



نام و نام خانوادگی :

نام درس :

نام دبیر :

نام آموزشگاه :

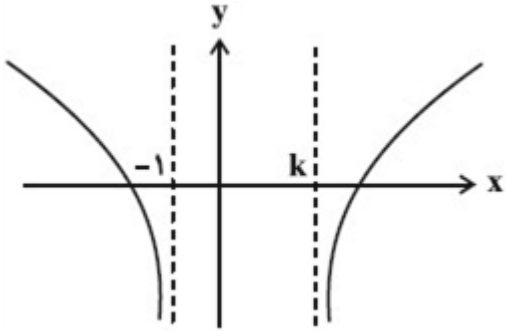
عنوان آزمون :

پایه تحصیلی :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

ریاضی (فصل ۳ توابع نمایی و لگاریتمی)

۱) نمودار تابع $f(x) = \text{Log}(x^2 - ax + b)$ در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f(4) = 1$ باشد، حاصل $f\left(-\frac{3}{4}k\right)$ کدام است؟



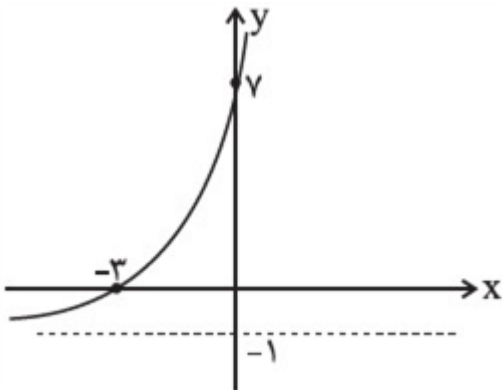
۱ (۴)

۱ + Log ۲ (۳)

$-\frac{3}{4} \text{Log } 2$ (۲)

Log ۲ (۱)

۲) اگر نمودار تابع نمایی $f(x) = -1 + a^{x+b}$ به صورت مقابل باشد، مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟



-۵ (۴)

-۴ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۳) اگر m و n طول نقاط برخورد دو تابع $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ باشد، کدام گزینه الزاماً درست است؟

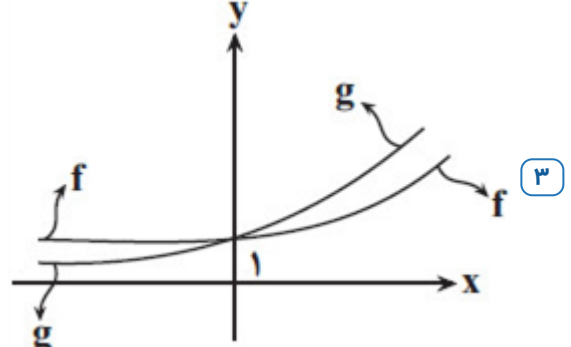
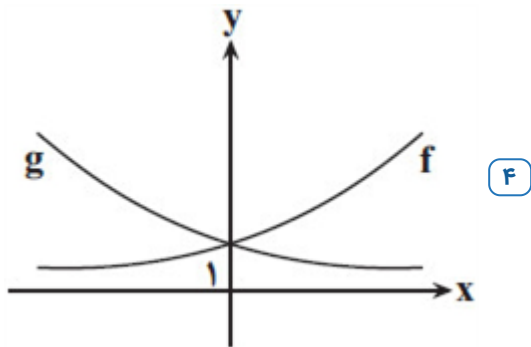
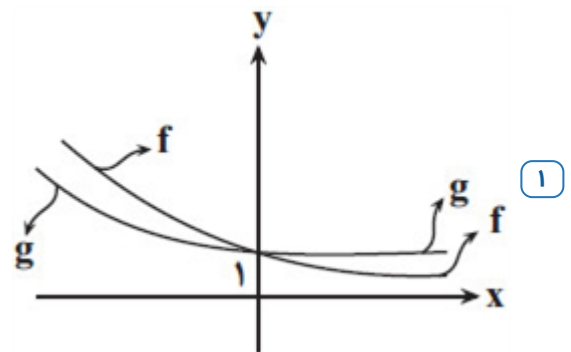
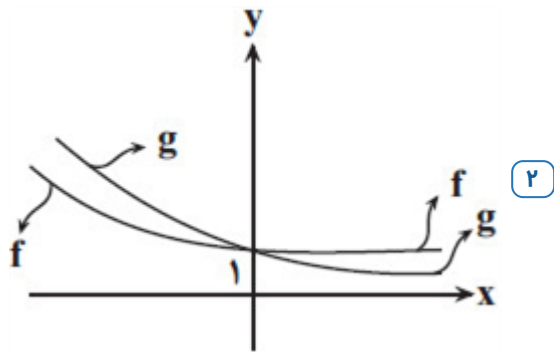
$mn = 1$ (۴)

$mn = 0$ (۳)

$mn < 0$ (۲)

$mn > 0$ (۱)

۴ نمودار دو تابع $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ و $g(x) = b^x$ با شرط $0 < b < 1 < a$ و $ab < 1$ به کدام صورت خواهد بود؟



