



نام و نام خانوادگی :

زمان آزمون :

پایه تحصیلی :

نام درس :

نام دبیر :

نام آموزشگاه :

عنوان آزمون : تست ریاضی دوازدهم تجربی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۶/۰۲

فصل ۴

۱ در کدام مورد، خط $x = 2$ می‌تواند مماس قائم تابع باشد؟

۱ $f(x) = \sqrt{x-2}$

۲ $f(x) = \sqrt{|x-2|}$

۳ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$

۴ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & ; x \geq 2 \\ \frac{1}{x-2} & ; x < 2 \end{cases}$

۲ اگر $f(1) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - \sqrt{x} + 6} = -2$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x^2 f(x)$ را در $x = 1$ به دست آورید.

۳ خط مماس بر منحنی $y = \frac{-4}{x^2}$ در نقطه‌ای به طول یک واقع بر آن، نمودار تابع را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱ -۲

۲ $-\frac{1}{4}$

۳ $-\frac{1}{2}$

۴ -۱

۴ هرگاه $f(x) = x + 2\sqrt{x-4}$ و $g(x) = (\sqrt{x-3} - 1)^2 + 4$ ، مقدار $f'(9) \cdot g'(f(9))$ چه عددی است؟

۱ ۵

۲ ۴

۳ ۱

۴ ۹

۵ اگر مشتق راست تابع $f(x) = \frac{a[x^3 + 1]}{x} + bx[x^2]$ در $x = 1$ دو واحد از مشتق چپ آن در این نقطه بیشتر باشد، حاصل $a - 2b$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱ ۲

۲ ۳

۳ -۱

۴ صفر

۶ در تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{y}{x} & x < 1 \\ \frac{-x^2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$ ، زاویه‌ی بین نیم‌مماس‌های رسم شده در $x = 1$ چند درجه است؟

۱ ۹۰

۲ ۴۵

۳ ۱۳۵

۴ ۱۵۰

۷ اگر $f(x) = \frac{x^3 \sqrt{x} + x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ ، آنگاه مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱ $\frac{51}{36}$

۲ $\frac{29}{18}$

۳ $\frac{31}{18}$

۴ $\frac{61}{36}$

۸ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^2 - 4| x$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱ ۴

۲ ۳

۳ ۲

۴ ۱

۹ تابع $f(x) = (x^2 + (m + 2n)x)[x^2 + nx]$ در $x = 2$ مشتق مخالف صفر دارد. اگر $f'_+(0) = 10$ باشد، حاصل $m - n$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{Z}$ و [] نماد جزء صحیح است.)

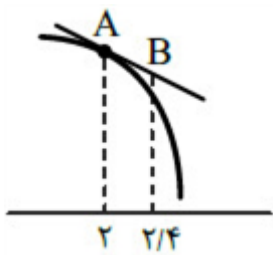
۱ ۲

۲ ۴

۳ -۲

۴ -۴

۱۰ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f'(2) = -0.5$ و $f(2) = 5$ باشد، مقدار تقریبی $f(2.4)$ به کدام عدد نزدیکتر است؟



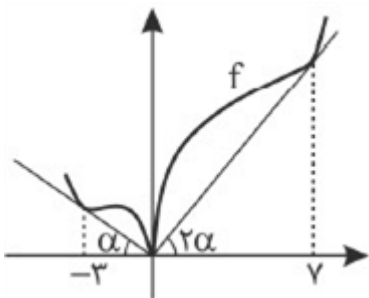
۴/۹ (۴)

۴ (۳)

۳/۶ (۲)

۴/۸ (۱)

۱۱ در شکل مقابل، $f'(-3) = \frac{-3}{4}$ است. مقدار $f(7)$ کدام است؟



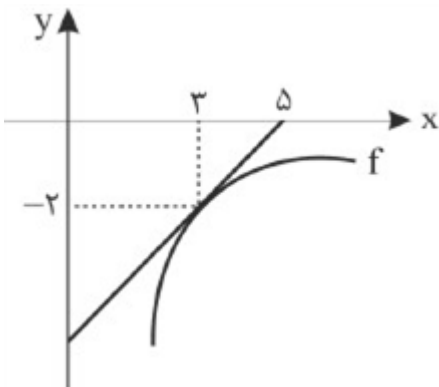
۲۴ (۴)

