



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون :

تست ریاضی دوازدهم تجربی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۶/۰۲

فصل ۶

۱) صفحه‌ای عمود بر محور یک سطح مخروطی آن را قطع می‌کند. اگر نسبت محیط سطح مقطع حادث شده به فاصله صفحه از رأس سطح مخروطی 2π باشد، زاویه بین مولد و محور سطح مخروطی چند درجه است؟

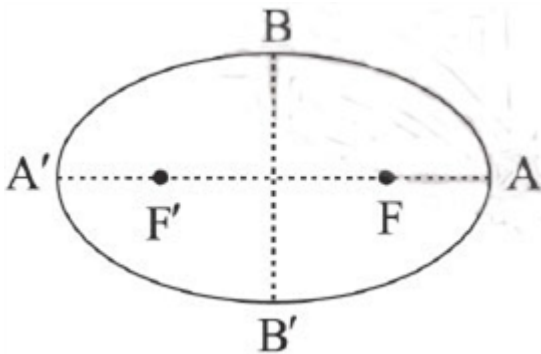
۹۰ (۴)

۱۵ (۳)

۴۵ (۲)

۳۰ (۱)

۲) خروج از مرکز بیضی زیر، $\frac{3}{5}$ است. مساحت چهارضلعی 'F' BFB چند برابر 'B' ABF است؟ (F و 'F' کانون‌های بیضی‌اند).



$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

۳) اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + mx + ny + m + n = 0$ روی نیمساز ربع سوم باشد و شعاع آن $\frac{\sqrt{10}}{2}$ باشد، حاصل $m + n$ کدام است؟

۱۰ (۴)

$\sqrt{10}$ (۳)

-۲ (۲)

$\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۱)

۴) یک رویه مخروطی با صفحه‌ای غیرعمود بر محور آن، برخورد می‌کند. سطح مقطع حاصل کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

هذلولی (۴)

دو خط متقاطع (۳)

دو خط موازی (۲)

سه‌می (۱)

۵) دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ و $x^2 + y^2 = r^2$ یکدیگر را در دو نقطه متمایز قطع می‌کنند. محدوده r کدام است؟

$r > 8$ (۴)

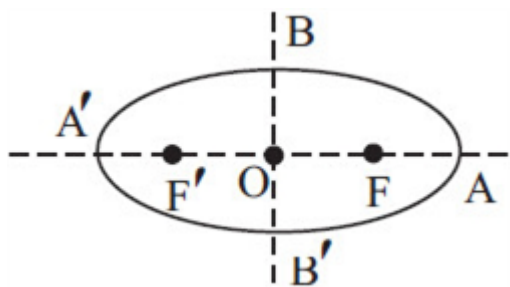
$2 \leq r \leq 8$ (۳)

$2 < r < 8$ (۲)

$r < 2$ (۱)

۶

اگر حجم شکل حاصل از دوران مثلث AOB حول قطر کوچک بیضی برابر $\frac{48\pi}{5}$ و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{4}$ باشد، حاصل ضرب بیشترین و کمترین فاصله F از رئوس کانونی چقدر است؟



۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

۷

کوچکترین دایره‌ای که از $A(2, 1)$ می‌گذرد و بر نیمساز ناحیه دو و چهارم مختصات مماس است، روی محور x به پاره‌خطی با کدام طول می‌سازد؟

$\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{17}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{15}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{15}}{4}$ (۱)

۸

بیشترین و کمترین فاصله نقاط روی بیضی از یک کانون بیضی به ترتیب برابر ۹ و ۱ می‌باشد. در صورتی که دایره‌ای به مرکز بیضی و شعاع ۴ واحد بیضی را نقطه M قطع کند، مساحت مثلث MFF' کدام است؟ (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)

۹ (۴)

۱۸ (۳)

۵/۵ (۲)

۸ (۱)

۹

تفاضل شعاع دو دایره‌ای که در ناحیه اول بر محورهای مختصات و خط $y = -x + 4$ مماس هستند، کدام است؟

۸ (۴)

$4\sqrt{2}$ (۳)

۴ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

۱۰

دایره‌های C_1, C_2 در ناحیه اول مماس خارج و به ترتیب بر محور x ها و y ها مماس‌اند. اگر مرکز آنها به ترتیب $O_1(4, \alpha)$ و $O_2(2, 5)$ باشد، α کدام است؟

$\frac{25}{8}$ (۴)

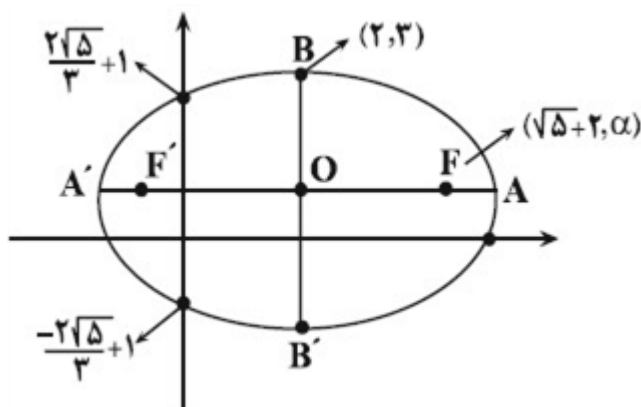
$\frac{25}{14}$ (۳)

۴ (۲)

$\frac{25}{6}$ (۱)

۱۱

در بیضی افقی زیر، O مرکز بیضی و مختصات یکی از کانون‌ها، یکی از رئوس غیرکانونی و محل برخورد بیضی با محور y ها داده شده است. بیضی از هریک از خطوط $2x - 3y = 7$ و $2x + 3y = 1$ ، یک وتر جدا می‌کنند. مجموع اندازه این دو وتر کدام است؟



$4\sqrt{5}$ (۴)

$2\sqrt{13}$ (۳)

$2\sqrt{10}$ (۲)

۸ (۱)

