



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۶/۰۳

عنوان آزمون : تست ریاضی دوازدهم تجربی

فصل ۳

۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 2x})$ کدام است؟

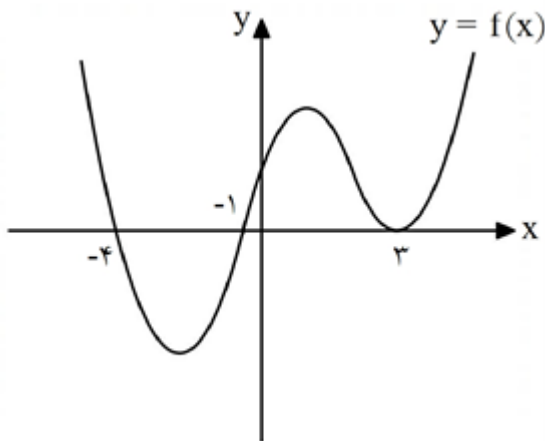
۴) $-\frac{7}{6}$

۳) $-\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{6}$

۱) صفر

۲) اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، در این صورت به ازای کدام مقدار a ، $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = -\infty$ است؟
[] نماد جزء صحیح است.



۴) -۱ و -۴

۳) فقط -۴

۲) فقط -۱

۱) فقط ۳

۳) حاصل کدام حد درست محاسبه شده است؟

۲) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{x^2 - 1} = -\infty$

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x[x]} = -\infty$

۴) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{\tan x} = -\infty$

۳) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} \tan x = +\infty$

۴) تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(a-2)x^3 + (a-3)x^2 + 3x + c}{(b-1)x^4 - 4x + a}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = +\infty$ آنگاه همه مقادیر c کدام است؟

۴) $c > -3$

۳) $c > -2$

۲) $0 < c < 2$

۱) $c < 1$

۵) اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} + ax}{x - 2}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را حساب کنید.

۶ اگر $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - a} = +\infty$ ، آنگاه حد تابع وقتی $x \rightarrow 2$ را بیابید.

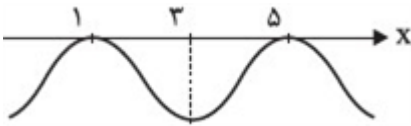
۷ اگر باقیمانده تقسیم $f(x) = x^3 + x^2 + ax$ بر $x - 2$ برابر ۸ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x^2 - [x]}$ کدام است؟ ()
نماد جزء صحیح است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱/۵ (۴) ۰/۵ (۵)

۸ اگر $f(2x - 1) = x^3 + mx^2 - x + m - 1$ باشد و باقیمانده تقسیم $f(x - 1)$ بر $x + 2$ برابر ۳ باشد، m کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) -۲ (۵)

۹ هرگاه نمودار f شکل زیر باشد و $g(x) = \frac{2[x] - 5}{f(x - 2) + f(x + 2)}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

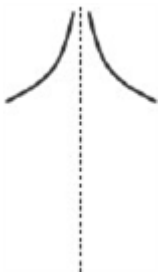


۱ (۱) $+\infty$ و $-\infty$ (۲) $-\infty$ و $-\infty$ (۳) $+\infty$ و $+\infty$ (۴) $-\infty$ و $+\infty$

۱۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]}$ کدام است؟

۱ (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) $+\infty$

۱۱ اگر نمودار $y = \frac{1}{f(x)}$ در مجاورت $x = 1$ به شکل مقابل باشد، ضابطه‌ی $y = f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟



۱ (۱) $f(x) = 1 + \cos \pi x$ (۲) $f(x) = 1 + \sin \frac{\pi}{4} x$

۳ (۳) $f(x) = (\cos 2\pi x) - 1$ (۴) $f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{4} x\right) - 1$

۱۲ اگر $P(2x + 1) = 3x^2 + 4x - m$ باشد، آنگاه به ازای کدام مقدار m چندجمله‌ای $P(x^3 + 2)$ بر $x + 1$ بخش پذیر است؟

۱ (۱) صفر (۲) ۷ (۳) -۱ (۴) ۳۹

۱۳ با فرض $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

- ۱ -۲ ☐ ۲ $-\frac{10}{3}$ ☐ ۳ $-\frac{10}{9}$ ☐ ۴ -۴ ☐

۱۴ هرگاه $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{ax + 4a}{x^2 + 3ax + b} = -1$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{9x^2 - 1} - ax}{x + 2}$ کدام است؟