۲۱ (۳)

۱۸ (۲)

۱۴ (۱)

۱۲ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ مشابه شکل مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - f(x) - 6}{x - 3}$ کدام است؟



-۱۲ (۴)

-۶ (۳)

-۵ (۲)

-۱۰ (۱)

۱۳ خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۲/۷۵ (۴)

۰/۷۵ (۳)

۳/۲۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

۱۴ اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{a\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$ در نقطه‌ی $x = 16$ برابر $\frac{1}{20}$ باشد، آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌ی $[1, 9]$ کدام است؟

$\frac{3}{16}$ (۴)

$\frac{1}{32}$ (۳)

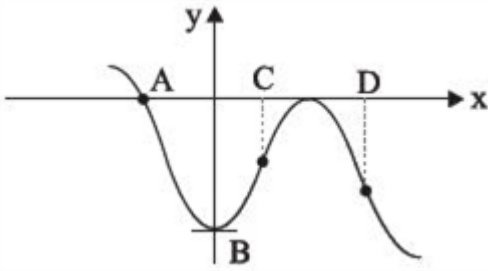
$\frac{1}{16}$ (۲)

$\frac{3}{32}$ (۱)

۱۵ اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & ; x \geq 1 \\ a^2x - bx^2 & ; x < 1 \end{cases}$ در R مشتق پذیر باشد و $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1$ ، مقدار a کدام است؟

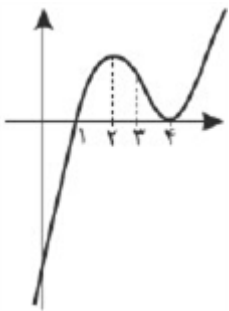
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۱۶ نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $af'(a)$ منفی باشد، a طول کدام نقطه زیر می تواند باشد؟



- A (۱) B (۲) C (۳) D (۴)

۱۷ نمودار تابع f به صورت مقابل است. در کدام نقطه $f(a) - f'(a)$ منفی است؟



- $a = 1$ (۱) $a = 2$ (۲) $a = 3$ (۳) $a = 4$ (۴)

۱۸ فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$. اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

- $-\frac{15}{2}$ (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{15}{2}$ (۴)

۱۹ عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = 2^x + x^{2^x}$ در نقطه $x = -1$ واقع بر نمودار f کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$ (۱) -1 (۲) 1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۲۰ تابع f در $x = 3$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = 2$ است. مشتق تابع $y = x\sqrt{f(x)}$ در نقطه $x = 3$ چقدر است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴)

۲۱ خط مماس بر منحنی $y = \frac{4}{x^2}$ در نقطه $x = 2$ در ادامه نمودار تابع را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

- -1 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴)

۲۲ بر منحنی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{3}x}{4(1+x)}$ دو خط مماس که با جهت مثبت محور x ها زاویه 60° می سازند، رسم می کنیم. اختلاف طول دو نقطه تماس کدام است؟

- ۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۳ تابع $f(x) = |x|[\sin x]$ در $x = 0$ چگونه است؟

- ۱ مشتق پذیر است. ۲ نقطه گوشه دارد. ۳ مماس قائم دارد. ۴ ناپیوسته است.

