



نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون : تست ریاضی دوازدهم تجربی

نام آموزشگاه :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۶/۰۲

فصل ۲

۱ حاصل  $\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$  برابر کدام گزینه است؟

۴  $3 - \sqrt{3}$

۳  $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$

۲  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱  $\sqrt{3}$

۲ دوره تناوب تابع  $f(x) = \frac{\sin^2 ax}{\cos^4 ax - \sin^4 ax}$  برابر  $\frac{2}{3}$  است. مقدار  $a$  کدام است؟ ( $a > 0$ )

۴  $\pi$

۳  $\frac{3\pi}{4}$

۲  $\frac{\pi}{2}$

۱  $\frac{\pi}{4}$

۳ در تابع  $f(x) = a \sin x + a^2$ ، اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم برابر ۴ است. مجموع این مقادیر کدام است؟

۴ ۸

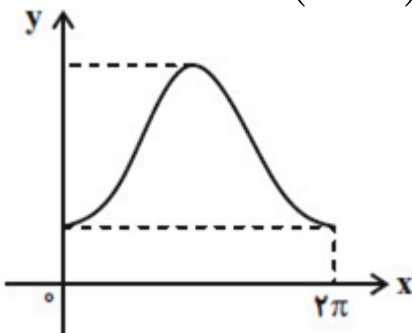
۳ ۶

۲ ۴

۱ ۲

۴ شکل مقابل مربوط به بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos x + b$  است. اگر بیشترین مقدار این تابع چهار واحد از

کمترین مقدار آن بیشتر باشد و تابع از نقطه  $(\frac{2\pi}{3}, 6)$  عبور کند، حاصل  $f(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 4$  کدام است؟



۲  $-2 \cos \alpha - 1$

۱  $2 \sin \alpha + 1$

۴  $2 \cos \alpha - 1$

۳  $-2 \sin \alpha + 1$

۵ معادله  $\frac{|x-\pi|}{x-\pi} \sin(x-\pi) = \frac{2}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

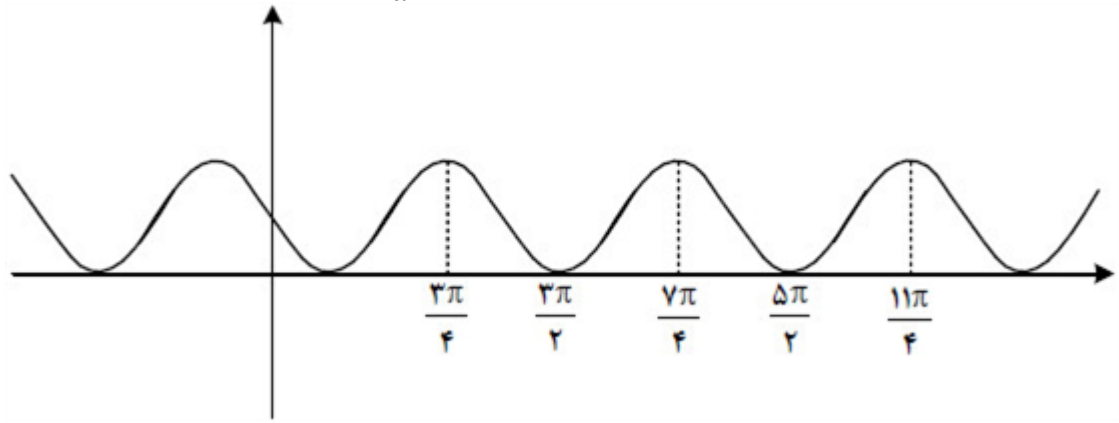
۴ صفر

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۴

۶ شکل زیر، نمودار تابع  $y = 1 + \sin ax$  است. دوره تناوب  $y = 3 \cos\left(\frac{x}{a}\right)$  کدام است؟



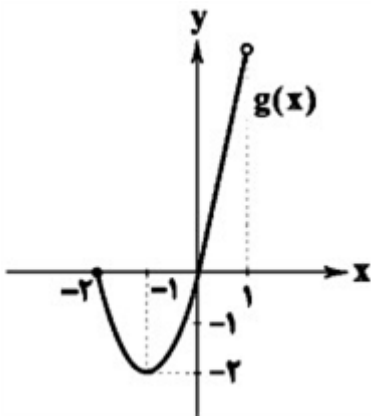
۴π (۴)

۳π (۳)

