi R = 16\pi \Rightarrow 16\pi = \text{محیط}$$

$$\frac{\pi 20}{3} = \frac{\pi 5}{6} \times \lambda = L \Rightarrow R\theta = L \Rightarrow \lambda = R$$

۲۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - (^\circ 60 + ^\circ 180) \cos 2 - (^\circ 45 + ^\circ 180) \sin}{(^\circ 60 + ^\circ 360) \cot g - (^\circ 210 + ^\circ 360) \tan 2} = \frac{1 - (^\circ 240) \cos 2 - (^\circ 225) \sin}{(^\circ 420) \cot g - (^\circ 570) \tan 2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} - ^\circ 30 \tan 2} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} - (^\circ 30 + ^\circ 180) \tan 2} = \frac{1 - ^\circ 60 \cos 2 + ^\circ 45 \sin}{^\circ 60 \cot g - (^\circ 210) \tan 2} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} - ^\circ 30 \tan 2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} - ^\circ 30 \tan 2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} - ^\circ 30 \tan 2} =$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل تابع داده شده اگر هر مقدار تابع  $x\sin = y$  را در ۲ ضرب کرده و سپس با یک جمع کنیم به شکل تابع داده شده یعنی  $y = 1 + x\sin^2$  در مورد (پ) می‌رسیم. هر تابعی که ضابطه آن با این تابع برابر باشد نیز می‌تواند نموداری مطابق نمودار داده شده داشته باشد.

$$\left(\frac{1}{y} - (x - \pi)\sin\right)^2 - = \left(\frac{1}{y} - (\pi - x)\sin\right)^2 - = y \quad \text{مورد (الف):}$$

$$1 + x\sin^2 = y \Rightarrow$$

$$1 + \left(x - \frac{\pi}{y}\right)\cos^2 = 1 + \left(\frac{\pi}{y} - x\right)\cos^2 = y \quad \text{مورد (ب):}$$

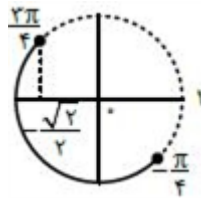
$$1 + x\sin^2 = y \Rightarrow$$

$$1 + x\sin^2 = 1 + \left(x + \frac{\pi}{y}\right)\cos^2 = y \quad \text{مورد (ت):}$$

بنابراین بخشی از ۳ نمودار (الف)، (ب) و (پ) می‌تواند باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{3}{4} \geq \frac{1}{4} + \frac{x\sin}{y} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{y} \geq \frac{x\sin}{y} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow 1 \geq x\sin \geq 1 - \frac{3\pi}{4} \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{x\sin}{y}\right)x\pi \geq \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$



با توجه به دایره مثلثاتی اگر  $\frac{3\pi}{4} \geq \alpha \geq \frac{\pi}{4}$  باشد، آن‌گاه  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha \cos \geq 1$  خواهد بود، بنابراین برد تابع  $\left[1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \text{ ناحیه اول یا چهارم } \Rightarrow \frac{x^2 \sin}{x \cos} = x \sin \times \tan > 0 \Rightarrow x \cos > 0$$

$$x \text{ ناحیه سوم یا چهارم } \Rightarrow x \sin > 0 \Rightarrow x \cos < 0$$

پس انتهای کمان در ناحیه چهارم است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته ۱: اگر  $D$  اندازه زاویه برحسب درجه و  $R$  اندازه آن برحسب رادیان باشد، داریم:  $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$

نکته ۲: همواره بین اندازه یک زاویه مانند  $\theta$  (برحسب رادیان) و طول کمان روبه‌رو به آن ( $l$ ) در یک دایره به شعاع  $r$  رابطه

$$\frac{l}{r} = \theta \quad \text{زیر برقرار است:}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \theta \Rightarrow \frac{\theta}{\pi} = \frac{120}{180}$$