۵ مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله دو برابر مقدار انرژی آزاد شده در زلزله‌ی دیگر است. این دو زلزله چند ریشتر با هم اختلاف دارند؟ ($\text{Log } 2 \cong 0.3, \text{Log } E = 1.8 + 1.5M$)

- ۱ ۰/۱ ۲ ۰/۲ ۳ $10\sqrt{10}$ ۴ ۱۰۰

۶ نیمه‌عمر عنصری ۱۰ روز است. پس از چند روز ۲۰ درصد این عنصر از بین می‌رود؟

- ۱ $10 \text{Log } \frac{1}{2} - 30$ ۲ $10 \text{Log } 2 + 30$ ۳ $10 \text{Log } \frac{1}{2} - 20$ ۴ $10 \text{Log } 2 + 20$

۷ اگر انرژی آزاد شده‌ی زلزله (E) از رابطه‌ی $\text{Log } E = 1.8 + 1.5M$ (M در مقیاس ریشتر) به دست آید، انرژی آزاد شده در یک زلزله‌ی ۷/۵ ریشتری چند برابر انرژی آزاد شده در یک زلزله‌ی ۵/۵ ریشتری است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۱۰۰ ۴ ۱۰۰۰

۸ مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته ۱۲/۵ درصد از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از چند روز، $\frac{1}{2}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\text{Log } \frac{3}{2} = 1/6, \text{Log } \frac{3}{4} = 0.6$)

- ۱ ۸ ۲ ۲۸ ۳ ۵۶ ۴ ۱۲۶

۹ تابع $f(x) = \text{Log } \frac{(ax+b)}{2}$ فقط به ازای مقادیر $x \in (-4, +\infty)$ با معنی است. اگر تابع f نیم‌ساز ربع اول را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع کند، آنگاه حاصل $f(\sqrt{2}-4)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{4}{3}$ ۲ $-\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{3}{4}$ ۴ $-\frac{4}{3}$

۱۰) اگر برد تابع $f(x) = \log \left(\frac{1}{1 + \sqrt{|x|} - [x]} \right) - 1$ زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $(\log_{\frac{3}{2}}, \log_{\frac{5}{2}})$ باشد، دامنه‌ی تابع f ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱) $(5, 9)$ ۲) $(5, 8)$ ۳) $(2, 9)$ ۴) $(2, 8)$

۱۱) اگر $A = \frac{1}{1 + \log_{\frac{1}{2}} 5} + \frac{1}{1 + \log_{\frac{1}{3}} 10} + \frac{1}{1 + \log_{\frac{1}{5}} 6}$ و $B = \left[\log_{\frac{5}{2}} \right]$ باشد، حاصل $A + B$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲) در یک زلزله انرژی آزاد شده $10^{22/9}$ ارگ است، زلزله چند ریشتر است؟

- ۱) ۷/۱ ۲) ۷/۲ ۳) ۷/۳ ۴) ۷/۴

۱۳) اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{5x+2} > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x+11}$ را A و مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{3}}(10 - x) \leq 2$ را B بنامیم، در مجموعه‌ی $(A \cap B)$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) بی‌شمار

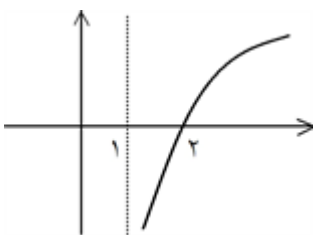
۱۴) اگر لگاریتم عدد $\sqrt[4]{0/25}$ در مبنای ۲ برابر A باشد، حاصل لگاریتم عدد $\left(1 - \frac{1}{A}\right)$ در پایه‌ی ۸ چقدر است؟

- ۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{4}{3}$

۱۵) اگر $f(x) = 4 + \log_{\frac{1}{3}}(2x + a)$ و $f(2) = 6$ باشد، a کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۳

۱۶) نمودار مقابل مربوط به کدام گزینه است؟



۱) $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$ ۲) $y = -1 + \log_{\frac{1}{2}} x$

۳) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ ۴) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$

۱۷) کدام عبارت برای معادله‌ی $f(x) = 2^x - x^2 = 0$ درست است؟

- ۱) معادله در بازه‌ی $[0, 1]$ دو ریشه دارد. ۲) معادله در بازه‌ی $[0, 1]$ فاقد ریشه است.
۳) معادله در بازه‌ی $[0, 1]$ یک ریشه دارد. ۴) معادله در بازه‌ی $[0, 1]$ حداقل یک ریشه دارد.