۱۲ شعاع کوچکترین دایره گذرنده از نقطه $(4, 1)$ و مماس بر خط $y = \frac{5}{12}x$ و محور x ها کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{14}{25}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{17}{25}$

۱۳ پاره خط $y = x + 1$ ، $0 \leq x \leq 4$ را یک بار حول محور x و یک بار حول محور y دوران می‌دهیم. مجموع حجم دو شکل حاصل کدام است؟ ($\pi \approx 3$)

- ۱) ۱۸۸ ۲) ۱۴۳ ۳) ۱۸۷ ۴) ۱۴۴

۱۴ اگر دو سر بزرگ‌ترین وتر دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، بر رؤس غیرکانونی یک بیضی با خروج از مرکز $6/10$ منطبق باشد، آنگاه فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی بیضی از کانون چقدر است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۵ اگر نقاط $A(1, 2)$ ، $B(5, 2)$ ، $C(4, 0)$ و مبدأ مختصات، رؤس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، آنگاه حجم حاصل از دوران این چهارضلعی حول محور y چند برابر π است؟

- ۱) ۴۰ ۲) $\frac{122}{3}$ ۳) ۴۱ ۴) $\frac{128}{3}$

۱۶ نقطه‌ی $M(1, -2)$ وسط وترى از دایره‌ی $x^2 + ay^2 - 12x + 8y + 8 = 0$ است. طول این وتر چقدر است؟

- ۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $2\sqrt{6}$

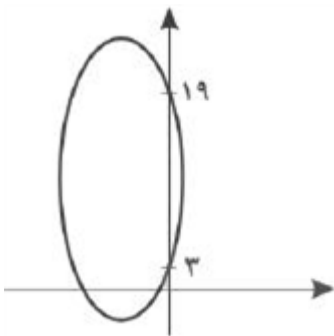
۱۷ یک بیضی با فاصله کانونی ۲ واحد، با دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ هم مرکز و بر آن در دو نقطه مماس است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ۳) $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

۱۸ دایره‌های $x^2 + y^2 + 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 2x = 3$ متقاطع‌اند. معادله‌ی وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

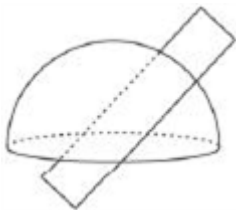
- ۱) $x = y$ ۲) $x = 1 + y$ ۳) $x = -y$ ۴) $x = 1 - y$

۱۹ در شکل زیر اگر یکی از کانون‌ها نقطه‌ی $F(-6, 19)$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



- ۱) $6 + 2\sqrt{73}$ ۲) $3 + 2\sqrt{73}$ ۳) $6 + 2\sqrt{69}$ ۴) $3 + 2\sqrt{69}$

۲۰ مطابق شکل صفحه‌ای یک نیم‌کره را قطع می‌کند. سطح مقطع ایجاد شده کدام است؟



۱ یک سهمی ۲ قسمتی از هذلولی ۳ قسمتی از دایره ۴ قسمتی از بیضی

۲۱ وضعیت خط $x + y = 3$ نسبت به دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ چگونه است؟

۱ خط دایره را قطع نمی‌کند. ۲ خط از مرکز دایره عبور می‌کند.

۳ خط دایره را قطع می‌کند و از مرکز دایره نمی‌گذرد. ۴ خط بر دایره مماس است.

۲۲ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱ مماس بیرون ۲ مماس درون ۳ متقاطع ۴ متخارج

۲۳ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $O(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. مختصات یکی از کانون‌های این بیضی کدام است؟

۱ $(-8, 1)$ ۲ $(-9, -1)$ ۳ $(-8, -1)$ ۴ $(-9, 1)$

۲۴ یک بیضی قائم داخل دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 1$ و هم‌مرکز با آن طوری قرار گرفته است که با نمودار دایره دقیقاً در دو نقطه برخورد می‌کند، در این صورت مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از کانون‌های آن چه قدر است؟

۱ ۶ ۲ ۳ ۳ $\sqrt{7}$ ۴ $2\sqrt{7}$

۲۵ به ازای چه مقادیری از k ، معادله $3x^2 + ay^2 + 6x - 2y = k$ مربوط به یک دایره خواهد بود؟

۱ $k > -1/25$ ۲ $k > -3/75$ ۳ $k < 1/25$ ۴ $k < 3/75$

۲۶ کره‌ای به قطر ۴ سانتی‌متر را طوری با صفحه P برش می‌زنیم که سطح مقطع ایجاد شده $3\pi \text{ cm}^2$ باشد. فاصله مرکز کره از صفحه P چه قدر است؟

۱ $\sqrt{2}$ ۲ ۱ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ ۲

۲۷ اگر اندازه‌ی خط مرکزین دو دایره $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ و $(x-\alpha)^2 + (y+1)^2 = 25$ برابر ۱ باشد، مقدار α و اوضاع نسبی دو دایره کدام است؟ ($\alpha \neq 0$)

۱ $\alpha = 2$ ، مماس درون ۲ $\alpha = 2$ ، متخارج ۳ $\alpha = 2$ ، متداخل ۴ $\alpha = -2$ ، متداخل

۲۸ اگر a و b طول اقطار یک بیضی و $\frac{3a}{a+b} = 2$ باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۱ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۹ در یک بیضی افقی به مرکز $(3, 4)$ طول قطر کوچک ۶ و فاصله کانونی برابر ۸ می‌باشد. مختصات یکی از دو سر قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

۱ $(2, 4)$ ۲ $(-4, 4)$ ۳ $(-2, 3)$ ۴ $(-2, 4)$

۳۰) طول قطر کوچک بیضی $\sqrt[4]{2}$ و فاصله یک کانون تا نزدیک‌ترین رأس ۲ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۱) مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به طول وتر $3\sqrt{2}$ را حول وترش دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟

- ۱) $9\sqrt{2}\pi$ ۲) $\frac{9}{4}\sqrt{2}\pi$ ۳) $\frac{9}{2}\sqrt{2}\pi$ ۴) $18\sqrt{2}\pi$