۶π (۲)

۴π (۱)

۷ توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $T = 3$  می‌باشند که در بازه  $(-2, 1)$  مقادیر خروجی تابع  $f(x)$  از ضابطه‌ی  $f(x) = x[x] + |x|$  و در این بازه تابع  $g(x)$  قسمتی از یک سهمی به شکل مقابل است. مقدار  $f(-21/5) + g(21/5)$  کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)



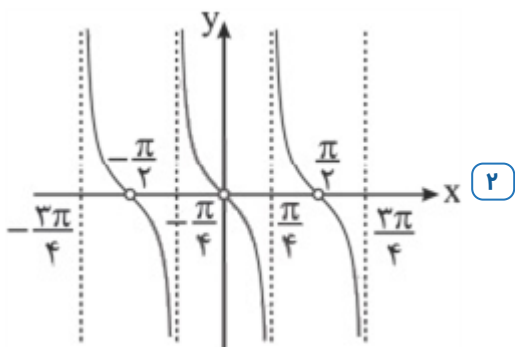
۳/۵ (۴)

۲/۵ (۳)

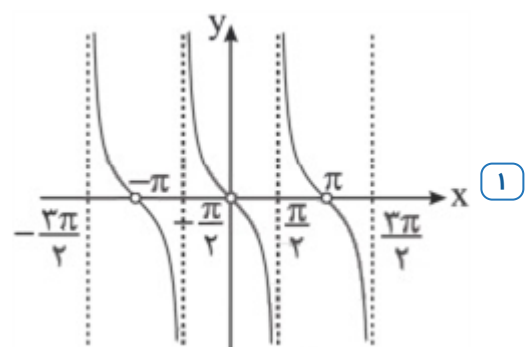
۱/۵ (۲)

صفر (۱)

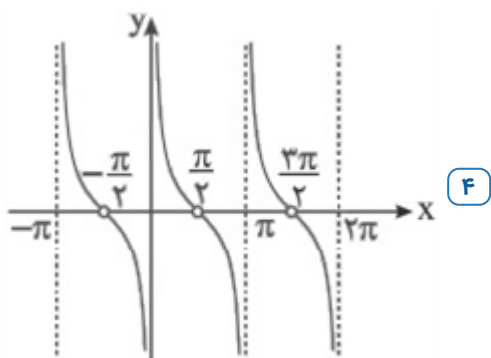
۸ نمودار تابع  $y = 2 \cot 2x - \cot x$  شبیه کدام گزینه است؟



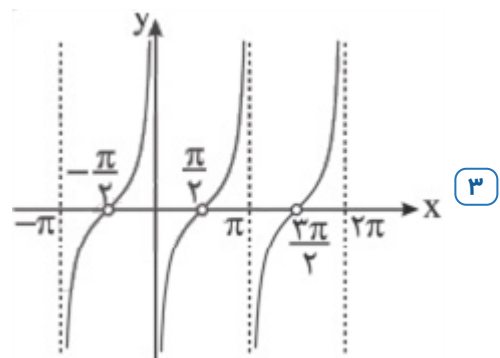
(۲)



(۱)

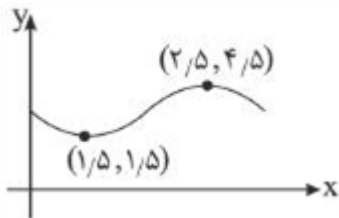


(۴)



(۳)

۹ شکل زیر نمودار تابع  $y = a \sin bx + c$  را در یک دوره تناوب نشان می‌دهد. مقدار  $c - a$  کدام است؟



۴/۵ (۴)

-۳ (۳)

-۷/۵ (۲)

-۴/۵ (۱)

۱۰ تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2 x - \cos x + 2}{1 - \cos^2 x} & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ a \sin\left(\frac{5x}{2}\right) & \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$  در  $x = \frac{\pi}{3}$  پیوسته است.  $a$  کدام است؟

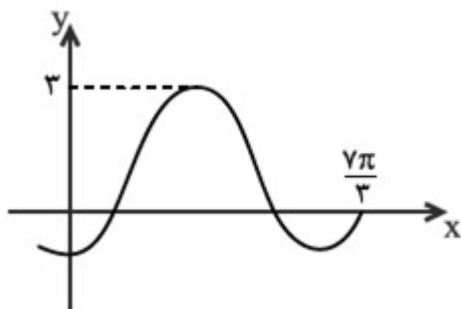
$-\frac{1}{6}$  (۴)