۱۸) معادله‌ی $2^{\text{Log } (x-1)} + 2^{\text{Log } (2-x)} = 5^{\text{Log } \cos x}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارای چند ریشه است؟

- ۱) صفر (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) ۲ (۳) ۴) ۳ (۴)

۱۹) اگر $\text{Log } \frac{1}{4} = a$ باشد، حاصل $\text{Log } (2 - \sqrt{2}) + \text{Log } (6 + 4\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱) $a + 1$ (۱) ۲) $-a + 1$ (۲) ۳) $-a$ (۳) ۴) a (۴)

۲۰) اگر جوابهای معادله $x^{\text{Log } 5} = 5$ برابر با جوابهای معادله $x^2 + ax + b = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱) -25 (۱) ۲) 6 (۲) ۳) $-5/2$ (۳) ۴) 25 (۴)

۲۱) اگر $\text{Log } 2 = a$ و $\text{Log } 3 = b$ باشد، حاصل $\text{Log}_{\frac{1}{4}} 150$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2-a+b}{a+2b}$ (۱) ۲) $\frac{a-b+2}{2b+a}$ (۲) ۳) $\frac{2+b-a}{a+4b}$ (۳) ۴) $\frac{2+b-a}{b+4a}$ (۴)

۲۲) اگر $x^2 + 4y^2 = 65$ و $x = \frac{4}{y}$ باشد، لگاریتم $x + 2y$ در مبنای $\sqrt{3}$ چه قدر است؟

- ۱) 3 (۱) ۲) 6 (۲) ۳) 8 (۳) ۴) 4 (۴)

۲۳) اگر $A = \text{Log } \frac{95}{2}$ باشد، حاصل $[A]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- ۱) 3 (۱) ۲) 4 (۲) ۳) 5 (۳) ۴) 6 (۴)

۲۴) یک زلزله‌ی ۵ ریشتری، 10^k ارگ انرژی آزاد می‌کند. k چقدر است؟

- ۱) $19/3$ (۱) ۲) $19/7$ (۲) ۳) 20 (۳) ۴) $20/3$ (۴)

۲۵) سه عدد $\text{Log } 2 + \text{Log } 2$ ، $\text{Log } a$ و $\text{Log } 18$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. a کدام است؟

- ۱) 40 (۱) ۲) 50 (۲) ۳) 60 (۳) ۴) 90 (۴)

۲۶) اگر $\text{Log } 2 = 0/3$ و $\text{Log } 3 = 0/5$ باشد، حاصل $\text{Log } \sqrt[3]{3}/6$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{30}$ (۱) ۲) $0/1$ (۲) ۳) $0/2$ (۳) ۴) $\frac{3}{5}$ (۴)

۲۷) در کدامیک از توابع زیر با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد؟

- ۱) $y = 2^{x-4}$ (۱) ۲) $y = -3^{1-x}$ (۲) ۳) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (۳) ۴) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{x+8}$ (۴)

۲۸) اگر $x < y$ ، کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

- ۱) $2^{x+1} > 2^{y+1}$ (۱) ۲) $3^{x-1} > 3^{y-1}$ (۲) ۳) $5^{-x} > 5^{-y}$ (۳) ۴) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} > \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2y}$ (۴)

۲۹ زلزله‌ای به بزرگی $2/8$ در مقیاس ریشتر چند ارگ انرژی آزاد می‌کند؟ $(\log E = 11/8 + 1/5 M)$

- ۱۶ (۱) $12/8$ (۲) 10^{16} (۳) $10^{12/8}$ (۴)

۳۰ معادله‌ی $3^{4-x} = k$ به‌ازای چند مقدار صحیح k دارای یک جواب مثبت است؟

- ۲۷ (۱) ۸۰ (۲) ۸۱ (۳) بی‌شمار (۴)

۳۱ اگر $\log \frac{\sqrt{k}\sqrt{k}}{t} = -18$ باشد، $\log \frac{k\sqrt[5]{k}}{t\sqrt[5]{t}}$ کدام است؟

- $\frac{54}{5}$ (۱) $\frac{108}{5}$ (۲) $\frac{27}{5}$ (۳) $\frac{9}{5}$ (۴)

۳۲ اگر $x^4 + y^4 = 45$ و $\log x + \log y = 2 \log 3 + \log 2$ ، آن‌گاه $\log \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۳۳ حاصل $\sqrt{5^{(\log_{25} 16 - \log_5 16)}}$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۳۴ اگر $\log_5 \approx 0/699$ و $\log_5 125 \approx$ چند رقمی است؟

- ۲۰۹ (۱) ۲۱۰ (۲) ۲۱۱ (۳) ۲۰۸ (۴)

۳۵ اگر $\log_b a = 5$ باشد، حاصل $\log \frac{a \cdot b^7}{\sqrt{b}}$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

۳۶ کدام عدد می‌تواند ریشه‌ی معادله‌ی $a^x = \log_a x$ باشد؟ $(0 < a < 1)$

- ۱ (۱) $1/2$ (۲) $0/8$ (۳) ریشه ندارد (۴)

۳۷ نمودار تابع $y = (\log_2 2)^x$ به کدام صورت است؟



۳۸ اگر $\log_2(2x+1) = 4$ باشد، مقدار x کدام است؟

- ۴۱ (۱) ۴۰ (۲) ۸۲ (۳) ۸۰ (۴)

۳۹) حاصل $\text{Log } \sqrt[2]{5} + \text{Log } 5\sqrt[2]{5}$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

$-\frac{5}{2}$ (۱)

۴۰) اگر $\log^2 = 0/3010$ و $\log^3 = 0/4771$ باشد، $\text{Log } \sqrt[3]{12}$ کدام است؟

0/3657 (۴)

0/3623 (۳)

0/3613 (۲)

0/3597 (۱)

۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دامنه تابع $R - [-1, k]$ است که یعنی $x = -1$ و $x = k$ ریشه‌های عبارت $x^2 - ax + b$

$$\xrightarrow{x=-1} 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \quad (1) \quad \text{هستند:}$$

از طرفی $f(4) = 1$ است و داریم:

$$f(4) = \log(16 - 4a + b) = 1 \Rightarrow 16 - 4a + b = 10 \Rightarrow 4a - b = 6 \quad (2)$$

از ۱ و ۲ به دست می‌آید: $a = 1$ و $b = -2$.

$$\Rightarrow f(x) = \log(x^2 - x - 2) \Rightarrow f\left(-\frac{3}{4}k\right) = f(-3) = 1$$

۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مختصات نقاط $(0, 1)$ و $(-3, 0)$ در ضابطه تابع صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} f(0) = -1 + ab = 1 \Rightarrow ab = 2 \\ f(-3) = -1 + a^{-3} + b = 0 \Rightarrow a^{-3} + b = 1 \xrightarrow{ab=2} a^3 = 2 \Rightarrow a^3 = 2^3 \Rightarrow a = 2 \\ \Rightarrow a^{-3} + b = a^{-3} \Rightarrow -3 + b = 0 \Rightarrow b = 3 \\ \Rightarrow f(x) = -1 + 2^{x+3} \end{cases}$$

حال فرض کنیم $f^{-1}(1) = t$ است، پس $f(t) = 1$ است:

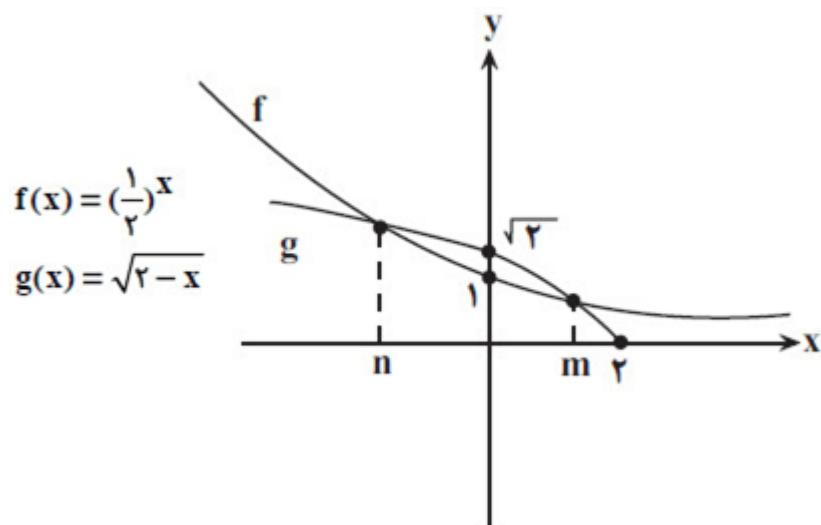
$$f(t) = -1 + 2^{t+3} = 1 \Rightarrow 2^{t+3} = 2^1 \Rightarrow t + 3 = 1 \Rightarrow t = -2$$

پس $f^{-1}(1) = -2$ است.

۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲ تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم: (می‌دانیم که $f(0) = 1$ و $g(0) = \sqrt{2}$ و تابع g در

$x = 0$ بالاتر از f قرار می‌گیرد.)



پس $mn < 0$ است.

۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۳ رد می‌شود $0 < b < 1 \Rightarrow$

$$a > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} < 1 \xrightarrow{\text{تابع نمایی است}} 0 < \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \text{گزینه ۴ رد می‌شود}$$

$$0 < \frac{1}{a} < 1, 0 < b < 1 \Rightarrow \begin{cases} b > \frac{1}{a} \Rightarrow ab > 1 \Rightarrow \text{گزینه رد می‌شود} \\ \text{(با داده سوال متناقض است)} \\ b < \frac{1}{a} \Rightarrow ab < 1 \Rightarrow \text{گزینه درست است} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵

$$E = 10^{11/8 + 1/5 M}, \frac{E_2}{E_1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{10^{11/8 + 1/5 M_2}}{10^{11/8 + 1/5 M_1}} = 2 \Rightarrow 10^{1/5(M_2 - M_1)} = 2$$

$$\xrightarrow[\text{لگاریتم می گیریم}]{\text{در پایه ۱۰}} 1/5(M_2 - M_1) = \log_{10} 2 \Rightarrow M_2 - M_1 = \frac{5}{\log 2} \log 2$$

$$\approx \frac{5}{\log 2} \times 0.3 = 0.75$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶

۲۰ درصد عنصر از بین برود، جرم باقی مانده، ۸۰ درصد جرم اولیه است. بنابراین داریم:

$$m(t) = M \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = \frac{80}{100} \times M \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{t}{T}}} = \frac{80}{100} \Rightarrow 2^{\frac{t}{T}} = \frac{100}{80}$$