۲۴ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان $0/4$ ثانیه است نشان دهد؟

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

- الف) $1/23 \frac{m}{s}$ ب) $14/91 \frac{m}{s}$ پ) $11/5 \frac{m}{s}$ ت) $16/03 \frac{m}{s}$

۲۵ مجموع مقادیر مشتق های چپ و راست تابع $f(x) = |x - x| + |x + 1|$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- ۱ -۱۰ ۲ -۱۲ ۳ -۱۴ ۴ -۱۶

۲۶ نقاط $A\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$ و $B\left(\frac{\pi}{2} + h, \sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right)$ روی نمودار تابع $f(x) = \sin x$ مفروض اند. $\lim_{h \rightarrow 0} m_{AB}$ چه قدر است؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ صفر ۴ $\frac{1}{2}$

۲۷ یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3, 4]$ چه قدر است؟

۲۸ آهنگ متوسط تغییرات تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ وقتی x از ۱ به $(1/21)$ افزایش می یابد چه قدر از آهنگ لحظه ای آن در $x = 1$ کمتر است؟

- ۱ $\frac{1}{21}$ ۲ $\frac{2}{21}$ ۳ $\frac{1}{42}$ ۴ $\frac{3}{42}$

۲۹ مشتق تابع با ضابطه ی $f(x) = 7x + 4$ را به کمک تعریف بدست آورید.

۳۰ معادله ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه ی $y = 2\sqrt{x}$ را در $x = 4$ واقع بر منحنی، به دست آورید.

۳۱ مشتق تابع $y = \frac{x^2 - 6x^2 + 12x - 20}{x\sqrt{2x}}$ در نقطه ی $x = 2$ کدام است؟

- ۱ $\frac{9}{2}$ ۲ $\frac{9}{8}$ ۳ $\frac{9}{4}$ ۴ ۹

۳۲ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ و $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ، حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ در $x = 1$ کدام است؟

- ۱ $\frac{21}{12}$ ۲ ۱ ۳ $-\frac{21}{12}$ ۴ $\frac{5}{12}$

۳۳ در تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ $-\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{16}$

۳۴ اگر $f(x - 1) = \sqrt{x + 3}$ باشد، مشتق تابع $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ در $x = 1$ چقدر است؟

- ۱ $\frac{1}{8}$ ۲ $-\frac{1}{8}$ ۳ $\frac{1}{16}$ ۴ $-\frac{1}{16}$

۳۵ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x|x|$ و مشتق دوم آن را در نقطه‌ی $x = 0$ بررسی کنید.

۳۶ متحرکی که بر محور x ها در حرکت است، دارای معادله‌ی $x = t^2 + 5t + 11$ می‌باشد. t را بر حسب ثانیه و x را بر حسب سانتی‌متر بگیرید.

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t = 1$ و $t = 3$ به دست آورید.
ب) سرعت لحظه‌ای آن را در زمان $t = 2$ به دست آورید.

۳۷ مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)
 $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

۳۸ مشتق تابع مقابل را به دست آورید و دامنه‌ی مشتق‌پذیری تابع را مشخص کنید:
 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

۳۹ مشتق تابع مقابل را بدست آورید:
 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

۴۰ مشتق تابع مقابل را بدست آورید:
 $f(x) = (1 + 3x)^2$

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق تعریف، زمانی $x = a$ مماس قائم تابع f است که اولاً تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، ثانیاً f در $x = a$ مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد.

در گزینه ۱: تابع در $x = 2$ فقط پیوستگی راست دارد. (تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف نشده است).
در گزینه‌های ۳ و ۴: در $x = 2$ مشتق چپ و راست نامتناهی دارند اما در $x = 2$ پیوسته نیستند.

اما در گزینه ۲: تابع در $x = 2$ پیوسته است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{|x - 2|} = f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{|x - 2|} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{-(x - 2)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{-\sqrt{-(x - 2)}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{|x - 2|} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x - 2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{-2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{-2} f'(1) = -2 \Rightarrow f'(1) = 1$$

۲

$$g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=1} g'(1) = 2f(1) + f'(1)$$

$$= 2 \times 3 + 1 = 7$$

۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y(1) = -4$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow m = y'(1) = 1$$

$$\text{خط مماس} : y = 1x - 12$$

$$\text{تقاطع} : 1x - 12 = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow 1x - 3 = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow 1x^3 - 1x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 (1x + 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{1}$$

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (\sqrt{x - 4} + 1)^2 + 3 \Rightarrow (\sqrt{f(x) - 3} - 1)^2 + 4 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x - 3} - 1)^2 + 4$$

