



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۶/۰۲

عنوان آزمون : تست ریاضی دوازدهم تجربی

فصل ۱

۱) برد تابع $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ ۲) $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

۳) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, +\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۲) کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟

الف) از میان توابع $f(x) = x^3 - 3x^2$ و $g(x) = 2x - \sqrt{x}$ و $h(x) = \frac{2x+1}{2x+2}$ و $i(x) = x + 2 + |2x|$ فقط یک تابع در دامنه‌اش یک به یک است.

ب) نقاط برخورد توابع f و f^{-1} همواره روی خط $y = x$ قرار دارند.

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) هر دو گزاره ۴) هیچ کدام

۳) تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1-x} & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ مفروض است. اگر تابع $f \circ f$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۴) نمودار تابع با ضابطه $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۵) برای تبدیل نمودار تابع f به نمودار تابع $y = f(2x+1)$ می‌توان ابتدا طول نقاط روی نمودار تابع f را در ضرب کرد و سپس نمودار حاصل را واحد به سمت چپ منتقل کرد. (از راست به چپ بخوانید.)

۱) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ۲) $1, \frac{1}{2}$ ۳) $1, 2$ ۴) $1, \frac{1}{4}$

۶) اگر تابع $f(3-x)$ اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد و از نقاط $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ بگذرد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x^2 - 4)f(x - 1)}$ چند عدد طبیعی را شامل می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۷) اگر مجموع جواب‌های معادله $2f(2x-1) = 3g(-x+2)$ برابر عدد ۱۰ باشد در صورتی‌که این معادله دارای ۵ جواب باشد، مجموع جواب‌های معادله $f(3x-2) = \frac{3}{4}g\left(\frac{-3x+5}{4}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) ۵

۸ تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x - 4$ روی بازه $|x - 1| < 3$ چگونه است؟

- ۱ نزولی ۲ مثبت ۳ صعودی ۴ منفی

۹ برای رسم نمودار تابع $f^{-1}(x+1)$ از روی $f(x)$:

- ۱ طول نقاط روی f را نصف می‌کنیم، نمودار را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم و نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم.
- ۲ نمودار را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم، طول نقاط را نصف می‌کنیم و نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم.
- ۳ نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم، طول نقاط را نصف می‌کنیم و یک واحد آن را به چپ منتقل می‌کنیم.
- ۴ نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم و طول نقاط روی آن را نصف می‌کنیم.

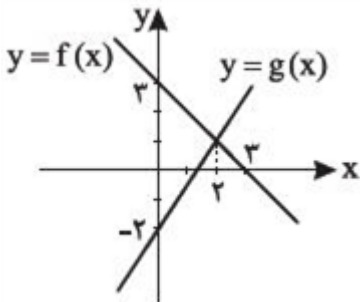
۱۰ تابع $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & 2x + 3 \leq 0 \\ 2 + 2mx - x^2 & 2x + 3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۲ ۳ ۱ ۴ صفر

۱۱ ضابطه وارون تابع $f(x) = 3x - 2$ کدام است؟

- ۱ $f^{-1}(x) = -3x + 2$
- ۲ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
- ۳ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
- ۴ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

۱۲ نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر است. اگر تابع $y = (fg)(x)$ در بازه $(-\infty, a]$ وارون‌پذیر باشد، بیش‌ترین مقدار a کدام است؟



- ۱ $\frac{12}{7}$ ۲ $\frac{11}{5}$ ۳ $\frac{17}{9}$ ۴ $\frac{13}{6}$

۱۳ اگر $f(x) = x + [x]$ و $\begin{cases} g : [0, 2) \rightarrow R \\ g(x) = x - 2\left[\frac{x}{2}\right] \end{cases}$ باشند، دامنه‌ی تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ شامل کدام عدد نیست؟ [] ، نماد جزء صحیح است.