از طرف تساوی فوق در مبنای ۱۰، لگاریتمی می گیریم

$$\log 2^{\frac{t}{T}} = \log \frac{100}{80} \Rightarrow \frac{t}{T} \log 2 = \log 100 - \log 80$$

$$\Rightarrow \frac{t}{T} \log 2 = 1 - 3 \log 2$$

$$\Rightarrow t \log 2 = 10 - 30 \log 2 \Rightarrow t = \frac{10 - 30 \log 2}{\log 2} = \frac{10}{\log 2} - \frac{30 \log 2}{\log 2}$$

$$\Rightarrow t = 10 \log_2 10 - 30$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷

$$\begin{cases} \log E_1 = 11/8 + 1/5 \times 7/5 \\ \log E_2 = 11/8 + 1/5 \times 5/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log E_1 - \log E_2 = 1/5 \times 2 = 3 \Rightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = 3 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 1000$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر هفته ۱۲/۵ درصد از دست می دهد و ۸۷/۵ درصد باقی ماند یعنی $\frac{1}{5}$ ماده اولیه باقی ۸

مانده است. از طرفی $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = \frac{1}{\frac{1}{5}}$ و $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = \frac{1}{\frac{1}{5}}$ است.

$$\left(\frac{1}{5} \right)^n A = \frac{1}{5} A \Rightarrow \left(\frac{1}{5} \right)^n = \frac{1}{5}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} \right)^n = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = -\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}$$

$$n \left(\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} - 3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} \right) = -\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} \Rightarrow n \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5} \right) = -\frac{1}{5} \Rightarrow n = 8 \text{ هفته} \Rightarrow 56 \text{ روز}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تابع $f(x) = \log_2(ax + b)$ دامنه به صورت زیر است:

$$ax + b > 0 \xrightarrow{a>0} x > -\frac{b}{a} \xrightarrow{x \in (-\frac{b}{a}, +\infty)} -\frac{b}{a} = -4 \Rightarrow b = 4a \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم به ازای $x = 4$ روی نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ ، $y = 4$ خواهد بود. پس $f(4) = 4$ آن‌گاه

$$f(4) = 4 \Rightarrow \log_2(4a + b) = 4 \Rightarrow 4a + b = 16 \quad (2)$$

داریم:

$$\xrightarrow{1,2} \begin{cases} 4a + b = 16 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \\ b = 4a \Rightarrow b = 4 \times 4 = 16 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \log_2(4x + 16)$$

$$f(\sqrt[3]{2} - 4) = \log_2(4\sqrt[3]{2} - 16 + 16) = \log_2 4\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} \log_2 2 = \frac{4}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع را به صورت دیگری خواهیم نوشت:

$$f(x) = \log_2 \left(12 + \sqrt{[x]} - [x] \right)^{-1} - 1 \Rightarrow \log_2 \left(12 + \sqrt{[x]} - [x] \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{4} \right)^2 \right) - 1$$

در نوشتن ضابطه‌ی اخیر، از تغییر متغیر $t = \sqrt{[x]}$ استفاده کرده‌ایم و عبارت درجه دوم حاصل را به صورت مربع کامل نوشته‌ایم. حال داریم:

$$\log_2 3 < f(x) < \log_2 5 \Rightarrow \log_2 3 < \log_2 \left(\frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{4} \right)^2 \right) - 1 < \log_2 5$$

$$\Rightarrow 6 < \frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{4} \right)^2 < 10 \Rightarrow \frac{9}{4} < \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{4} \right)^2 < \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{[x]} - \frac{1}{4} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2 < \sqrt{[x]} < 3 \Rightarrow 4 < [x] < 9 \Rightarrow 5 \leq x < 9$$

یعنی دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(5, 9)$ بوده است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1 + \log_2 15 = \log_2 2 + \log_2 15 = \log_2 30 = \frac{\log 30}{\log 2}$$

$$1 + \log_3 10 = \log_3 3 + \log_3 10 = \log_3 30 = \frac{\log 30}{\log 3}$$

$$1 + \log_5 6 = \log_5 5 + \log_5 6 = \log_5 30 = \frac{\log 30}{\log 5}$$

$$A = \frac{\log 2}{\log 30} + \frac{\log 3}{\log 30} + \frac{\log 5}{\log 30} = \frac{\log 2 + \log 3 + \log 5}{\log 30}$$

$$= \frac{\log (2 \times 3 \times 5)}{\log 30} = \frac{\log 30}{\log 30} = 1$$

$$B = \left[\log_3^{52} \right] \Rightarrow 27 < 52 < 81 \Rightarrow 3^2 < 52 < 3^4$$

$$\Rightarrow \log_3^{3^2} < \log_3^{52} < \log_3^{3^4} \Rightarrow 2 < \log_3^{52} < 4$$

$$\Rightarrow \left[\log_3^{52} \right] = [2/\dots] = 2 \Rightarrow a + b = 1 + 2 = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه $\log E = 11/8 + 1/5 M$ داریم:

$$E = 10^{22/9} \Rightarrow \log 10^{22/9} = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow 22/9 = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 1/5 M = 11/40 \Rightarrow M = 11/4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا توجه شود که ۱۳

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{3 - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

یعنی اعداد $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ و $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ معکوس یکدیگرند. بنابراین داریم:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{5x+3} > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x+11} \Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{5x+3} > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-2x-11}$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1 \Rightarrow 5x + 3 < -2x - 11 \Rightarrow 7x < -14 \Rightarrow x < -2 \Rightarrow A = (-\infty, -2)$$

$$\text{Log}_3(10 - x) \leq 2 \Rightarrow 10 - x \leq 3^2 \Rightarrow 10 - x \leq 9 \Rightarrow x \geq 1 \quad (1)$$