- ۱ ۵ ☐ ۲ -۵ ☐ ۳ ۱ ☐ ۴ -۱ ☐

۱۵ به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

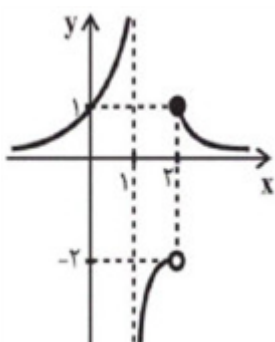
- ۱ -۱۰ ☐ ۲ -۸ ☐ ۳ ۴ ☐ ۴ ۶ ☐

۱۶ اگر باقی‌مانده‌ی $f(x)$ برابر $x - 1$ باشد،

آنگاه باقی‌مانده‌ی تابع $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x^2) + f(2x) + x$ بر $x - 2$ چقدر است؟

- ۱ ۳ ☐ ۲ ۵ ☐ ۳ ۴ ☐ ۴ ۶ ☐

۱۷ نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ f(x)$ کدام است؟

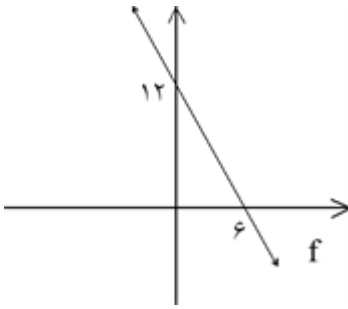


- ۱ $+\infty$ ☐ ۲ ۱ ☐ ۳ -۲ ☐ ۴ $-\infty$ ☐

۱۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2 - 2x}}{3x^2 + 4x}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{2}$ ☐ ۲ $-\frac{1}{3}$ ☐ ۳ $\frac{1}{3}$ ☐ ۴ $+\infty$ ☐

۱۹ شکل زیر نمودار $f(x)$ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{f(x)}$ کدام است؟



۴ $-\frac{5}{3}$

۳ $\frac{5}{3}$

۲ $-\frac{5}{2}$

۱ -5

۲۰ اگر $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x^2 - x^2 + ax - a}$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟ [] علامت جزء صحیح است.

۴ $\frac{1}{2}$

۳ صفر

۲ $-\infty$

۱ $+\infty$

۲۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax^2 + ax - 1}{x^2 - 1} = 5$ مقدار a کدام است؟

۴ 13

۳ -2

۲ -7

۱ -4

۲۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4x}{x^2 - 4} - \left| \frac{x}{x+2} \right|$ کدام است؟

۴ $-\infty$

۳ 2

۲ $\frac{1}{2}$

۱ صفر

۲۳ اگر $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x}}{2x + \sqrt{x^2 - 1}} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{-2x + \sqrt{x^2 + 1}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow A} \frac{\sqrt{x+1} - 1 + A}{x + A}$ کدام است؟

۴ -1

۳ $\frac{1}{2}$

۲ $-\frac{1}{2}$

۱ 1

۲۴ حد عبارت $\frac{2x - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x + \sqrt{1 - 2x}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

۴ 4

۳ 2

۲ 1

۱ 3

۲۵ حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x^2 - a^2}$ در نقطه‌ی $x = a$ برابر $\frac{1}{6}$ است. a کدام است؟

۴ 1

۳ $\sqrt[5]{8}$

۲ 2

۱ $\sqrt[5]{27}$

۲۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $-\frac{2}{3}$ ۳ $-\frac{1}{8}$ ۴ $-\frac{1}{4}$

۲۷ اگر حد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{ax}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر با ۲ باشد، آنگاه حد آن وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

- ۱ ۸ ۲ -۸ ۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $-\frac{1}{8}$

۲۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{6}$ ۲ $-\frac{1}{12}$ ۳ $\frac{1}{12}$ ۴ $\frac{1}{6}$

۲۹ حد زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

۳۰ حد روبرو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{[x] - x}$$

۳۱ حد روبرو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3}$$

۳۲ حالت سوم $m < n$:

$$m < n \Rightarrow m - n < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a'} x^{m-n} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a'} x^{n-m} \right) = 0$$

یعنی وقتی درجه‌ی صورت کسر از درجه‌ی مخرج کسر کمتر است، حد کسر در $\pm\infty$ ، مساوی صفر است.