۳۲) دو دایره $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ و $(x-6)^2 + y^2 = 14$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

- ۱) متخارج ۲) مماس داخل ۳) مماس خارج ۴) متداخل

۳۳) فاصله نقطه متحرک $M(x, y)$ از نقطه $A(2, 3)$ به اندازه $\sqrt{3}$ برابر فاصله M تا نقطه $B(-1, 5)$ است. مختصات مرکز دایره مسیر حرکت M کدام است؟

- ۱) $(-3, 7)$ ۲) $(-\frac{7}{2}, 5)$ ۳) $(-\frac{3}{2}, 8)$ ۴) $(-\frac{5}{2}, 6)$

۳۴) طول وتری که خط $y = ax + 2$ بر روی دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ جدا می‌کند برابر با ۲ می‌باشد، مقدار a چه قدر است؟

- ۱) $2 \pm \sqrt{3}$ ۲) $1 \pm \sqrt{6}$ ۳) $1 \pm \sqrt{3}$ ۴) $2 \pm \sqrt{6}$

۳۵) دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$ مماس خارج می‌باشند. مقدار m کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -۴ ۴) -۳

۳۶) اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x, y)$ تا نقطه‌ی $A(2, 0)$ سه برابر فاصله‌اش تا نقطه‌ی $B(0, 4)$ باشد، معادله‌ی مکان هندسی M کدام است؟

- ۱) دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$ ۲) دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4})$
۳) دایره‌ای به مرکز $(-\frac{1}{4}, 9)$ ۴) دایره‌ای به مرکز $(-1, -9)$

۳۷) دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$ محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۱) ۱ و ۳ ۲) ۱ و ۴ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۴ و ۱/۵

۳۸) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-3, -1)$ از مرکز دایره‌ی $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 2 = 0$ چند برابر شعاع دایره است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۹) طول وتری که خط $x - 3y = 5\sqrt{10}$ بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 129 = 0$ جدا می‌کند، کدام است؟

- ۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۴۸

۴۰ مرکز دایره‌ای روی محور y هاست و دایره بر خطوط $y = x - ۲$ و $y = x + ۴$ مماس است. بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از محور افقی چقدر است؟

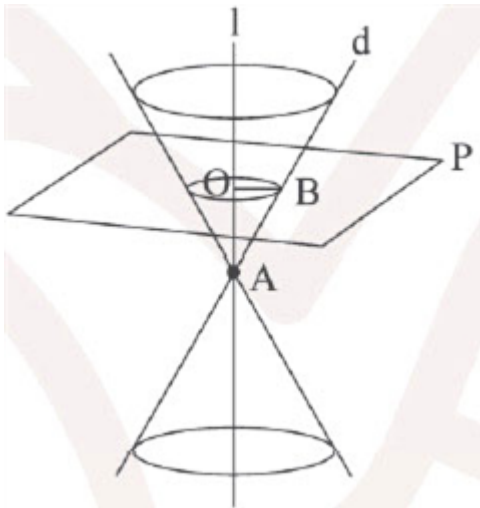
$$۲ + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{۴}$$

$$۱ + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{۳}$$

$$۳\sqrt{۲} \quad \text{۲}$$

$$\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{۱}$$

۱) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم یک دایره حادث می‌شود.



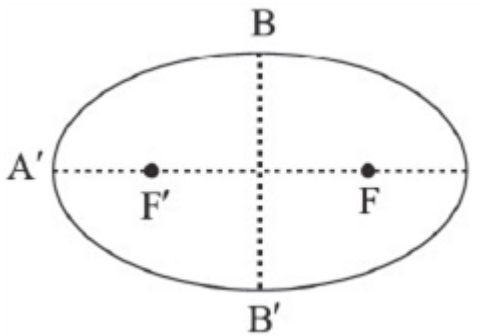
$$\frac{\text{محیط دایره}}{\text{فاصله صفحه تا رأس سطح مخروطی}} = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi OB}{OA} = 2\pi$$

$$\Rightarrow OB = OA$$

$$\triangle OAB : \hat{O} = 90^\circ, OB = OA$$

$$\xrightarrow{\text{مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه}} \hat{BAO} = 45^\circ$$

۲) گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق فرض سؤال، $\frac{c}{a} = \frac{ex}{\Delta x}$ حال داریم:



$$\frac{S_{BFB'F'}}{S_{ABF'B'}} = \frac{\frac{1}{2}(BB')(FF')}{\frac{1}{2}(BB')(AF')} = \frac{ex}{a+c} = \frac{ex}{\Delta x} = \frac{c}{a}$$

۳) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مرکز دایره در ناحیه سوم روی خط $y = x$ قرار دارد، پس $m, n > 0$ و داریم:

$$O\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right) \Rightarrow -\frac{m}{2} = -\frac{n}{2} \Rightarrow m = n$$

از طرف دیگر، شعاع دایره $\frac{\sqrt{10}}{2}$ است، پس داریم:

$$\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 4(m+n)} = \frac{\sqrt{10}}{2} \xrightarrow{m=n} 2m^2 - 4m = 10 \Rightarrow 2m^2 - 4m - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases} \Rightarrow m|n = 10$$

۴) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر صفحه موازی مولد باشد و از رأس عبور نکند، سهمی است.

اگر صفحه هر دو قسمت رویه را قطع کند و از رأس عبور نکند، هذلولی است و اگر از رأس عبور کند، دو خط متقاطع است. در هیچ حالتی سطح مقطع حاصل در رویه مخروطی، دو خط موازی نمی‌تواند باشد.