از طرفی به دلیل دامنه‌ی تابع لگاریتم باید داشته باشیم:

$$10 - x > 0 \Rightarrow x < 10 \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq x < 10 \Rightarrow B = [1, 10) \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

پس در $A \cap B$ هیچ عضوی وجود ندارد

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$4 \sqrt[4]{0.75} = 2^2 \sqrt[4]{2^{-2}} = 2^2 \times 2^{-\frac{2}{4}} = 2^{\frac{4}{2}}$$

ابتدا دقت کنید که:

$$A = \text{Log}_2 2^{\frac{4}{2}} = \frac{4}{2}$$

پس:

بنابراین:

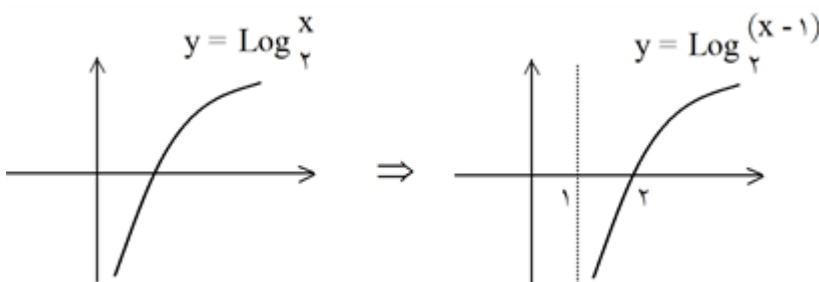
$$\text{Log}_8 \left(1 - \frac{1}{A} \right) = \text{Log}_8 \left(1 - \frac{2}{4} \right) = \text{Log}_8 \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Log}_{2^3} 2^{-2} = \frac{-2}{3}$$

$$\text{نکته: } \text{Log}_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \text{Log}_b a$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵

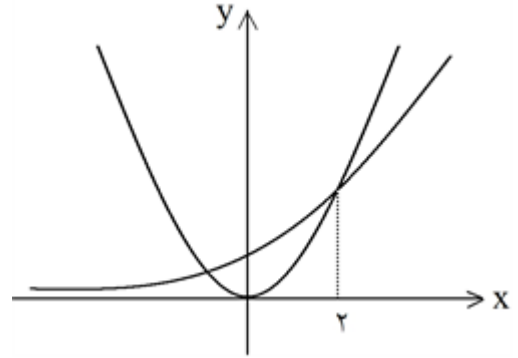
$$f(2) = 6 \Rightarrow 4 + \text{Log}_3(4 + a) = 6 \Rightarrow \text{Log}_3(4 + a) = 2 \Rightarrow 4 + a = 9 \Rightarrow a = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به روش هندسی بررسی می‌کنیم.

نمودارهای $y = 2^x$ و $y = x^2$ را رسم می‌کنیم. $2^x - x^2 = 0 \Rightarrow 2^x = x^2 \Rightarrow$



بنابراین در بازه $[0, 1]$ نقطه تلاقی ندارند، در نتیجه فاقد ریشه است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $a^{\log_a b} = b$ ، بنابراین داریم:

$${}_2^{\log (x-1)} + {}_3^{\log (2-x)} = {}_5^{\log \cos x}$$

$${}_2^{\log (x-1)} = x-1, {}_3^{\log (2-x)} = 2-x, {}_5^{\log \cos x} = \cos x$$

اما باید توجه کنیم که تمامی لگاریتم‌ها بایستی تعریف شده باشند. یعنی:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} < x \leq 2\right) \pi \approx 3/14 \leq [0, 1/57] \cup [4/71, 6/28]$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (1, 1/57)$$

حال با تعیین دامنه‌ی تعریف x ، معادله به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$x-1 + 2-x = \cos x \Rightarrow 1 = \cos x \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi$$

اما ۰ و 2π هیچ‌کدام در دامنه‌ی تعریف x یعنی $(1, 1/57)$ قرار ندارند، بنابراین معادله‌ی مورد نظر فاقد ریشه است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 2 \log (2 - \sqrt{2}) + \log (2 + 4\sqrt{2}) &= \log (2 - \sqrt{2})^2 + \log (2 + 4\sqrt{2}) \\ &= \log (2 - 4\sqrt{2}) + \log (2 + 4\sqrt{2}) = \log (2 - 4\sqrt{2})(2 + 4\sqrt{2}) \\ &= \log (2^2 - 32) = \log 4 \xrightarrow{\log \frac{1}{a} = -a} = -a \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^{\log x} = 5 \Rightarrow \log_x x = \log_x 5 \xrightarrow{\log_x x = t} t = \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \log_x x = 1 \Rightarrow x_1 = 5 \\ t_2 = \log_x 5 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -a = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5} \Rightarrow a = -\frac{26}{5} \\ P = x_1 x_2 = b = (5) \left(\frac{1}{5}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5a + b = 5 \left(-\frac{26}{5}\right) + 1 = -25$$

۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_{\sqrt{a}} 150 = \frac{\text{Log } 150}{\text{Log } \sqrt{a}} = \frac{\text{Log } 3 + \text{Log } 50}{\text{Log } 3 + \text{Log } \sqrt{a}} = \frac{\text{Log } 3 + \text{Log } 100 - \text{Log } 2}{\text{Log } 3 + \sqrt{a} \text{Log } 2} = \frac{2 + b - a}{b + \sqrt{a}}$$

۲۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(x + \sqrt{y})^2 = x^2 + 2xy + y = 5 + 2 \times 4 = 5 + 8 = 13 \Rightarrow x + \sqrt{y} = 4$$

$$\Rightarrow \text{Log}(x + \sqrt{y}) = \text{Log } 4 = \text{Log } \frac{2^2}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

۲۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا $\frac{95}{3}$ را به عدد اعشاری تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{95}{3} = 31.\bar{6}$$

$$16 < 31/\bar{6} < 32 \Rightarrow 2^4 < 31/\bar{6} < 2^5$$

$$\Rightarrow \text{Log } \frac{2^4}{2} < \text{Log } \frac{31/\bar{6}}{2} < \text{Log } \frac{2^5}{2}$$

$$\Rightarrow 4 < \text{Log } \frac{31/\bar{6}}{2} < 5 \Rightarrow \left\lceil \text{Log } \frac{31/\bar{6}}{2} \right\rceil = 4$$

۲۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } 10^k = 11/8 + 1/5 \times 5$$

$$\Rightarrow k = 11/8 + 1 = 19/8$$

۲۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر a, b و c سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی باشند، داریم $b = a + c$ ، بنابراین:

$$2 \text{Log } a = \text{Log } 10 + (2 + \text{Log } 2) \Rightarrow 2 \text{Log } a = 2 + \text{Log } (10 \times 2) \Rightarrow \text{Log } a^2 = \text{Log } 20 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Log } \frac{a^2}{10} = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{10} = 100 \Rightarrow a^2 = 1000 \xrightarrow{a>0} a = 10\sqrt{10}$$

۲۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log } \sqrt[3]{2/5} = \text{Log } (2/5)^{1/3} = \frac{1}{3} \text{Log} \left(\frac{2 \times 2}{10} \right) = \frac{1}{3} (\text{Log } 4 - \text{Log } 10) = \frac{1}{3} (\text{Log } (2^2) - 1)$$

$$= \frac{1}{3} (2 \text{Log } 2 - 1) = \frac{1}{3} (2 (\text{Log } 2 + \text{Log } 3) - 1) = \frac{1}{3} (2 (\underbrace{0/3 + 0/5}_{0/8}) - 1)$$

$$= \frac{1}{3} (1/4 - 1) = \frac{-3/4}{3} = -1/4$$

۲۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه (۱): $y = \frac{2^x}{16}$

گزینه (۲): $y = -3 \times \left(\frac{1}{3} \right)^x$

گزینه (۳): $y = - \left(\frac{1}{3} \right)^x$

گزینه (۴): $y = \frac{2^8}{5^6} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^x$

۲۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: اگر $a > 1$ ، از شرط $x < y$ نتیجه می‌شود: $a^x < a^y$

نکته: اگر $0 < a < 1$ ، از شرط $x < y$ نتیجه می‌شود: $a^x > a^y$

با توجه به نکات بالا، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $x < y \Rightarrow x + 1 < y + 1 \xrightarrow{r > 1} r^{x+1} < r^{y+1}$ ✗

گزینه ۲: $x < y \Rightarrow x - 1 < y - 1 \xrightarrow{r > 1} r^{x-1} < r^{y-1}$ ✗

گزینه ۳: $x < y \Rightarrow -y < -x \xrightarrow{\delta > 1} \delta^{-y} < \delta^{-x}$ ✓

گزینه ۴: $x < y \Rightarrow r^x < r^y \xrightarrow{\frac{r}{\sqrt{r}} > 1} \left(\frac{r}{\sqrt{r}}\right)^{r^x} < \left(\frac{r}{\sqrt{r}}\right)^{r^y}$ ✗

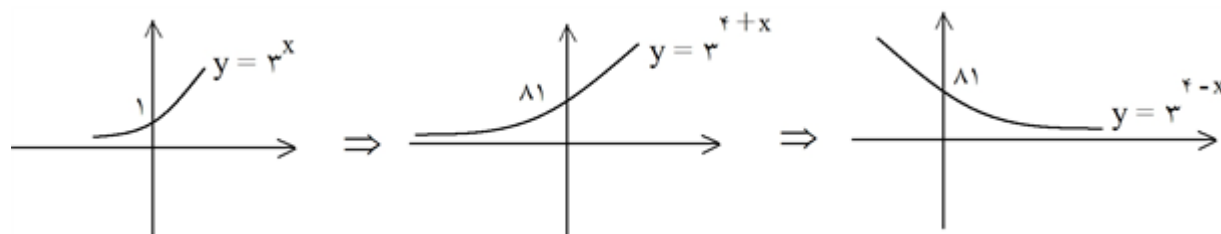
۲۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 \times (2/8) = 16 \Rightarrow E = 10^{16} \text{ Erg}$$