$\frac{1}{6}$  (۳)

$-\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

۱۱ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  است. مقدار  $b$ ، کدام است؟



-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

۱۲ اگر  $\sqrt{5} = 6(\sin x + \cos x)$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام عدد می‌تواند باشد؟

۳ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

-۲ (۲)

$-\frac{1}{3}$  (۱)

۱۳  $|\sin x| = \frac{1}{2}$  در فاصله  $[-2, 3]$  چند جواب دارد؟

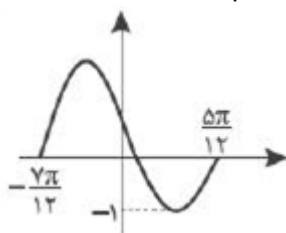
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۴ نمودار تابع  $f(x) = c + a \sin bx$  در یک دوره تناوب به صورت زیر است، حاصل  $c + ab$  کدام است؟



۴ (۴)

-۳ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

۱۵ اگر  $f(x) = \text{tg } x$  دوره تناوب تابع  $y = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟

- ۱  $2\pi$       ۲  $\pi$       ۳  $\frac{\pi}{2}$       ۴  $\frac{\pi}{4}$

۱۶ اگر  $\text{tg}\left(x - \frac{2\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}$  باشد، حاصل  $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$  چه قدر است؟

- ۱  $-5/14$       ۲  $5/14$       ۳  $-5/28$       ۴  $5/28$

۱۷ حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

- ۱  $2$       ۲  $\sqrt{6}$       ۳  $2\sqrt{2}$       ۴  $2\sqrt{3}$

۱۸ اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{3}{4}$       ۲  $-\frac{3}{8}$       ۳  $\frac{3}{8}$       ۴  $\frac{3}{4}$

۱۹ اگر  $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x$  و  $\cos^2 x \neq 0$  باشد، مقدار  $\cos^2 x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{2}$       ۲  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ۳  $-\frac{1}{2}$       ۴  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۰ در مثلث ABC اگر  $AB = 8\sqrt{5}$  و  $\cos B = \frac{2}{\sqrt{5}}$  و مساحت مثلث برابر ۲۰ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

- ۱  $4$       ۲  $5$       ۳  $\frac{5}{2}$       ۴  $2$

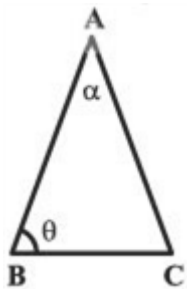
۲۱ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos x} = 0$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- ۱  $2\pi$       ۲  $3\pi$       ۳  $\frac{7\pi}{2}$       ۴  $4\pi$

۲۲ اگر دوره‌ی تناوب تابع  $f(x)$ ،  $\frac{2}{9}$  برابر عکس دوره‌ی تناوب تابع  $f(2x)$  باشد، دوره‌ی تناوب تابع  $f\left(\frac{x}{3}\right)$  چقدر است؟

- ۱  $2$       ۲  $3$       ۳  $1$       ۴  $4$

۲۳ در شکل روبه‌رو،  $AB = AC$  و  $\theta = 3$  است. مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟



$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{3}{5}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

۲۴ حاصل عبارت  $A = \frac{4 \cos^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{16}$  چه قدر است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

۱ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)

صفر (۱)

۲۵ معادله  $\cos^2 x = \sin x$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

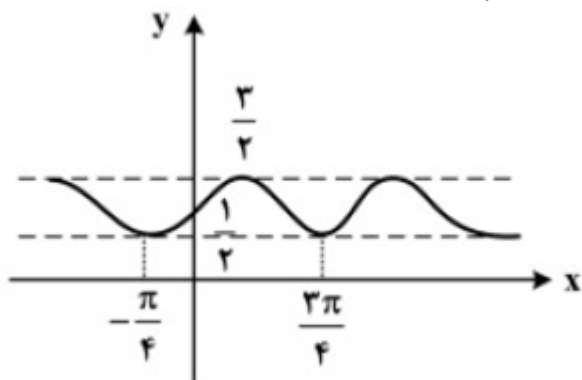
۵ ریشه (۴)

۳ ریشه (۳)

دو ریشه (۲)

ریشه ندارد. (۱)

۲۶ شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟



۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

۱ (۱)