- ۱ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ۲ $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ ۳ $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ ۴ $\sqrt{13} - \sqrt{2}$

۱۴) نمودار تابع f را ابتدا $\frac{3\pi}{4}$ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم. با این انتقال به نمودار تابع

$y = 2 \cos x$ رسیده‌ایم. مقدار $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) -۳

۱۵) اگر وارون تابع $f(x) = 2x^2 + 6x + 2$ با دامنه $(-\infty, -1]$ به صورت $f^{-1}(x) = a - \sqrt{\frac{x+1}{b}}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۶) برد کدام تابع زیر برابر R است؟

- ۱) $f(x) = x^2 - (x-1)^2 - x^2$ ۲) $g(x) = x(x+1)^2 - x$
۳) $h(x) = x^2(x+1)^2 + 1$ ۴) $m(x) = 2x^2 - 2(x+4)^2$

۱۷) اگر $A(x, y)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آن‌گاه کدام نقطه زیر متناظر با A روی نمودار $g(x) = -2f(2x+1)$ است؟

- ۱) $A'\left(2x_0 + 1, \frac{y_0}{-2}\right)$ ۲) $A'\left(\frac{x_0 - 1}{2}, -2y_0\right)$
۳) $A'(2x_0 + 1, -2y_0)$ ۴) $A'\left(\frac{x_0 - 1}{2}, \frac{y_0}{-2}\right)$

۱۸) تابع $y = ax^2 + 3x - 2$ در بازه $[-1, +\infty)$ یکنوا است. a کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۹) اگر تابع f به صورت $f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 3)\}$ تعریف شده باشد، تابع fof^2 کدام است؟

- ۱) $\{(0, 1), (1, 2), (4, 3)\}$ ۲) $\{(0, 1), (2, 0), (3, 1)\}$
۳) $\{(0, 1), (1, 4), (2, 0), (3, 1), (4, 9)\}$ ۴) $\{(0, 2), (1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

۲۰) اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[-3, 5]$ باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- ۱) $(3, -5)$ ۲) $(5, -3)$ ۳) $(-5, 3)$ ۴) $(-3, 5)$

۲۱) توابع $f(x) = 6x^2 - x^3 - 12x$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- ۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲۲ کدام گزینه نادرست است؟

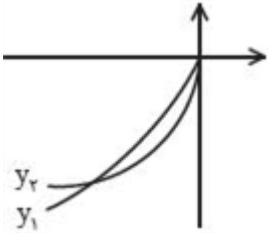
۱ دامنه تابع $y = x^2 - 1$ برابر R و برد آن $(-1, +\infty)$ است.

۲ دامنه تابع $y = -[x] + 2$ برابر R و برد آن Z است.

۳ دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ برابر R و برد آن نیز R است.

۴ اگر $f(x) = x^2 - x$ باشد، $\frac{f(2)}{f(-1)}$ است.

۲۳ اگر $f(x) = -x^2$ ، $g(x) = x^2$ با شرط $x < 0$ باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



۲ $y_2 = f^{-1}(x)$ و $y_1 = g^{-1}(x)$

۱ $y_2 = g^{-1}(x)$ و $y_1 = f^{-1}(x)$

۴ $y_2 = g(x)$ و $y_1 = f^{-1}(x)$

۳ $y_2 = f^{-1}(x)$ و $y_1 = g(x)$

۲۴ اگر $g(x) = 1 - 2x$ باشد، آن گاه با توجه به ماشین $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow -6x^2 - 2x + 3$ مقدار $f(1)$ کدام است؟

۴ -۳

۳ ۳

۲ -۱

۱ ۱

۲۵ اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - x^2}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = f(|x - 1|)$ کدام است؟

۴ $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

۳ $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

۲ $[0, \frac{3}{2}]$

۱ $[-1, \frac{3}{2}]$

۲۶ ضابطه وارون تابع $y = x^2 + 4x + 3$ با شرط $x \leq -2$ کدام است؟

۲ $-2 - \sqrt{x+1}; x \geq -1$

۱ $-2 - \sqrt{x+1}; x \leq -2$

۴ $-2 + \sqrt{1-x}; x \geq -1$

۳ $-2 + \sqrt{1-x}; x \leq -2$

۲۷ وارون تابع $f(x) = \frac{ax}{x+2}$ بر خود تابع f منطبق است. در این صورت $f(4)$ کدام است؟