ابتدا با استفاده از نکته ۱ اندازه زاویه را برحسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\pi 16 = l \Rightarrow \frac{l}{r} = \frac{2\pi}{3}$$

حال با توجه به نکته ۲ داریم:

29)

$$\frac{\alpha^2 \cos - 1}{2} = \alpha^2 \sin : \text{نکته}$$
ابتدا ضابطه تابع  $gof$  را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^y \cos - x^f \cos &= (x)(\text{gof}) \Rightarrow x + {}^y x = (x)g, x^y \cos - = 1 - x^y \sin = (x)f \\ {}^y(x \cos x \sin) - &= x^y \sin x^y \cos - = (x^y \cos - 1)x^y \cos - = (1 - x^y \cos)x^y \cos = \\ \left( \frac{x^f \cos - 1}{y} \right) \frac{1}{f} - &= \frac{\frac{x^f \cos - 1}{y}}{f} = \frac{x^f \cos - 1}{y f} = x^y \sin \frac{1}{f} - = \end{aligned}$$

حال با جایگذاری  $x = \frac{\pi}{16}$  خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{\gamma}{f}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma}{f}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{\gamma}{f}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma}{f}}} + \left( \frac{1}{\lambda} \right) = \left( \frac{\sqrt{1-\frac{\gamma}{f}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma}{f}}} - 1 \right) \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{\pi}{f} \cos - 1 \right) \frac{1}{\lambda} = \left( \frac{\pi}{f} \right) (\text{gof})$$

五、

$$\left. \begin{aligned} {}^0_1\sin^{\circ}\mathbf{F}_0\cos + {}^0_1\cos^{\circ}\mathbf{F}_0\sin &= {}^{\Delta}_0\sin \\ {}^0_1\sin^{\circ}\mathbf{F}_0\sin - {}^0_1\cos^{\circ}\mathbf{F}_0\cos &= {}^{\Delta}_0\cos \end{aligned} \right\} \Rightarrow {}^0_1 + {}^{\circ}\mathbf{F}_0 = {}^{\Delta}_0$$

$$a = {}^0_1\text{tg} = \frac{{}^0_1\sin^{\circ}\mathbf{F}_0\cos}{{}^0_1\cos^{\circ}\mathbf{F}_0\cos} = A \Rightarrow$$

این مسئله با تبدیل ضرب به جمع هم قابل حل می‌باشد.

31)

$$\mathfrak{w} = ({}^{\circ}\gamma_{\circ} + \alpha)tg \Rightarrow \mathfrak{w} = \frac{{}^{\circ}\gamma_{\circ}tg + \alpha tg}{{}^{\circ}\gamma_{\circ}tg\alpha tg - 1} \Rightarrow ({}^{\circ}\gamma_{\circ}tg\alpha tg - 1)\mathfrak{w} = {}^{\circ}\gamma_{\circ}tg + \alpha tg$$

از مقدار  $\text{tg}(\alpha + 20^\circ)$ ،  $\text{tg}(\alpha + 20^\circ) - 45^\circ$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} = \frac{\gamma - \gamma}{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{(\gamma_0 + \alpha)tg - (\gamma\Delta)tg}{(\gamma_0 + \alpha)tg(\gamma\Delta)tg + 1} = ((\gamma_0 + \alpha) - \gamma\Delta)tg = (\alpha - \gamma\Delta)tg$$

پس  $\text{Cotg}(\alpha - 25^\circ)$  برابر ۲- است.