۵) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز و شعاع دو دایره را پیدا می‌کنیم.

$$O(5, 0) \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{100 - 64} = 3$$

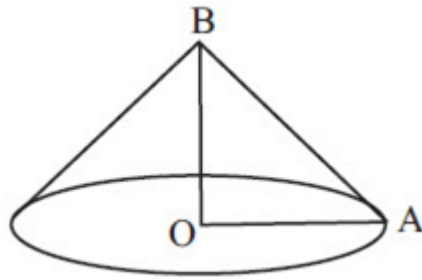
$$O'(0, 0) \quad R' = r$$

$$|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow |3 - r| < 5 < 3 + r$$

$$\begin{cases} |3 - r| < 5 \Rightarrow -5 < 3 - r < 5 \Rightarrow -2 < r < 8 \\ 5 < 3 + r \Rightarrow r > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < r < 8$$

با توجه به متقاطع بودن دو دایره، داریم:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶



$$V = \frac{1}{3}\pi(a^2)(b) = \frac{48\pi}{5} \Rightarrow a^2b = \frac{144}{5} \quad (1)$$

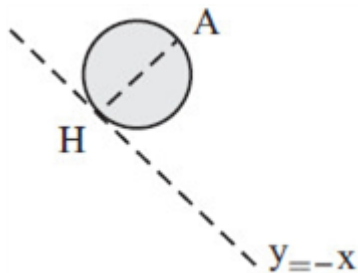
$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{15}{16} \Rightarrow a^2 = \frac{16b^2}{15} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \frac{16b^2}{15} \times b = \frac{144}{5} \Rightarrow b^3 = 27 \Rightarrow b = 3$$

بیشترین و کمترین فاصله از رئوس کانونی همان $a + c$ و $a - c$ است:

$$(a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = b^2 = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر AH قطر دایره است. ۷



فاصله A از نیمساز ناحیه دوم و چهارم

$$AH = \frac{|y_A + x_A|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

پس $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ شعاع دایره موردنظر است؛ معادله AH به صورت $y = x - 1$ است و از تلاقی آن با $y = -x$ نقطه H در

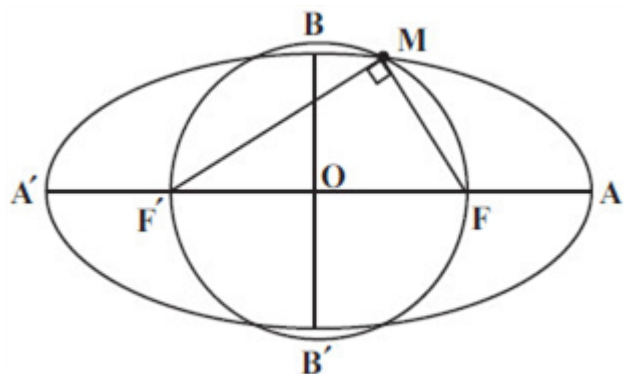
مختصات $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ قرار دارد. یعنی $O = \frac{A+H}{2} = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$ مرکز دایره و معادله دایره به صورت زیر است:

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور } x} \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{17}{16} \xrightarrow{\text{جزر}}$$

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{طول پاره خط} = |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸



$$\begin{cases} a + c = 9 \\ a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 5, c = 4$$

$$\xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} b = 3$$

$$MF + MF' = 2a = 10 \quad (1)$$

مثلث $MF'F$ قائم الزاویه است و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = (2c)^2 = 64 \Rightarrow (MF + MF')^2 - 2MF \times MF' = 64$$

$$\xrightarrow{MF + MF' = 10} MF \times MF' = 18 \quad (2)$$

$$S_{MFF'} = \frac{1}{2} \times MF \times MF' = \frac{1}{2} \times 18 = 9$$

مساحت MFF' برابر است با:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

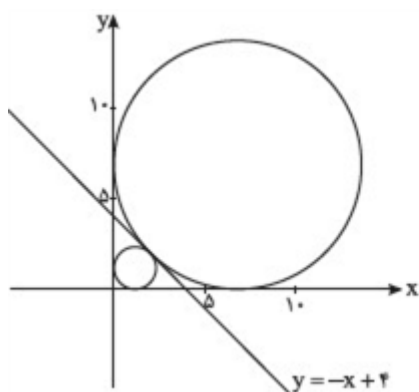
دایره بر محورهای مختصات مماس است. پس مرکز آن به صورت $O(r, r)$ می‌باشد. به علاوه بر خط $y = -x + 4$ هم مماس می‌باشد. پس فاصله‌ی آن از این خط هم برابر r می‌باشد.

$$OH = r \Rightarrow \frac{|r + r - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2r - 4|}{\sqrt{2}} = r$$

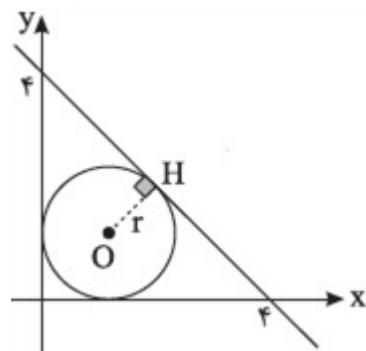
$$|2r - 4| = \sqrt{2}r \Rightarrow \begin{cases} 2r - 4 = \sqrt{2}r \Rightarrow 2r - \sqrt{2}r = 4 \\ 2r - 4 = -\sqrt{2}r \Rightarrow 2r + \sqrt{2}r = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{4}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4(2 + \sqrt{2})}{2} = 2(2 + \sqrt{2}) \\ r = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{2} = 2(2 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

توجه کنید که ما دو دایره با این ویژگی داریم. تفاضل شعاع آنها برابر است با:



$$4 + 2\sqrt{2} - (4 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$C_1 : O_1(4, \alpha) \xrightarrow{\text{مماس بر محور } y} r_1 = |\alpha|$$

$$C_2 : O_2(2, 5) \xrightarrow{\text{مماس بر محور } x} r_2 = 2$$

$$d = O_1O_2 = \sqrt{2^2 + (\alpha - 5)^2}$$

$$\Rightarrow d = r_1 + r_2 \Rightarrow \sqrt{4 + (\alpha - 5)^2} = |\alpha| + 2$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha} - 10\alpha + 25 + 4 = \cancel{\alpha} + 4|\alpha| + 4 \Rightarrow 4|\alpha| + 10\alpha = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow 14\alpha = 25 \Rightarrow \alpha = \frac{25}{14} \\ \alpha < 0 \Rightarrow 6\alpha = 25 \Rightarrow \alpha = \frac{25}{6} \end{cases}$$