۲۷ معادله  $\frac{2 \sin x - 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$  در فاصله  $(-\frac{\pi}{2}, 4\pi)$  چند ریشه دارد؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۲۸ مجموع جواب‌های معادله  $2 \cos x = \sqrt{3}$  که در بازه  $[-3\pi, \pi]$  قرار دارند، کدام است؟

$-4\pi$  (۴)

$-2\pi$  (۳)

$-\frac{4\pi}{3}$  (۲)

$-\frac{2\pi}{3}$  (۱)

۲۹ اگر  $f(x) = \sin^2 x - 1$  و  $g(x) = x^2 + x$ ، مقدار تابع  $y = \text{gof}(x)$  به ازای  $x = \frac{\pi}{16}$  کدام است؟

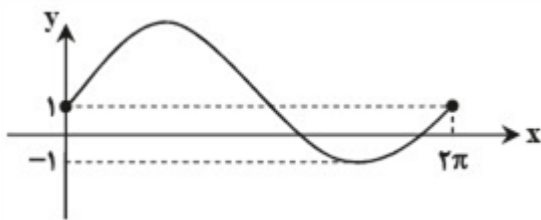
$2^{-\frac{5}{2}} - 2^{-3}$  (۴)

$2^{-\frac{7}{2}} - 2^{-3}$  (۳)

$2^{-\frac{9}{2}} - 2^{-3}$  (۲)

$2^{-\frac{5}{2}} - 2^{-4}$  (۱)

۳۰) نمودار تابع  $y = a \cos^2 x + 3 \sin x + b$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به شکل زیر می‌باشد. بیش‌ترین مقدار این تابع کدام است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

۳۱) معادله مثلثاتی  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin(\pi - 2x) + \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

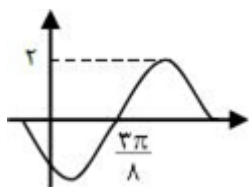
۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

۳۲) قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \sin\left(bx + \frac{\pi}{4}\right)$  به صورت مقابل است. حاصل  $ab$  کدام است؟



-۴ (۴)

۴ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۳۳) اگر ماکسیمم و دوره‌ی تناوب تابع  $f(x) = -3 \cos^4 x$  را به ترتیب  $A$  و  $B$  بنامیم، حاصل  $A \times B$  کدام است؟

$\frac{9\pi}{4}$  (۴)

$3\pi$  (۳)

$2\pi$  (۲)

$\frac{3\pi}{2}$  (۱)

۳۴) جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) = -\sqrt{3}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  (۴)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۱)

۳۵) اگر  $\operatorname{tg} x = 2$  باشد، حاصل  $\sin^4 x$  کدام است؟

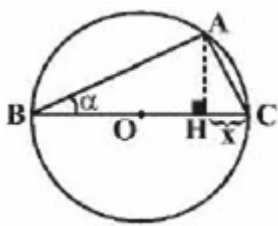
$-\frac{3}{25}$  (۴)

$-\frac{6}{25}$  (۳)

$-\frac{24}{25}$  (۲)

$-\frac{12}{25}$  (۱)

۳۶ در شکل زیر دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم شده است. کدام گزینه مقدار x را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\alpha$ ، به‌درستی نشان می‌دهد؟



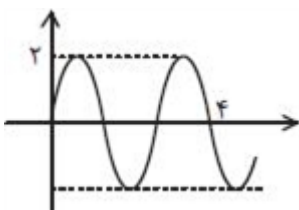
$R \cos^2 \alpha$  (۲)

$R \sin^2 \alpha$  (۱)

$^2 R \cos^2 \alpha$  (۴)

$^2 R \sin^2 \alpha$  (۳)

۳۷ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a^x \cos \left( \left( \frac{1}{2} + bx \right) \pi \right)$  است. حاصل  $a^x + b$  کدام است؟



$\frac{11}{4}$  (۴)

$\frac{5}{4}$  (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

۳۸ مجموع جواب‌های معادله‌ی  $\sin x + ^2 \cos x + \sin x \cos x = -^2$  در بازه‌ی  $[-2\pi, 3\pi]$  کدام است؟

$^4 \pi$  (۴)

$^2 \pi$  (۳)

$^3 \pi$  (۲)

$\pi$  (۱)

۳۹ اگر  $\sin x + \cos x = m$  و  $\sin^2 x = \frac{m-1}{2}$  باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