پس $g(x) = f^{-1}(x)$ لذا $\text{gof}(x) = x$ زیرا:

$$f^{-1} \circ f(x) = x, f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) \cdot f'(f^{-1}(x)) = 1$$

$$(\text{gof})'(1) = f'(1) \cdot g'(f(1)) = 1 \quad \text{پس:}$$

۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در یک همسایگی $x = 1$ ضابطه‌های تابع را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3a}{x} & ; x < 1 \\ \frac{3a}{x} + bx & ; x \geq 1 \end{cases}$$

برای این‌که تابع مشتق‌های چپ و راست داشته باشد، لازم است که پیوسته باشد:

$$\Rightarrow \frac{3a}{(1)} = \frac{3a}{(1)} + b(1) \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

حال تابع مشتق را در همین همسایگی به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3a}{x^2} & ; x < 1 \\ -\frac{3a}{x^2} + b & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'_{-(1)} = -3a, f'_{+(1)} = -3a + b$$

$$\Rightarrow -3a + b + 3a = 2 \Rightarrow b - a = 2 \quad (2)$$

مشتق راست ۲ واحد از مشتق چپ بیشتر است:

$$b = 1, a = -1 \Rightarrow 2b - a = 3$$

از دستگاه معادلات ۱ و ۲ به دست می‌آید:

۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شیب‌ها قرینه و معکوس هم‌اند، پس بر هم عمودند. لازم به ذکر است که تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \\ -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 3 \\ f'_-(1) = -1 \end{cases}$$

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مقدار خواسته شده مشتق دوم تابع f به ازای $x = 1$ است. برای راحت‌تر شدن محاسبات، ابتدا تابع مورد نظر را با توان کسری بازنویسی می‌کنیم، سپس از آن دو بار مشتق می‌گیریم:

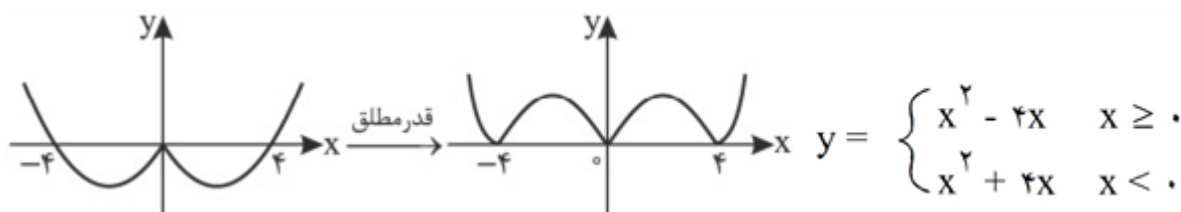
$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{x} + x^2\sqrt[3]{x}}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{5} \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{3}} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{3}} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{15}x^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{28}{45}x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f''(1) = \frac{3}{4} \times 1 + \frac{28}{45} \times 1 \Rightarrow f''(1) = \frac{45 + 28}{36} \Rightarrow f''(1) = \frac{73}{36}$$

۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $y = x^2 - 4|x|$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور x قرار دارند را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



تابع f در ۳ نقطه‌ی $x = 4$ ، $x = 0$ ، $x = -4$ مشتق‌ناپذیر است.

۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مقدار عبارت $x^2 + nx$ به ازای $x = 2$ صحیح است. این یعنی اگر $x = 2$ طول یک نقطه غیر از نقطه رأس سهمی $y = x^2 + nx$ باشد، تابع $y = [x^2 + nx]$ در $x = 2$ مشتق‌ناپذیر است و برای این‌که f مشتق‌پذیر شود، لازم است $x = 2$ ریشه مضاعف عبارت $x^2 + (m + 2n)x$ شود که این امکان‌پذیر نیست. در نتیجه $x = 2$ طول رأس سهمی $y = x^2 + nx$ است:

$$\Rightarrow -\frac{n}{2} = 2 \Rightarrow n = -4 \Rightarrow f(x) = (x^2 + (m - 4)x) [x^2 - 4x]$$

حال از تساوی $f'_+(0) = 10$ مقدار m را پیدا می‌کنیم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + (m - 4)x)(-4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-4x - 4m + 16) = 10$$

$$\Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow m - n = -2 + 4 = 2$$

دقت کنید که اگر $x \rightarrow 0^+$ ، $[x^2 - 4x] = [0^-] = -1$.