۳۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}$ کدام است؟

- ۱ $1 + 2\sqrt[3]{3}$ ۲ $1 + 2\sqrt[5]{3}$ ۳ $\sqrt[3]{3}$ ۴ $2\sqrt[5]{3}$

۳۴ در تقسیم $(2x - 1) \div (4x^2 + 8x^2 - 11x)$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج قسمت به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ -۱ ۳ صفر ۴ ۱

۳۵ حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

۳۶) حد تابع مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2 + 7}}{2x + \sqrt{x}}$$

۳۷) حد مقابل را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

۳۸) حد مقابل را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$$

۳۹) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

۴۰) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x + 1$ و $x - 1$ به‌ترتیب ۱ و ۲ باشد باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 1$ را حساب کنید.

۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt[p]{ax^p + bx^{p-1} + \dots} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[p]{a} \left| x + \frac{b}{Pa} \right|$ (قدرمطلق فقط برای P زوج است)، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \frac{-1}{3 \times 1}}} - \sqrt[3]{x + \frac{2}{3 \times 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x - \left(x + \frac{-1}{3} \right)} - x - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

۲) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{-1}{\cdot^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{1}{\cdot^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{-1}{\cdot^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{-1}{\cdot^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{1}{\cdot^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{1}{\cdot^+} = -\infty$$

۳) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

$$\begin{aligned} ۱) \quad & \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\cos x}{x [x]} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\cos x}{-x} = \frac{+1}{\cdot^+} = +\infty \\ ۲) \quad & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2 - 1} = \frac{1}{\cdot^-} = -\infty \\ ۳) \quad & \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{\cdot^+} = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

۴) می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$ ، بنابراین:

۴) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، حد عددی حقیقی است، پس باید $a = 2$ در نتیجه

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + c}{(b-1)x^2 - 4x + 2}$$

چون حد وقتی $x \rightarrow m$ برابر $+\infty$ است، پس باید مخرج ریشه مضاعف داشته باشد،

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + c}{2(x-1)^2} \text{ و } b=3 \text{ که } 4-2(b-1)=0 \text{ یعنی } x=1 \text{ باید به‌ازای } x=1$$

صورت مثبت باشد. یعنی $-1+3+c > 0$ در نتیجه $c > -2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} + ax}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-1 + a)}{x} = -3 \Rightarrow a = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} - 2x}{x - 2} &\times \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} + 2x}{\sqrt{x^2 + 5x + 2} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 2 - 4x^2}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5x + 2} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 5x + 2}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5x + 2} + 2x)} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(-3x - 1)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5x + 2} + 2x)} &= \frac{-7}{8} \end{aligned}$$

۵

حاصل حد بی‌نهایت است. بنابراین مخرج به ازای $x = -3$ صفر می‌شود.

۶

$$(-3)^2 - a = 0 \Rightarrow 9 - a = 0 \Rightarrow a = 9$$

بعد از یافتن a حاصل حد به ازای $x \rightarrow 3$ را حساب می‌کنیم.

$$a = 9 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 4}{x + 3} = \frac{-1}{6}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اولاً: $R = f(2) = 8$ پس $a = 2 + 4 + 8$ و در نتیجه $a = -2$

۷

ثانیاً: وقتی x به سمت 1^+ می‌رود به جای $[x]$ عدد ۱ قرار می‌گیرد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x^2 - [x]} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۸

باقی‌مانده تقسیم $f(x - 1)$ بر $x + 2$ برابر ۳ است، پس مقدار $f(x - 1)$ به ازای $x = -2$ برابر ۳ می‌شود یعنی

$$f(-3) = 3 \text{ است. در عبارت زیر } x \text{ را برابر } -1 \text{ قرار می‌دهیم:}$$

$$f(2x - 1) = x^2 + mx^2 - x + m - 1$$

$$\xrightarrow{x=-1} f(-3) = -1 + m + 1 + m - 1 = 3 \Rightarrow 2m - 1 = 3 \Rightarrow m = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{f(1^+) + f(2^+)} &= \frac{1}{0^- + 0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(1^-) + f(2^-)} &= \frac{1}{0^- + 0^-} = +\infty \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 4 + 2x)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۱

باید $f(x) = 0$ ریشه‌ی مضاعف $x = 1$ داشته باشد، علاوه بر آن f در مجاورت $x = 1$ باید مثبت باشد، تنها گزینه‌ی قابل قبول گزینه‌ی ۱ است.