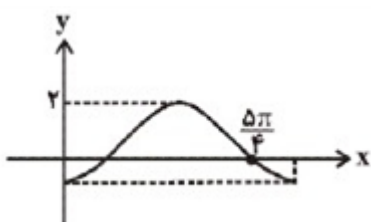
۱ (۴)

$-\frac{1}{2}$  (۳)

صفر (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۴۰ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = a \sin(x - b)$  را نشان می‌دهد. با فرض این که حاصل a.b کدام است؟ ،  $0 < a, b < \pi$



$\frac{\pi}{2}$  (۴)

$\frac{\pi}{4}$  (۳)

$\frac{3\pi}{2}$  (۲)

$\frac{3\pi}{4}$  (۱)

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت (یا مخرج) ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} \times \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2}$$

$$\frac{\cos(2 \times 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 30^\circ}{1 + \sin(2 \times 15^\circ)} = \frac{\cos 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه:

$$\cos^4 ax - \sin^4 ax = (\underbrace{\cos^2 ax + \sin^2 ax}_1) (\underbrace{\cos^2 ax - \sin^2 ax}_{\cos 2ax}) = \cos 2ax$$

ضابطه تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \frac{\sin^2 ax}{\cos^2 ax} = \tan^2 ax$  می‌باشد.

$$\xrightarrow{a>0} T = \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2a} \Rightarrow a = \frac{2\pi}{4}$$

۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f_{\max} = |a| + a^2 \\ f_{\min} = -|a| + a^2 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 2|a| = 4 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow$$

$$\text{مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم} = 2a^2 = 2 \times 4 = 8$$

۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داده شده ضریب  $\cos x$  عدد منفی است، پس کمترین و بیشترین مقدار

این تابع به صورت زیر می‌باشد.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times a < 0} -a \geq a \cos x \geq a \xrightarrow{+b} b - a \geq a \cos x + b \geq a + b$$

$$\text{کمترین - بیشترین} = 4 \Rightarrow (b - a) - (a + b) = 4 \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2 \cos x + b \xrightarrow{\left(\frac{\pi}{3}, 5\right)} 5 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b \Rightarrow 5 = -2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + b$$

$$\Rightarrow 5 = -2 \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) + b \Rightarrow 5 = -2 \left(-\frac{1}{2}\right) + b \Rightarrow b = 5$$

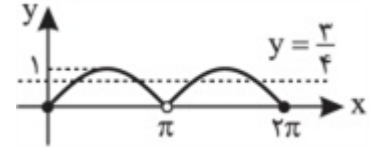
$$f(x) = -2 \cos x + 5 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 4 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 5 - 4 = 2 \sin \alpha + 1$$

۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $y = \frac{|x - \pi|}{x - \pi} \sin(x - \pi)$  را رسم می‌کنیم.

$$y = \frac{|x - \pi|}{x - \pi} \sin(x - \pi) = \begin{cases} \frac{-(x - \pi)}{x - \pi} (-\sin x) = +\sin x & , 0 \leq x < \pi \\ \frac{(x - \pi)}{x - \pi} (-\sin x) = -\sin x & , \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

مطابق شکل، خط  $y = \frac{3}{4}$ ، نمودار را در ۴ نقطه قطع می‌کند.



۶

$$y = 1 + \sin ax \xrightarrow{a < 0} T = \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = 3 \cos\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{a}\right|} = |a|(2\pi) = 4\pi$$

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  در بازه  $[-2, 1]$  را با استفاده از مشخصات سهمی می‌نویسیم:

$$\text{رأس } (-1, -2) \Rightarrow y = a(x + 1)^2 - 2$$

این سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد بنابراین داریم:

$$0 = a(0 + 1)^2 - 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow g(x) = 2(x + 1)^2 - 2$$

از طرفی توابع  $f$  و  $g$  متناوب با دوره تناوب ۳ هستند بنابراین برای هر دو تابع به ازای هر مقدار صحیح  $k$  داریم:

$$\begin{cases} f(x + 3k) = f(x) \\ g(x + 3k) = g(x) \end{cases}$$

یعنی در این دو تابع می‌توان هر مضرب صحیحی از ۳ را به ورودی اضافه یا کم کرد تا ورودی هر یک از دو تابع در بازه