۱۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله خط مماس در نقطه $A(2, 5)$ را به دست می‌آوریم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \xrightarrow{m=f'(2)=-0.5} y - 5 = -0.5(x - 2) \Rightarrow y = -0.5x + 6$$

نقطه B با طول $2/4$ روی خط مماس قرار دارد، لذا عرض نقطه B برابر است با:

$$\xrightarrow{x_B=2/4} y_B = -0.5 \times 2/4 + 6 = 4/8$$

از آنجا که $f(2/4)$ به عرض نقطه B بسیار نزدیک است پس مقدار $f(2/4)$ به $4/8$ نزدیک‌تر است.

$$f'(-3) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{3 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

$$\Rightarrow f'(7) = \frac{24}{7} = \frac{f(7)}{7} \Rightarrow f(7) = 24$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^5(x) - f(x) - 6}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x) + 2)(f(x) - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - (-2)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \times (-2 - 3) \\ &= -5f'(3) \end{aligned}$$

مقدار $f'(3)$ نیز، شیب خط مماس بر f در $x = 3$ است که از نقاط $(3, -2)$ و $(5, 0)$ عبور می‌کند:

$$(3, -2), (5, 0) \xrightarrow{\text{شیب}} m = \frac{0 - (-2)}{5 - 3} = 1 \Rightarrow f'(3) = 1$$

$$\Rightarrow -5f'(3) = -5$$

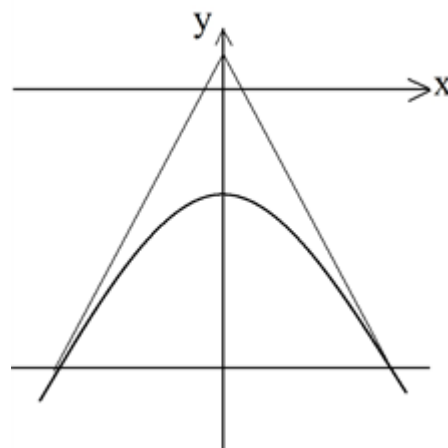
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط d سهمی $y = -x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع کرده است.

برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب‌های آن‌ها $+1$ و -1 باشند، زیرا نسبت به خط $x = 0$

متقارن هستند، پس مشتق تابع را برابر ± 1 قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{y = -x^2 - 1} y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط d است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $1/25$ است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$f(x) = \frac{a\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(a \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x} + 1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(a\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{\left(a \times \frac{1}{2}\right)(1 + 1) - \frac{1}{2}(a + 3)}{(1 + 1)^2} = \frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{-3}{2}}{2} = \frac{-3}{4}$$

$$f'(1) = \frac{a-3}{4} \Rightarrow x=1 \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه‌ی } x=1$$

$$\Rightarrow \frac{a-3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a-3=1 \Rightarrow a=4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} \Rightarrow [1, 9] \text{ آهنگ تغییرات متوسط در بازه‌ی } [1, 9] = \frac{f(9) - f(1)}{9 - 1}$$

$$\Rightarrow [1, 9] \text{ آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی } [1, 9] = \frac{\frac{15}{4} - \frac{7}{2}}{8} = \frac{\frac{1}{4}}{8} = \frac{1}{32}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون f در R مشتق‌پذیر است، در $x=1$ پیوسته است و مشتق چپ و راست برابر دارد: ۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a + b = a^2 - b \Rightarrow a^2 - 2b = a \quad (*)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x \geq 1 \\ a^2 - 2bx & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 2a + b \\ f'_-(1) = a^2 - 2b \end{cases} \xrightarrow{\text{برای مشتق‌ها}} 2a + b = a^2 - 2b$$

$$(*) \rightarrow 2a + b = a \Rightarrow a + b = 0$$

پس با توجه به ضابطه اول $f(1) = 0$ و با توجه به فرض، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1$ که یعنی: $f'_-(1) = -1$