۱۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اگر $P(x^2 + 2)$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد، داریم:

$$P((-1)^2 + 2) = 0 \Rightarrow P(1) = 0$$

برای به دست آوردن $P(1)$ ، x را برابر صفر قرار می دهیم:

$$P(2x + 1) = 2x^2 + 4x - m \xrightarrow{x=1} P(1) = 0 + 0 - m = 0 \Rightarrow m = 0$$

۱۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد خواسته شده مشتق راست تابع f در $x = -2$ است. تابع در $x = -2$ از راست

پیوسته است و در یک همسایگی راست آن داریم:

$$f(x) = (-2 + x)\sqrt[3]{4x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (1)\sqrt[3]{4x} + (-2 + x) \cdot \sqrt[3]{4} \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-2) = -2 + (-4) \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{4}} = -\frac{10}{3}$$

پس:

۱۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به این که صورت را به ازای $x = -4$ برابر صفر و حاصل حد برابر ۱- می باشد، پس حاصل مخرج کسر نیز به ازای $x = -4$ برابر صفر می باشد.

$$x^2 + 3ax + b^2 = (-4)^2 - 12a + b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 12a - 16$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{ax + 4a}{x^2 + 3ax + b^2} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{ax + 4a}{x^2 + 3ax + 12a - 16} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{a(x + 4)}{(x^2 - 16) + (3ax + 12a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{a(x + 4)}{(x + 4)(x - 4) + 3a(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{a \cancel{(x + 4)}}{\cancel{(x + 4)}(x - 4 + 3a)} = \frac{a}{-8 + 3a} = -1$$

$$\Rightarrow a = 8 - 3a \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 1} - ax}{x + 2} \xrightarrow{a=2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 1} - 2x}{x + 2}$$

$$\frac{|3x| - 2x}{x} = \frac{-3x - 2x}{x} = -5$$

۱۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $p(x)$ را به صورت روبه رو در نظر گرفته و شروع به حل می کنیم:

$$p(x) = (2x - 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + a\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow p(-2) = 3(-2) - 5(-2) + 8 + 2 = -10$$

۱۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(1) = 4$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$g(2) = f(1) - f(4) + f(4) + 2 = 4 + 2 = 6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ و مقادیر $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ی $x = 2$

کمتر از ۱ هستند. پس اگر $t = f(x)$ باشد و $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 1^-$. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2 - 2x}}{2x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2}}{2x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x|}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. f یک تابع خطی گذرنده از $A(0, 12)$ و $B(2, 0)$ است.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 12) \Rightarrow a(0) + b = 12 \Rightarrow b = 12$$

$$B(2, 0) \Rightarrow a(2) + b = 0 \xrightarrow{b=12} 2a = -12 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow f(x) = -6x + 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 6}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-2)}{-6(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{-6} = \frac{0}{-6} = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به آن‌که $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ نامتناهی است، پس $x = -1$ ریشه‌ی مخرج است:

$$-1 - 1 - a - a = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x^2 - x^2 - x + 1} = \frac{(-1)^{[x]}}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

بنابراین جواب $-\infty$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{نکته: } x^2 \pm y^2 = (x \pm y) \left(x^2 \mp xy + y^2 \right)$$

ابتدا صورت کسر را تجزیه می‌کنیم تا عامل صفرکننده $(x-1)$ را استخراج کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 - ax^2 + ax - 1 &= (x^2 - 1) - ax(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 1) - ax(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1 - ax) \end{aligned}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 - ax)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1 - ax}{x+1} = \frac{3-a}{2} \quad \underline{\text{طبق فرض}}$$

$$0 \Rightarrow 3-a = 0 \Rightarrow a = 3$$

روش دوم: با استفاده از هوییتال

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2ax + a}{2x} = \frac{2 - 2a + a}{2} = 0 \Rightarrow a = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\left| \frac{x}{x+2} \right|$ وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ ، مقداری منفی است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{(x-2)(x+2)} + \frac{x}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 + 2x}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+x} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-x+x} = 1 + (-1) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \times 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از هم‌ارزی جمله‌ی بزرگ‌تر برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x + \sqrt{1 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x}{x} = 2$$