$[-2, 1]$  قرار بگیرند، بنابراین داریم:

$$f(-21/5) = f(-21/5 + 21) = f(-0/5) = (-0/5)[0/5] + |-0/5| = (-0/5)(-1) + 0/5 = 0/5 + 0/5 = 1$$

$$g(21/5) = g(21/5 - 21) = g(0/5) = 2(0/5 + 1)^2 - 2 = 2(2/5) - 2 = 4/5 - 2 = -6/5$$

$$f(-21/5) + g(21/5) = 1 - 6/5 = -1/5$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

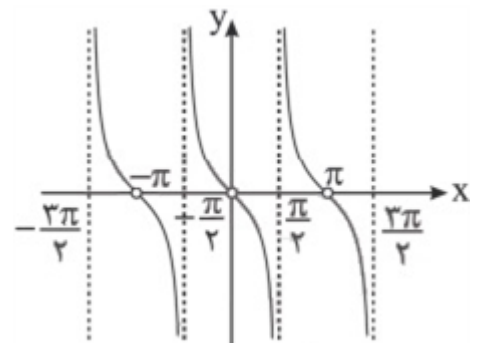
۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم  $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$  است.

$$y = 2 \cot 2x - \cot x = \cot x - \tan x - \cot x = -\tan x$$

باید نمودار  $-\tan x$  را رسم کنیم فقط دقت کنید نقاطی به طول  $x = \frac{k\pi}{2}$  که  $k \in \mathbb{Z}$  در دامنه نیستند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = 4/5 \\ \min &= -|a| + c = 1/5 \\ |a| &= 1/5 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{جمع}} \quad 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

با توجه به نمودار حتماً  $a < 0$  است، پس  $a = -1/5$  است.

$$a - 2c = -1/5 - 6 = -11/5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰

$$\begin{aligned} \text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\cos 2x - 3 \cos x + 2}{1 - 8 \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1}{1 - 8 \cos^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{(\cos x - 1)(2 \cos x - 1)}{(1 - 2 \cos x)(4 \cos^2 x + 2 \cos x + 1)} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{حد راست و مقدار: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} a \sin\left(\frac{\Delta x}{6}\right) = a \sin\left(\frac{\Delta x}{6}\right) = \frac{a}{6}$$

پس:

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  داریم: ۱۱

$$f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f(x) = a + b \cos x$$

از آنجا که تابع روی محور  $y$ ها مینیمم دارد، پس  $b < 0$  و با توجه به اینکه مقدار ماکزیمم تابع ۳ است، داریم:

$$\text{Max} = a + |b| = 3 \xrightarrow{b < 0} a - b = 3 \quad (1)$$

نمودار تابع از نقطه  $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$  می‌گذرد، پس:

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + b\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1, 2} \begin{cases} a - b = 3 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + \sin 2x = 1/4 \Rightarrow \sin 2x = -3/4$$

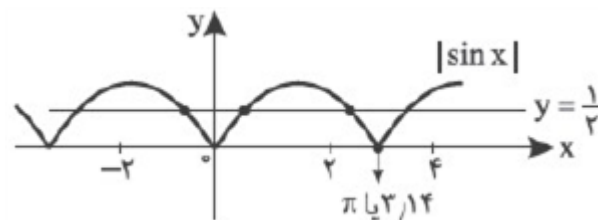
$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{3}{4} \Rightarrow 8 \tan x = -2 + 2 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - 8 \tan x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{فقط } \frac{1}{2} \text{ در گزینه‌ها موجود است.}$$

۱۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نمودار  $|\sin x|$  و خط  $y = \frac{1}{4}$  در بازه  $[-2, 3]$  رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار رسم شده  $|\sin x| = \frac{1}{4}$  در بازه  $[-2, 3]$  دارای ۳ جواب است. چرا که نمودار ۲ تابع در ۳ نقطه متقاطع هستند.

۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در مجاورت  $x = 0$  تابع نزولی است پس  $ab < 0$  است. فرض کنید  $a < 0$  و  $b > 0$  باشد.

$$1) \min = -1 = c + a$$

$$2) f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0 \Rightarrow c + a \sin\left(\frac{b \cdot 5\pi}{12}\right) = 0$$

$$3) \pi = T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c + a \sin \frac{5\pi}{6} = 0 \Rightarrow c + \frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c + \frac{a}{2} = 0 \\ c + a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow c + ab = -2$$

۱۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan 2x + \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan 2x - \cot 2x = -2 \cot 4x$$

$$T = \frac{\pi}{4}$$

۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x - \frac{3\pi}{4} = \alpha \Rightarrow 2x - \frac{3\pi}{2} = 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = -\frac{7}{25} = -0.28$$

۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$$

می‌دانیم:

$$\cos a - \sin a = \sqrt{2} \sin(45^\circ - a) \text{ و } \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - 15^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$$

پس:

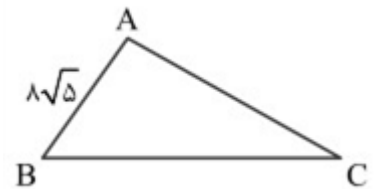
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \cos \alpha &= \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha &= \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{4} \\ \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) &= -\sin^2 \alpha = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$\begin{aligned}(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) &= 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ \cos^2 x &= 2 \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x &= 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع، بنابراین داریم: ۲۰



$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B \\ \sin^2 B &= 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow 20 &= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{5} \times BC \times \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow BC = 5\end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۱

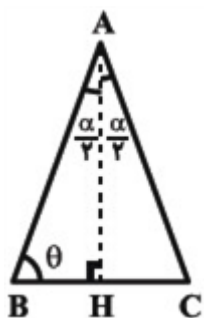
$$\begin{aligned}2 \sin^2 x - \sin x - 1 &= 0 \xrightarrow{\sin x=t} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases} \\ \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} &= 3\pi \end{aligned}$$

$x = \frac{\pi}{2}$  باعث صفر شدن مخرج می‌شود و پذیرفته نیست. پس داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۲

اگر دوره‌ی تناوب تابع  $f(x)$  را  $T$  فرض کنیم آن‌گاه دوره‌ی تناوب تابع  $f(2x)$  برابر  $\frac{T}{2}$  خواهد بود. با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{aligned}T &= \frac{2}{9} \times \frac{2}{T} \Rightarrow T^2 = \frac{4}{9} \xrightarrow{T>0} T = \frac{2}{3} \\ \text{دوره‌ی تناوب } f(x) &\text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ به دست آمد، پس دوره‌ی تناوب } f\left(\frac{x}{3}\right) \text{ برابر } \frac{2}{3} \times 3 = 2 \text{ می‌باشد.}\end{aligned}$$



$$\frac{\alpha}{2} + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{Cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left( 2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{2 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به راحتی می‌توان اثبات کرد که  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$  پس:

$$A = \frac{\sin 2x}{\sin x} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} A = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos 2x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \Rightarrow 2x = k\pi \pm \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = 1 + a \left( \frac{1}{2} \sin(2bx) \right) \Rightarrow y = 1 + \frac{a}{2} \sin(2bx) \Rightarrow 1 + \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} - \left( -\frac{\pi}{\omega} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi \Rightarrow |\omega| = 2 \xrightarrow{a, b > 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

تذکر: توجه داشته باشید تابع سینوس برای  $x > 0$  صعودی شروع می‌شود پس  $a$  و  $b$  هم‌علامتند که حالت  $a = -1$  و  $b = -1$  یعنی  $a + b = -2$  در گزینه‌ها نیست.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یک کسر زمانی صفر می‌شود که صورتش صفر شود و مخرجش صفر نشود.

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} & (1) \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

دسته جواب اولی قابل قبول نمی‌باشد، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند، بنابراین  $x = \frac{5\pi}{6}$  و  $x = \frac{17\pi}{6}$  جواب می‌باشد.

نکته: جواب‌های معادله‌های کلی  $\cos x = \cos \alpha$  به صورت  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  است. ( $k \in \mathbb{Z}$ )

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$2 \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\cos \pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

با جای‌گذاری مقادیر صحیح به جای  $k$  در عبارت بالا نتیجه می‌شود که جواب‌های  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$  از

معادله در بازه‌ی داده شده هستند که حاصل‌جمع آن‌ها برابر است با:

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - 2\pi + \frac{\pi}{6} - 2\pi - \frac{\pi}{6} = -4\pi$$

نکته:  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

ابتدا ضابطه تابع  $\text{gof}$  را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x - 1 = -\cos^2 x, g(x) = x^2 + x \Rightarrow (\text{gof})(x) = \cos^2 x - \cos^2 x \\ &= \cos^2 x (\cos^2 x - 1) = -\cos^2 x (1 - \cos^2 x) = -\cos^2 x \sin^2 x = -(\sin x \cos x)^2 \\ &= -\frac{1}{4} \sin^2(2x) \xrightarrow{\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} -\frac{1}{4} \left( \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) \end{aligned}$$