32

$$((^{\circ}\Upsilon\Upsilon^{\Upsilon}\text{tg} - 1) - 1)^{\circ}\Upsilon\Upsilon^{\Upsilon}\text{Cotg}\Upsilon = \left( \frac{\frac{{}^{\circ}\Upsilon\Upsilon\text{tg}\Upsilon}{{}^{\circ}\Upsilon\Upsilon\text{tg}\Upsilon}}{{}^{\circ}\Upsilon\Upsilon^{\Upsilon}\text{tg} - 1}} - 1 \right)^{\circ}\Upsilon\Upsilon^{\Upsilon}\text{Cotg}\Upsilon = A$$

$$\Upsilon = 1 \times \Upsilon = {}^{\circ}\Upsilon\Upsilon^{\Upsilon}\text{tg}^{\circ}\Upsilon\Upsilon^{\Upsilon}\text{Cotg}\Upsilon = A \Rightarrow$$

$$(\beta = y + \gamma x, \alpha = y + x)$$

33

$$\begin{aligned} (y+x)^r \tan \alpha &= \frac{\alpha \tan^r \alpha}{\alpha^r \tan \alpha - 1} = r \alpha \tan \alpha \\ \frac{y^r x^r}{q-1} &= \frac{(y+x)^r \tan^r \alpha}{(y+x)^r \tan \alpha - 1} = (ry + rx) \tan \alpha \Rightarrow \\ \frac{y^r}{r} &= (ry + rx) \tan \alpha \Rightarrow \\ \frac{\beta \tan \alpha - \alpha \tan \alpha}{\beta \tan \alpha \tan \alpha + 1} &= (\beta - \alpha) \tan \alpha \\ [(y+rx) - (ry+rx)] \tan \alpha &= y \tan \alpha \Rightarrow \\ \frac{(y+rx) \tan \alpha - (ry+rx) \tan \alpha}{(y+rx) \tan \alpha + 1} &= y \tan \alpha \Rightarrow \\ \frac{y \tan \alpha - ry \tan \alpha}{1 - ry \tan \alpha} &= y \tan \alpha \Rightarrow \\ \frac{y(1-r) \tan \alpha}{1 - ry \tan \alpha} &= y \tan \alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \gamma \tan \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} =$$

$$\circ/25 \frac{\gamma + \sqrt{\gamma}}{\gamma} = \circ/15 \gamma \cos \Rightarrow \frac{\sqrt{\gamma} + \gamma}{\gamma} = \circ/15 \gamma \cos \Rightarrow \circ/251 - \circ/15 \gamma \cos \gamma = \circ/30 \cos$$

$$\circ/25 \frac{\gamma + \sqrt{\gamma}}{\gamma} = \circ/15 \cos \Rightarrow$$

$$\circ/30 \sin \circ/45 \sin + \circ/30 \cos \circ/45 \cos = (\circ/30 - \circ/45) \cos = \circ/15 \cos$$

روش دوم:

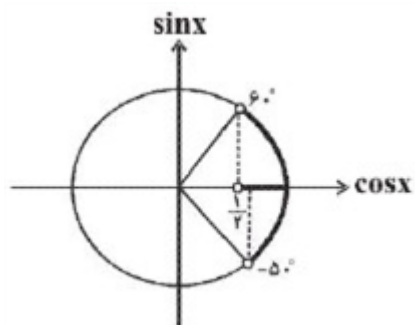
$$\frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} + \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \times \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} =$$

$$\circ/60 > x^2 > \circ/50 \Rightarrow \circ/30 > x > \circ/25 -$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۳۵

کمانی را که  $x^2$  روی دایره‌ی مثلثاتی می‌پیماید مشخص می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:



$$1 \geq \frac{1-m\gamma}{\gamma} > \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 1 \geq x^2 \cos > \frac{1}{\gamma}$$

$$3 \geq m\gamma > 2 \Rightarrow 2 \geq 1 - m\gamma > 1 \Rightarrow$$

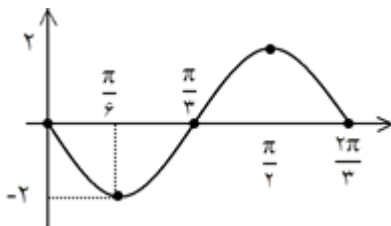
$$\frac{3}{\gamma} \geq m > 1 \Rightarrow$$

$$\gamma = \max \left. \begin{array}{l} \gamma \\ \gamma - \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma \geq 3x \sin \gamma - \geq \gamma - \Rightarrow 1 \geq 3x \sin \geq 1 -$$