غ ق ()

$$y_O = \frac{\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{r} + 1\right) + \left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{r} + 1\right)}{2} = 1 \Rightarrow O(2, 1)$$

$$b = OB = 2$$

$$c = OF = \sqrt{\Delta} + 2 - 2 = \sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2^2 + (\sqrt{\Delta})^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(2 + \sqrt{6}, 1) \Rightarrow A(\Delta, 1) \\ A'(2 - \sqrt{6}, 1) \Rightarrow A'(-1, 1) \\ B'(2, 1 - \sqrt{6}) \Rightarrow B'(2, -1) \end{cases}$$

معادله خط گذرنده از A و B' را حساب می‌کنیم.

$$m_{AB'} = \frac{1 + 1}{\Delta - 2} = \frac{2}{r} \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{r}(x - \Delta) \Rightarrow 2y - 2 = 2x - 10 \Rightarrow 2x - 2y = 8$$

حال معادله خط گذرنده از A' و B' را حساب می‌کنیم.

$$m_{A'B'} = \frac{1 + 1}{-1 - 2} = \frac{-2}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{-2}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 3 = -2x - 2 \Rightarrow 3y + 2x = 1$$

مشاهده می‌کنیم خطوط به دست آمده همان خطوط موردنظر سؤال هستند. پس پاره‌خط‌های موردنظرشان AB' و A'B' هستند.

$$AB' = \sqrt{(\Delta - 2)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{13}$$

$$A'B' = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow AB' + A'B' = 2\sqrt{13}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دایره موردنظر بر دو خط متقاطع $y = \frac{5}{12}x$ و $y = 0$ مماس است، پس مرکز آن روی نیمساز

این دو خط قرار دارد. حال معادله نیمسازهای بین این دو خط را می‌یابیم:

$$y = \frac{5}{12}x \Rightarrow 12y = 5x \Rightarrow 12y - 5x = 0$$

$$\frac{|12y - 5x|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = |y| \Rightarrow |12y - 5x| = 13|y|$$

$$12y - 5x = 13y \Rightarrow y = -5x$$

$$12y - 5x = -13y \Rightarrow y = \frac{1}{5}x$$

چون دایره باید از نقطه (4, 1) بگذرد، پس خط $y = \frac{1}{5}x$ مورد قبول است. چون مرکز دایره روی این دو خط قرار دارد، آن را

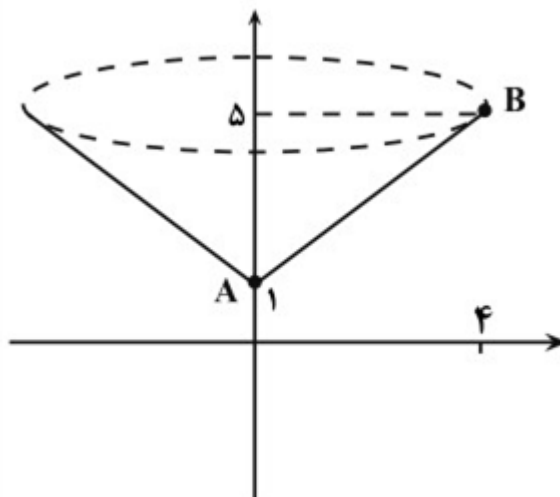
به شکل $(5\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم که در آن صورت شعاع دایره نیز برابر α خواهد بود.

$$(x - 5\alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2 \Rightarrow (4 - 5\alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 25\alpha^2 - 40\alpha + 16 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 \Rightarrow 25\alpha^2 - 42\alpha + 17 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \frac{17}{25}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع کوچکترین دایره} = \frac{17}{25}$$

شکل حاصل از دوران پاره خط AB حول محور y یک مخروط با شعاع ۴ و ارتفاع ۴ است.

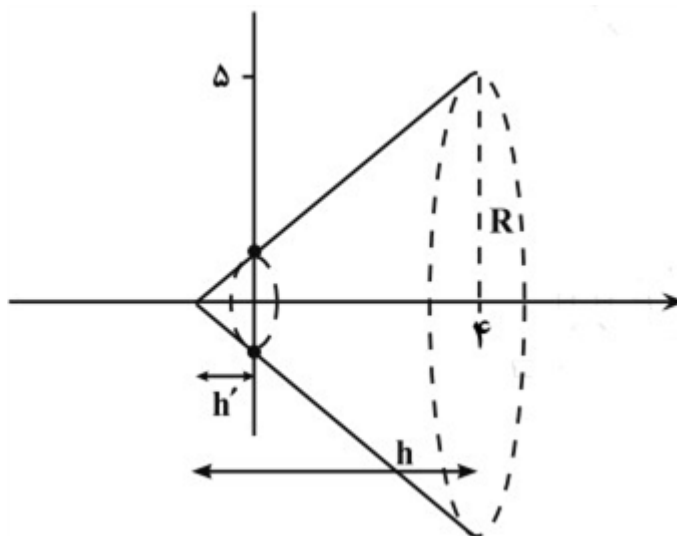


$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 4 = \frac{64\pi}{3} \xrightarrow{\pi \approx 3} 64$$

شکل حاصل از دوران پاره خط AB حول محور x یک مخروط ناقص است.