پس با توجه به مشتق‌پذیری تابع داریم: $f'_+(1) = a + a + b = a = -1$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶

	A	B	C	D
a	-	.	+	+
f'(a)	-	.	+	-

در نقطه D ، حاصل $af'(a)$ منفی است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷

مقادیر f و f' در نقاط به طول ۱، ۲، ۳ و ۴ به صورت زیر است:

x	۱	۲	۳	۴
f	.	+	+	.
f'	+	.	-	.

در $x=1$ مقدار $f - f'$ منفی است.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

شرط پیوستگی: $\cancel{4a} + 10 + b = \cancel{4a} + 5 \Rightarrow b = -5$

شرط مشتق های راست و چپ: $2ax + 5 = 2a \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$

$$\Rightarrow -5 + \left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-15}{2}$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \text{شیب خط مماس} : f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^{2x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} x^x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط مماس} : y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(3-h) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4 \Rightarrow f(3) = 4$$

حال حد داده شده را می توان چنین نوشت:

$$2 = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = -f'(3) \Rightarrow f'(3) = -2$$

حال از رابطه ی $y = x\sqrt{f(x)}$ مشتق می گیریم:

$$y' = 1\sqrt{f(x)} + x \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow y'(3) = \sqrt{f(3)} + 3 \times \frac{f'(3)}{2\sqrt{f(3)}} = 2 + 3 \times \frac{-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3$$

محل تلاقی خط مماس و منحنی را می یابیم:

$$-x + 3 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow -x^3 + 3x^2 = 4 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = -1$ طول نقطه ی تقاطع و $x = 2$ طول نقطه ی تماس است.

بیابیم که مشتق در آن ها برابر $f'(x) = \sqrt{3}$ است (زیرا شیب خط مماس بر منحنی برابر مشتق تابع f در نقطه تماس است).

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}x}{2(x+1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1(x+1) - 1(x)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{(x+1)^2} = \sqrt{3} \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x+1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

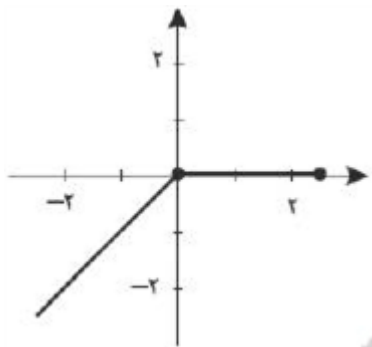
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۳

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| [\sin x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x [0^+]}{x} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| [\sin x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x [0^-]}{x} = 1$$

با توجه به این که مشتق راست و چپ در نقطه $x = 0$ موجود و نابرابر است، تابع در نقطه $x = 0$ نقطه گوشه دارد. نمودار این تابع اطراف $x = 0$ این شکلی است.



گزینه ی پ درست است. ۲۴

$$\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.5 - 0.4} = \frac{12/4 - 16/3}{0.1} = \frac{1/1}{0.1} = 11$$

$$\frac{f(0.4) - f(0.3)}{0.4 - 0.3} = \frac{16/3 - 15/1}{0.1} = \frac{1/2}{0.1} = 12$$

$$\Rightarrow \text{میانگین} = \frac{11 + 12}{2} = 11.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقدار عبارت $x^4 - x^2$ در همسایگی نقطه $x = -1$ منفی است، بنابراین داریم: ۲۵

$$f(x) = -x^4 + x^2 + |x + 1|$$

حال برای محاسبه مشتق راست در $x = -1$ داریم $x > -1$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) = -x^4 + x^2 + x + 1 = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'_+(-1) = -5$$