توجه کنید که: $\sqrt{x^2} = |x|$ و وقتی $x \rightarrow -\infty$ داریم: $|x| = -x$.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x^2 - a} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(x+a)(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(x+a)(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow \frac{1}{2a(\sqrt{a})} &= \frac{1}{6} \Rightarrow 2a\sqrt{a} = 6 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2a\sqrt{a}} = \frac{1}{6} \Rightarrow a\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(1 + \sqrt{x-1})(1 - \sqrt{x-1})}{(x-2)(x+2)(1 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)(1 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x+2)(1 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{a} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x} \times \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{a} \left(\frac{(x^2 + x + 4) - 4}{x(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{a} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 4} + 2} \right) = \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

طبق فرض سؤال، باید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{\frac{1}{8}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} - 2}{\frac{1}{8}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{\frac{1}{8}x} = -8 \end{aligned}$$

توجه کنید که: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} = \frac{0}{0}$$

برای $x \rightarrow 2^+$ داریم: $|x-2| = x-2$ برای رفع ابهام بهتر است از قاعده‌ی هوییتال استفاده کنیم: (در این روش از صورت و مخرج کسر به‌طور مستقل مشتق گرفته و سپس حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.)

$$\text{Hop: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+6}}}{1} = -\frac{1}{12}$$

روش دوم: برای رفع ابهام استفاده از اتحاد $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} &\times \frac{4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2}}{4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{(x-2)(4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2}} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \left(\frac{0}{25} \right)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)}{(x-3)} = \frac{0}{-2} \left(\frac{0}{25} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(2) + 1}{2 - 2^+} = \frac{5}{-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x+2} = \frac{1(1+1)}{1+2} = \frac{1}{2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

تغییر متغیر $x-1=t \Rightarrow x=t+1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t} + \sqrt[3]{(t+1)^3-1}}{\sqrt{t} + \sqrt{t}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t^3+3t^2+3t}}{\sqrt{t} + \sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}(1 + \sqrt[3]{t^3+3t^2+3t})}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt[3]{t^3+3t^2+3t}}{\sqrt{t}+1} = 1 + \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4x^3 + 8x^2 - 11x \\ &\quad - (4x^3 - 2x^2) \\ &\hline &10x^2 - 11x \\ &\quad - (10x^2 - 5x) \\ &\hline &-6x \\ &\quad - (-6x + 3) \\ &\hline &-3 \end{aligned}$$

مقدار $3 - 5x + 2x^2$ را به ازای $x = \frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ \hline 2x^2+5x-3 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{1 - \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1 + 0}{1 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt{x^2+4}}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + |x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \right) = 0 \left(\frac{1+0}{1+0} \right) = 0.$$

۳۹

$$R_1 = f(-1) = 1, R_2 = f(1) = 2$$

۴۰

توجه داشته باشید که در تقسیم بر $(x^2 - 1)$ انتظار باقیمانده‌ی درجه‌ی یک یا صفر داریم:

$$f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = a + b = 2 \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{3}{2}, a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

၁	၁	၂	၃	၄
၂	၁	၂	၃	၄
၃	၁	၂	၃	၄
၄	၁	၂	၃	၄
၇	၁	၂	၃	၄
၈	၁	၂	၃	၄
၉	၁	၂	၃	၄
၁၀	၁	၂	၃	၄
၁၁	၁	၂	၃	၄
၁၂	၁	၂	၃	၄
၁၃	၁	၂	၃	၄
၁၄	၁	၂	၃	၄
၁၅	၁	၂	၃	၄
၁၆	၁	၂	၃	၄
၁၇	၁	၂	၃	၄
၁၈	၁	၂	၃	၄
၁၉	၁	၂	၃	၄
၂၀	၁	၂	၃	၄
၂၁	၁	၂	၃	၄
၂၂	၁	၂	၃	၄
၂၃	၁	၂	၃	၄
၂၄	၁	၂	၃	၄
၂၅	၁	၂	၃	၄
၂၆	၁	၂	၃	၄
၂၇	၁	၂	၃	၄
၂၈	၁	၂	၃	၄
၃၃	၁	၂	၃	၄
၃၄	၁	၂	၃	၄