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h'$$

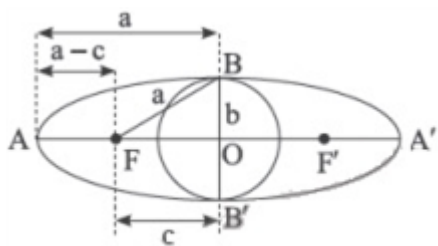
$$\frac{1}{3} \pi (25)(5) - \frac{1}{3} \pi (1)(1) = \frac{125\pi - \pi}{3} = \frac{124\pi}{3} \xrightarrow{\pi \approx 3} 124$$



$$V_{\text{جک}} = V_1 + V_2 = 124 + 64 = 188$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که بزرگ‌ترین وتر دایره همان قطر دایره است، بنابراین با توجه به شکل زیر اگر دو سر قطر یک دایره بر رئوس غیرکانونی یک بیضی منطبق باشد، در این صورت طول قطر کوچک بیضی (BB')، با قطر دایره برابر است، پس:

$$b = ۴ = \text{شعاع دایره}$$



حال با استفاده از رابطه‌ی خروج از مرکز بیضی، داریم:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow 0.7 = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{36}{100} = 1 - \left(\frac{4}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{a}\right)^2 = \frac{64}{100} \Rightarrow a = 5$$

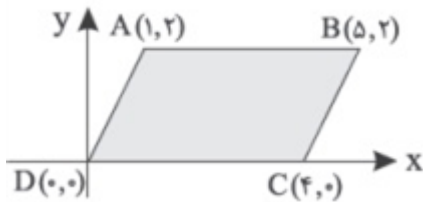
در مثلث OBF براساس رابطه‌ی فیثاغورس، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

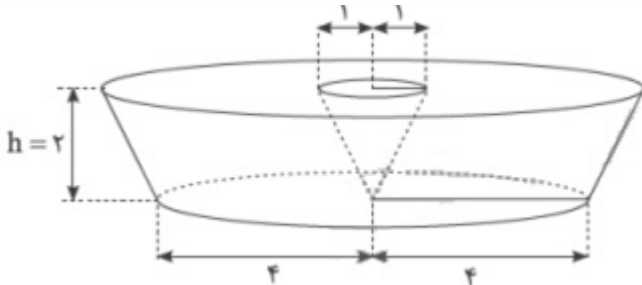
از طرفی مطابق شکل فوق، نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقاط بیضی از کانون، برابر است با:

$$AF = A'F' = a - c \xrightarrow[c=3]{a=5} AF = A'F' = 5 - 3 = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا متوازی‌الاضلاع ABCD را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



همانطور که در شکل زیر مشخص است، شکل حاصل از دوران، مخروط ناقصی است که یک مخروط از درون آن برداشته شده است و مخروط درونی، مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۱ و ارتفاع ۲ واحد است. بنابراین داریم:



$$V_{\text{مخروط درونی}} = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3}(\pi \times 1^2) \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

برای محاسبه‌ی حجم مخروط ناقص، مطابق شکل زیر ابتدا باید در مثلث BMN با استفاده از قضیه‌ی تالس مقدار x را محاسبه کنیم. پس:

$$\frac{MD}{MN} = \frac{CD}{BN}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 8$$

حالا طبق شکل بالا داریم:

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}}$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \left[\frac{1}{3}\pi(BN)^2 \times (MN) \right] - \left[\frac{1}{3}\pi(CD)^2 \times (MD) \right]$$

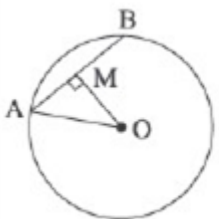
$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \left[\frac{1}{3}\pi(5)^2 \times (8+2) \right] - \left[\frac{1}{3}\pi(4)^2 \times (8) \right] = \frac{122\pi}{3}$$

در نهایت حجم حاصل از دوران متوازی‌الاضلاع ABCD حول محور y برابر است با:

$$V = V_{\text{مخروط ناقص}} - V_{\text{مخروط درونی}}$$

$$V = \frac{122\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 40\pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون معادله‌ی $2x^2 + ay^2 - 12x + 8y + 8 = 0$ معادله‌ی یک دایره است، پس باید ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر باشند، یعنی $a = 2$ است، در این صورت خواهیم داشت:



$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

$$\text{مرکز } O(3, -2), R = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 16 - 16} = 3$$

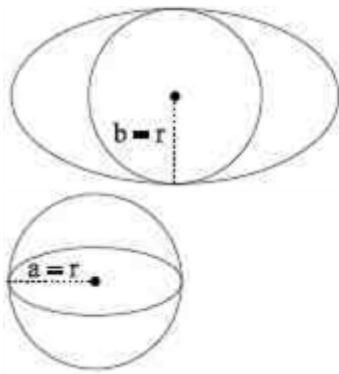
حال اگر از مرکز دایره به وسط وتر موردنظر وصل کنیم، OM بر AB عمود خواهد بود، زیرا مثلث OAB متساوی‌الساقین است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$OM = \sqrt{(3-1)^2 + 0} = 2 \Rightarrow AM = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{4 + 16 + 16}}{2} = 3$$

اگر بیضی هم‌مرکز با دایره باشد و بر آن در دو نقطه مماس باشد، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:



$$\left. \begin{matrix} b=r \\ c=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\left. \begin{matrix} a=r \\ c=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow e = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادلات دایره‌ها را در یک دستگاه بنویسیم، با حذف x^2 و y^2 از دستگاه هر آنچه بماند معادله وتر مشترک است. ۱۸

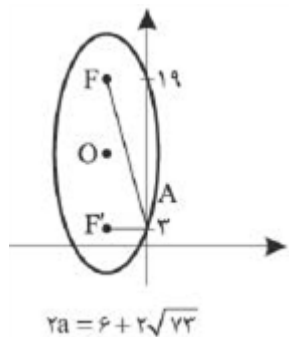
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به دلیل این‌که بیضی عمود است، کانون‌ها و مرکز هم‌طول هستند. ۱۹

$$\text{مرکز } O\left(-\frac{19+3}{2}, \frac{19+3}{2}\right) = (-6, 11) \Rightarrow F'(-6, 3)$$

$$FF' = 2c = 16 \Rightarrow c = 8$$

نقطه $A(0, 3)$ یک نقطه روی بیضی است، پس داریم:



$$AF + AF' = 2a$$

$$AF' = 6$$

$$AF = FF' + AF' \Rightarrow AF = \sqrt{(16)^2 + (6)^2}$$

$$\Rightarrow AF = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$$

$$AF + AF' = 6 + 2\sqrt{73} = 2a$$

طول قطر بزرگ برابر است با:

$$2a = 6 + 2\sqrt{73}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰

سطح مقطع حاصل از برخورد یک کره با یک صفحه همواره دایره است، پس سطح مقطع حاصل از برخورد نیم‌کره با صفحه، قسمتی از دایره می‌شود.