حال با جایگذاری  $x = \frac{\pi}{16}$  خواهیم داشت:

$$(\text{gof})\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{1}{4} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\left( \frac{1}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{16} = 2^{-\frac{5}{2}} - 2^{-2}$$

$$f(\cdot) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \quad (*)$$

$$f'(x) = -2a \sin x \cos x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (-2a \sin x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{3}{2a} \end{cases}$$

چون تابع در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  فقط دو اکسترمم نسبی دارد، پس باید  $\left| \frac{3}{2a} \right| > 1$  که منجر به افزایش تعداد اکسترمم نسبی

نشود.

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow -3 + b = -1 \Rightarrow b = 2 \xrightarrow{(*)} a = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 2 = 5 \text{ بیش‌ترین مقدار تابع } f \text{ برابر است با: } 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin(\pi - 2x) + \sin x &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\ \Rightarrow \sin 2x + \sin 2x + \sin x &= \sin x \Rightarrow \sin 2x = -\sin 2x \\ \Rightarrow \sin 2x &= \sin(-2x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - 2x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-2x) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

| k | x |
|---|---|
| ۰ |   |
| ۱ |   |
| ۲ |   |
| ۳ |   |
| ۴ |   |
| ۵ |   |

معادله ۷ جواب دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون  $f(0)$  منفی است پس  $a < 0$  و لذا  $a = -2$  است. ۳۲

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{4}b + \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow b = 2$$

بنابراین  $ab = -4$  است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: در توابع  $y = a \cos bx$  و  $y = a \sin bx$ ، دوره‌ی تناوب برابر  $\frac{2\pi}{|b|}$ ، ماکسیمم برابر  $|a|$  ۳۳

و مینیمم برابر  $-|a|$  است.

با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$A = 2, B = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A \times B = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{2}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= -\cos x, \cos(\pi - x) = -\cos x \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) \\ &= -\cos x - \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵

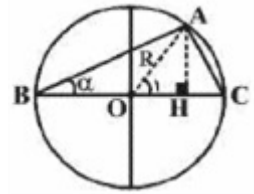
$$\left. \begin{aligned} \sin 2x &= \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \frac{\tan x = 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5} \\ \cos 2x &= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \frac{\tan x = 2}{1 + 2^2} = \frac{-3}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-24}{25}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. چون زاویه‌ی A یک زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به کمان  $180^\circ$  است، پس  $\hat{A} = 90^\circ$ . اگر از مرکز دایره به A وصل کنیم، خواهیم داشت:

$$\triangle OAB : OB = OA \xrightarrow{\text{زاویه ی خارجی}} \widehat{O} = 2\alpha$$

$$\triangle OAH : OH = R \cos 2\alpha \Rightarrow x = HC = OC - OH = R - R \cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow x = R(1 - \cos 2\alpha) = R(2 \sin^2 \alpha)$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = a^x \cos \left( \frac{\pi}{x} + b\pi x \right) = -a^x \sin(b\pi x) = a^x \sin(-b\pi x)$$

اولاً:  $a^x = 2$  است، ثانیاً: نقطه‌ی  $x = 4$  معادل زاویه‌ی  $3\pi$  در نمودار  $\sin x$  است.

$$x = 4 \Rightarrow -b\pi \times 4 = 3\pi \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$$

$$a^x + b = \frac{5}{4} \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(\sin x + 2) + \cos x(2 + \sin x) = 0 \Rightarrow (2 + \sin x)(1 + \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = -2 & \text{غ ق} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \pi \\ k = 1 \Rightarrow x = 3\pi \\ k = -1 \Rightarrow x = -\pi \end{cases} \end{cases}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$(\sin x + \cos x)^2 = m^2 \Rightarrow 1 + \sin 2x + m^2 \Rightarrow 1 + \frac{m-1}{2} = m^2$$

$$2m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } m = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = a \sin(x - b)$  برابر با  $|a|$  است، پس با توجه به شکل و این که  $a$  عددی مثبت است، داریم  $a = 2$  از طرفی:

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{5\pi}{4} - b\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{4} - b\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{4} - b = k\pi \Rightarrow b = \frac{5\pi}{4} - k\pi; k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{0 < b < \pi} b = \frac{\pi}{4}$$

$$a \cdot b = 2 \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۱  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۳۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