۳۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



بنابراین برای داشتن یک جواب مثبت k باید بین صفر تا ۸۱ باشد $\Rightarrow$

$$\Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots, 80$$

۳۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\log \left(k \times k^{\frac{1}{t^{-1}}} \right)^{\frac{1}{t^{-1}}} = \log \left(k^{\frac{r}{t^{-1}}} \right)^{\frac{1}{t^{-1}}} = \log k^{\frac{r}{t^{-1}}} = -\frac{r}{4} \log k_t = -18 \Rightarrow \log k_t = \frac{-18}{-\frac{r}{4}} = 24$$

$$\log \frac{k \times k^{\frac{1}{t^{-1}}}}{t \times t^{\frac{1}{r}}} = \log k^{\frac{r}{t^{-1}}} = \frac{\frac{r}{5}}{\frac{r}{4}} \log k_t = \frac{4}{10} \log k_t = \frac{4}{10} \times 24 = \frac{108}{5}$$

۳۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\log x + \log y = 2 \log 3 + \log 2 \Rightarrow \log xy = \log 9 + \log 2 \Rightarrow \log xy = \log 18$$

$$\Rightarrow xy = 18$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 45 + 36 = 81 \Rightarrow x+y = \pm 9$$

$$\log \frac{1}{\sqrt{r}} = \log \frac{1}{\sqrt{r}} = \log r^{-\frac{1}{2}} = -2$$

۳۳

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به روابط $\text{Log}_b a^m = \frac{m}{n} \text{Log}_b a$ و $a^{\text{Log}_a b} = b$ و $\text{Log}_c a - \text{Log}_c b = \text{Log}_c \frac{a}{b}$ داریم:

$$\text{Log}_{\sqrt{5}} 16 - \text{Log}_5 16 = \text{Log}_{\sqrt{5}} 16 - \text{Log}_{\sqrt{5}} 16 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{Log}_5 16 - \text{Log}_5 16 = \text{Log}_5 4 - \text{Log}_5 16$$

$$= \text{Log}_5 \frac{4}{16} = \text{Log}_5 \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt[5]{5^{(\text{Log}_{\sqrt{5}} 16 - \text{Log}_5 16)}} = \sqrt[5]{5^{\text{Log}_5 \frac{1}{4}}} = 5^{\frac{1}{5} \text{Log}_5 \frac{1}{4}} = 5^{\text{Log}_5 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$$

۳۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log } 5 \simeq 0.699 \Rightarrow 5 \simeq 10^{0.699}$$

$$\Rightarrow 125^{100} = 5^{300} \simeq (10^{0.699})^{300} = 10^{209.7}$$

با توجه به این‌که $10^{209} < 10^{209.7} < 10^{210}$ بنابراین عدد $10^{209.7}$ عددی ۲۱۰ رقمی است.

۳۵

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

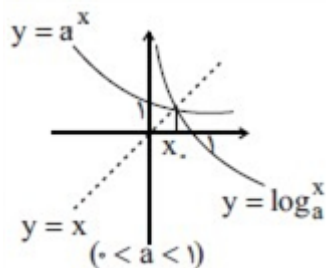
$$\text{Log} \frac{a \cdot b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}} = \text{Log} \frac{a}{\sqrt{b}} + \text{Log} \frac{b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}} = \text{Log} \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}} + \text{Log} \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} \text{Log} \frac{a}{b} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \text{Log} \frac{b}{b} \Rightarrow 2 \text{Log} \frac{a}{b} + 1(1) = 2(5) + 1 = 11$$

۳۶

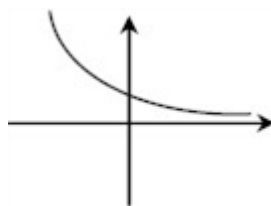
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با رسم نمودار $y = a^x$ و $y = \text{Log}_a x$ در یک دستگاه و دقت به محل تلاقی آن‌ها داریم:

می‌بینیم که محل تلاقی دو نمودار ($x = x$) قبل از نقطه‌ی $x = 1$ است پس $0/8$ می‌تواند ریشه‌ی معادله باشد.



دقت کنید اگر $a > 1$ بود معادله ریشه نداشت (چرا؟)

۳۷

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که $0 < \text{Log}_3 2 < 1$ است، لذا نمودار تابع نمایی $y = (\text{Log}_3 2)^x$ نزولی بوده

و به صورت زیر است:

۳۸

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_2(2x + 1) = 4 \Rightarrow 2x + 1 = 2^4 \Rightarrow 2x = 16 - 1 \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7.5$$

۳۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_2 \sqrt{5} + \text{Log}_5 \sqrt{2} = \text{Log}_{10} \sqrt{10} = \text{Log}_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Log}_{10} 10 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } \sqrt[3]{12} &= \log 12^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \text{Log } 12 \times 3 = \frac{1}{3} (2 \log 2 + \log 3) = \frac{2}{3} \log 2 + \frac{1}{3} \log 3 = \frac{0.6020}{3} + \frac{0.4771}{3} = \frac{1.0791}{3} \\ &= 0.3597 \end{aligned}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