۲۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: برای تشخیص وضعیت یک خط نسبت به دایره، کافی است فاصله‌ی مرکز دایره را تا خط داده شده محاسبه کنیم، اگر این فاصله را d بنامیم، در این صورت خواهیم داشت:

خط، دایره را قطع نمی‌کند. $d > R \Rightarrow$

خط بر دایره مماس است. $d = R \Rightarrow$

خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. $d < R \Rightarrow$

کافی است فاصله‌ی مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازه‌ی آن را با اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه کنیم.

$$\text{مرکز} \quad x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow O(1, 0), R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 + 12} = 2$$

فاصله‌ی مرکز دایره از خط داده شده برابر است با:

$$d = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow d < R$$

چون فاصله‌ی مرکز دایره از خط داده شده از شعاع دایره کمتر است، پس می‌توان نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

۲۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0 \Rightarrow O(1, -3), R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 36 + 24} = 4$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0 \Rightarrow O'(-2, -4), R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 20} = 5$$

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{10}, R + R' = 9, |R - R'| = 1$$

دو دایره متقاطع هستند $|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow$

۲۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$F' \left| \begin{smallmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix} \right|, F \left| \begin{smallmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix} \right| \Rightarrow F' \left| \begin{smallmatrix} -8 \\ -1 \end{smallmatrix} \right|, F \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right|$$

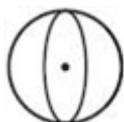
پس مختصات کانون‌های بیضی $F(0, 1)$ و $F'(-8, -1)$ است که یکی از آن‌ها در گزینه‌ها آمده است.

۲۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 1 \Rightarrow O(-2, 2), r = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

مطابق شکل برای این‌که بیضی در دو نقطه با دایره برخورد کند، $2a = 2r = 6$ باید باشد.



مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از کانون‌ها برابر $2a = 6$ می‌شود.

۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً ضریب x^2 و y^2 باید برابر باشند یعنی $a = 3$ خواهد بود.

$$3x^2 + 3y^2 + 4x - 3y = k \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - y = \frac{k}{3}$$

مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم:

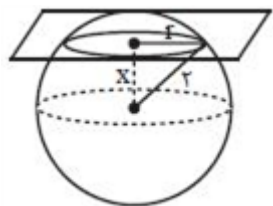
$$O\left(-1, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow R = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{k}{3}\right)} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{k}{3}}$$

عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد:

$$\frac{5}{4} + \frac{k}{3} > 0 \Rightarrow \frac{k}{3} > -\frac{5}{4} \Rightarrow k > -\frac{15}{4} \Rightarrow k > -3.75$$

۲۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مساحت مقطع ایجاد شده برابر 2π باشد داریم:



$$\pi r'^2 = 2\pi \Rightarrow r' = \sqrt{2}$$

با کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$r'^2 = r^2 + x^2 \Rightarrow 2 = 3 + x^2 \Rightarrow x = 1$$

۲۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$w(1, -1), w'(\alpha, -1)$$

$$d = |ww'| \Rightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2 + (-1+1)^2} = |1-\alpha| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & \alpha \neq 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2$$

$$r = 1, r' = 5$$

چون $d < |r - r'|$ است، پس دو دایره متداخل‌اند.

۲۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{ra}{a+b} = 2 \Rightarrow ra = 2a + 2b \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

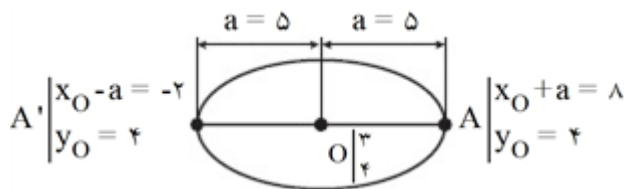
۲۹

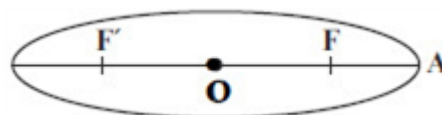
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در یک بیضی، طول قطر کوچک و فاصله کانونی به ترتیب برابر $2b$ و $2c$ است، بنابراین:

$$2b \Rightarrow 6 \Rightarrow b = 3$$

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

از طرفی در بیضی داریم: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$





مطابق شکل فرضی داریم:

$$2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$FA = 2 \Rightarrow a - c = 2 \quad (I)$$

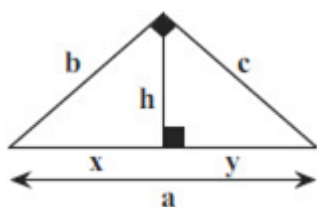
$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = (a - c)(a + c)$$

طبق رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ داریم:

$$b^2 = 2(a + c) \Rightarrow 8 = 2(a + c) \Rightarrow a + c = 4 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \begin{cases} a - c = 2 \\ a + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر مثلث قائم الزاویه به اضلاع b و c حول وتر خود که a می باشد دوران کند در مخروطهم قاعده و هم محور به حجم $V = \frac{\pi b^2 c^2}{4a}$ ساخته می شود.