۳۶

نمودار تابع را در یک دوره‌ی تناوب یعنی  $\left[ \frac{2\pi}{3}, 0 \right]$  رسم می‌کنیم.

$$\frac{2\pi}{3} = T \text{ دوره تناوب}$$



$$(\beta - \alpha) + (\beta + \alpha) = 2\alpha$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بنابراین خواهیم داشت:

۳۷

$$\frac{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma k}}{\left( \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma k} \right) - 1} = k \Rightarrow \frac{(\beta - \alpha) \operatorname{tg} + (\beta + \alpha) \operatorname{tg}}{(\beta - \alpha) \operatorname{tg} \cdot (\beta + \alpha) \operatorname{tg} - 1} = 2 \operatorname{tg}$$

$$2k + 3 = k - \gamma \epsilon k \Rightarrow \frac{2k + 3}{1 - \epsilon k} = k \Rightarrow \frac{\frac{2k + 3}{\epsilon k}}{\frac{1 - \epsilon k}{\epsilon k}} = k \Rightarrow$$

$$\circ = 1 - k - \gamma 2k \Rightarrow \circ = 3 - 3k - \gamma \epsilon k \Rightarrow$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

از آنجا که  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ، پس انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم واقع است، بنابراین:

$$\alpha > \alpha \sin, \alpha > \alpha \cos$$

از طرفی با استفاده از دو اتحاد  $1 = \alpha^2 \cos + \alpha^2 \sin$  و  $\frac{1}{\alpha^2 \cos} = \alpha^2 \operatorname{tg} + 1$  می‌توان از  $\frac{3}{4} = \alpha \operatorname{tg}$  نتیجه گرفت که  $\frac{3}{5} = \alpha \sin$  و  $\frac{4}{5} = \alpha \cos$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{5} &= \alpha \sin = \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \cos \\ \frac{4}{5} &= \alpha \cos = \left( \alpha - \frac{5\pi}{2} \right) \sin \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \left( \alpha - \frac{5\pi}{2} \right) \sin + \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \cos \Rightarrow$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بیشترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = (x-b) \sin a$  برابر با  $|a|$  است، پس با توجه به شکل و این که  $a$  عددی مثبت است، داریم:  $a = 2$ . از طرفی:

$$\begin{aligned} 0 &= \left( b - \frac{5\pi}{4} \right) \sin \Rightarrow 0 = \left( b - \frac{5\pi}{4} \right) \sin a \Rightarrow 0 = \left( \frac{5\pi}{4} \right) f \\ \frac{\pi}{4} &= b \xrightarrow{\pi > b > 0} \exists k \in \mathbb{Z}; k\pi - \frac{5\pi}{4} = b \Rightarrow k\pi = b - \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} = \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 = b \cdot a \quad \text{بنابراین:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{5} &= \alpha \sin \Rightarrow \frac{4}{5} = \alpha \cos \Rightarrow \frac{16}{25} = \alpha^2 \cos \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{\alpha^2 \cos} = \alpha^2 \operatorname{tg} + 1 \\ \frac{5}{13} &= \beta \sin \Rightarrow \frac{12}{13} = \beta \cos \Rightarrow \frac{144}{169} = \beta^2 \cos \Rightarrow \frac{169}{144} = \frac{25}{144} + 1 = \frac{1}{\beta^2 \cos} = \beta^2 \operatorname{tg} + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{33}{65} = \frac{15 - 48}{65} = \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} = \beta \sin \alpha \sin - \beta \cos \alpha \cos = (\beta + \alpha) \cos \Rightarrow$$

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۱  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۳۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|----|---|---|---|---|