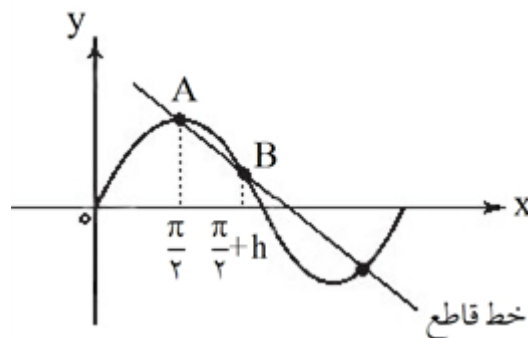
و برای محاسبه مشتق چپ در $x = -1$ داریم $x < -1$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) = -x^4 + x^2 - (x + 1) = x^2 - 5x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'_-(-1) = -7$$

$$\Rightarrow f'_+(-1) + f'_-(-1) = -5 - 7 = -12$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۶

به نمودار تابع $f(x) = \sin x$ و نقاط A و B روی آن توجه کنید. اگر خط قاطع را در جهت مثلثاتی حول نقطه A دوران دهیم، قاطع به خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه A تبدیل می شود و شیب خط مماس در نقطه A صفر خواهد شد.



آهنگ متوسط ۲۷

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} (0.25) = \frac{130 - (\sqrt{3} + 54)}{1} (0.25) = 76 - \sqrt{3} (0.25)$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$\text{آهنگ متوسط: } \frac{f(1/21) - f(1)}{1/21 - 1} = \frac{[2(1/21) + \sqrt{1/21}] - (2 + 1)}{1/21 - 1} = \frac{52}{21}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای: } f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{تفاضل: } \frac{5}{2} - \frac{52}{21} = \frac{1}{42}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) + 4 - (2x + 4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

۲۹

ابتدا مشتق می‌گیریم و سپس شیب خط را مشخص می‌کنیم: ۳۰

$$x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 4$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$y = \frac{(x-2)^3 - 12}{\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \frac{(x-2)^3}{\sqrt{2} x^{\frac{3}{2}}} - \frac{12}{\sqrt{2}} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \times \frac{-3}{2} x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow y'(2) = \frac{1}{4}\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

مشتق f در $x = 2$ صفر است، پس:

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در واقع باید $(f \cdot g)'(1)$ را به دست آوریم: ۳۲

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{5}{2}}} \rightarrow f(x) = x^{\frac{5}{4}} \\ g(x) &= \frac{1}{x \times x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \rightarrow g(x) = x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^{\frac{5}{4}} \times x^{-\frac{3}{2}} = x^{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow (fg)'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \rightarrow (fg)'(1) = \frac{1}{4}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر بنویسیم $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4}$ ، با استفاده از قاعده‌ی مشتق تقسیم داریم: ۳۳

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 1)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{0(4) - (-1)(-4)}{4^2} = -\frac{1}{4}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$y = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{2} f'(1)$$

$$f(2x - 1) = \sqrt{x + 2} \Rightarrow 2f'(2x - 1) = \frac{1}{2\sqrt{x + 2}} \Rightarrow f'(2x - 1) = \frac{1}{4\sqrt{x + 2}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$y'(1) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & x \geq 0 \\ -x^{\frac{1}{2}} & x < 0 \end{cases}$$

$$f_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 0}{x - 0} = \frac{1}{2}, f_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^{\frac{1}{2}} - 0}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

۳۵

مشتق دوم در نقطه‌ی صفر وجود ندارد

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 0}{x - 0} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^{\frac{1}{2}} - 0}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{سرعت متوسط الف} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\text{ب) } f'(x) = 2t + 5 \rightarrow f'(2) = 9 = V(2)$$

$$y' = \frac{3x^2 + 2}{5\sqrt{(x^3 + 2x)^5}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^5} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^5}, D_{f'} = R - \{-1\}$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \Rightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2x$$

$$f(x) = (1 + 3x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(1 + 3x) \times 3 = 6 + 6x$$

۳۶

۳۷

۳۸

۳۹

۴۰

1	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
28	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4
33	1	2	3	4
34	1	2	3	4