زیرا:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 x + \frac{1}{3}\pi h^2 y = \frac{1}{3}\pi h^2 (x + y)$$

$$\xrightarrow{x+y=a} V = \frac{1}{3}\pi h^2 a \xrightarrow{h=\frac{bc}{a}} V = \frac{\pi}{3} \times \frac{b^2 c^2}{a}$$

طبق اطلاعات صورت سوال داریم:

$$a = 2\sqrt{2}$$

$$b = c$$

$$\text{فیثاغورس: } a^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow 8 = 2b^2 \Rightarrow b = 2$$

$$V = \frac{\pi b^2 c^2}{3a} = \frac{\pi \times 2 \times 2}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: دایره C_1 با مرکز O_1 و شعاع r_1 و دایره C_2 با مرکز O_2 و شعاع r_2 مفروضند. این

دو دایره نسبت به هم یکی از وضعیت های زیر را دارند:

• اگر $O_1 O_2 > r_1 + r_2$ ، دو دایره متخارج اند.• اگر $O_1 O_2 = r_1 + r_2$ ، دو دایره مماس خارج اند.• اگر $O_1 O_2 = |r_1 - r_2|$ ، دو دایره مماس داخل اند.• اگر $|r_1 - r_2| < O_1 O_2 < r_1 + r_2$ ، دو دایره متقاطع اند.• اگر $O_1 O_2 < |r_1 - r_2|$ ، دو دایره متداخل اند.

ابتدا شعاع و مختصات مرکز هر دو دایره را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 16 \Rightarrow O(3,3) \text{ و } r=4 \\ (x-6)^2 + (y-7)^2 = 1 \Rightarrow O'(6,7) \text{ و } r'=1 \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(6-3)^2 + (7-3)^2} = 5$$

اکنون طول خط المרכזین را محاسبه می کنیم:

حال با توجه به اینکه $OO' = r + r'$ طبق نکته دو دایره مماس خارج هستند.

نکته: فاصله نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

طبق فرض داریم: $AM = \sqrt{2} BM$ حال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} &= \sqrt{2} \times \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} \\ \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 2(x+1)^2 + 2(y-5)^2\end{aligned}$$

راه حل اول:

نکته: مختصات مرکز دایره $f(x, y) = 0$ از دستگاه $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 4(x+1) \Rightarrow x-2 = 2x+2 \Rightarrow x = -\frac{4}{2} \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2(y-3) = 4(y-5) \Rightarrow y-3 = 2y-10 \Rightarrow y = 7 \end{cases} \Rightarrow O\left(-\frac{4}{2}, 7\right)$$

راه حل دوم:

نکته: مختصات مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ عبارت است از: $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 - 20y + 10$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 10x - 24y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 5x - 12y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow O\left(-\frac{5}{2}, 6\right)$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O(-2, 1)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 - 4} = 2 \Rightarrow R = 2$$

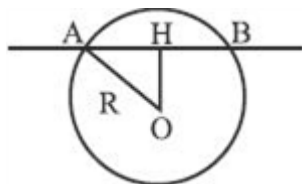
$$OH = \frac{|1+2a-2|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{|2a-1|}{\sqrt{1+a^2}} \quad y - ax - 2 = 0$$

$$AB = 2 \Rightarrow AH = 1 \Rightarrow (AH)^2 + (OH)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - (AH)^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{|2a-1|}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{3} \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 3a^2 + 3 \Rightarrow a^2 - 4a - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 + 8 = 24 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} \Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{6}$$



دو دایره $C(O, R)$ و $C(O', R')$ با فرض $d = OO'$ مماس خارج هستند، هرگاه: $d = R + R'$ در معادله گسترده

دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ شعاع دایره برابر $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ است.

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \Rightarrow O(1, -1), R = 1$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0 \Rightarrow O'(-2, 3), R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 - 4m} = \frac{1}{2} \sqrt{52 - 4m} = \sqrt{13 - m}$$

$$d = O'O = \sqrt{(1+2)^2 + (-3+1)^2} = 5 = R + R' \Rightarrow 5 = 1 + \sqrt{13 - m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13 - m} = 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 13 - m = 16 \Rightarrow m = -3$$

۳۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

باید معادله‌ی $AM = 3BM$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} &= 3\sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} \\ &= 3\sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9(x^2 + y^2 - 8y + 16) \\ &\Rightarrow 8x^2 + 8y^2 + 4x - 72y + 140 = 0 \xrightarrow{\div 8} x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - 9y + \frac{35}{2} = 0 \end{aligned}$$

با توجه به فرم گسترده، مکان هندسی موردنظر، دایره‌ای به مرکز $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\right)$ است.

۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x - y - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2 + 1 - 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 = 1$$

$$x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$x-2 = -1 \Rightarrow x = 1$$

۳۸

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

$$O(3, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 4} = 2$$

$$OA = \sqrt{36 + 0} = 6 \Rightarrow OA = 2R$$

۳۹

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y - 129 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = 13^2$$

$$OH = \frac{|\hat{r} - 3(2) - 5\sqrt{10}|}{\sqrt{1+9}} = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 5, r = 13$$

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AH = 12$$

$$AB = 2AH = 24$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مرکز این دایره، روی خط وسطی قرار دارد:

$$y = \frac{x + 4 + x - 2}{2} = x + 1$$

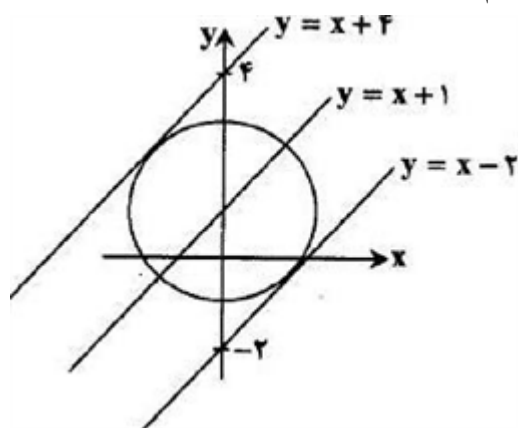
پس مرکز دایره روی محور y هاست و روی خط $y = x + 1$ هم هست.

یعنی باید نقطه‌ی $C(0, 1)$ باشد. شعاع دایره، نصف فاصله‌ی این دو خط موازی است:

$$2R = \frac{|4 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

حالا بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از محور افقی، یعنی عرض بالاترین نقطه‌ی دایره، برابر است با $y_C + R$ ، یعنی

$$1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