۴ $-\frac{3}{2}$

۳ $\frac{3}{2}$

۲ $-\frac{3}{4}$

۱ $\frac{3}{4}$

۲۸ اگر $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(a-x)$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$ و $D_{f \circ g} = \left(-\frac{15}{4k}, 4k-2\right)$ حاصل $a \log_{\sqrt{k-1}}(a+4)$ کدام است؟

۴ -۸

۳ ۸

۲ ۴

۱ -۶

۲۹ اگر f یک تابع خطی و $f(1) = 5$ و $f^{-1}(7) = 2$ باشد، $f(4 + f^{-1}(1))$ کدام است؟

۴ ۹

۳ ۱۳

۲ ۵

۱ ۳

۳۰ اگر $g(x) = x^2 - 6x$ و $f(x) = \sqrt{4 - \log_2 x}$ باشد، دامنه fog کدام است؟

۲ $[-5, 0) \cup (6, 10]$

۱ $R - [0, 6]$

۴ $[-2, 0) \cup (6, 8]$

۳ $[-5, 10]$

۳۱ اگر از دامنه‌ی تابع درجه دو $f(x) = x^2 - 6x + 10$ نقطه‌ی $x = x$ را حذف کنیم از برد آن $f(x)$ حذف می‌شود. حاصل $f(x - 1)$ کدام است؟

۴ ۱۲

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۶

۳۲ اگر رابطه‌ی $f = \{(a+b, 2), (5, 2), (a, 3), (1, 3)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، $a - b$ کدام است؟

۴ ۲

۳ -۱

۲ صفر

۱ -۳

۳۳ محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ را در نقطه‌ای به عرض (-2) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور x ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

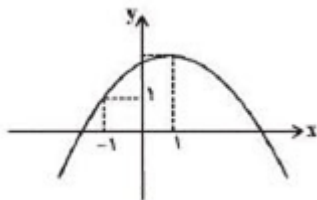
۴ $4\sqrt{2}$

۳ $2\sqrt{2}$

۲ $4\sqrt{3}$

۱ $2\sqrt{3}$

۳۴ در سهمی شکل زیر به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a - b = -3$ ، آن‌گاه $f(1)$ کدام است؟



۴ ۵

۳ ۴

۲ صفر

۱ -۴

۳۵ با فرض $g(x) = -x^2 + x$ ، حاصل عبارت $g(2x) - g(-2x)$ برابر است با:

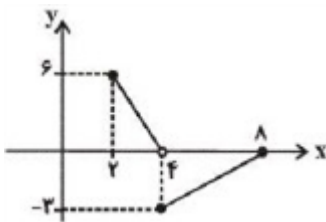
۴ $-4x$

۳ $-4x^2$

۲ $4x^2$

۱ $4x$

۳۶ اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = \frac{f \circ f^{-1}(x)}{f^{-1} \circ f(x)}$ کدام است؟



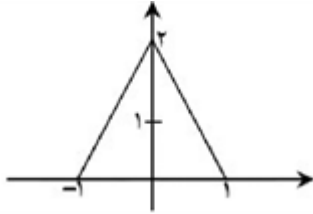
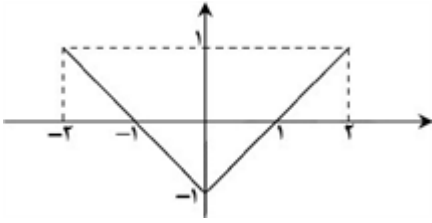
۴ $[4, 8]$

۳ $[4, 6]$

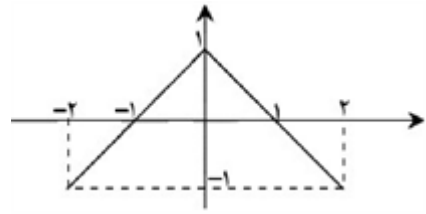
۲ $[-3, 6]$

۱ $[2, 6]$

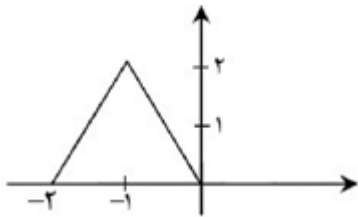
۳۷ اگر نمودار تابع $y = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(x - 1)$ کدام است؟



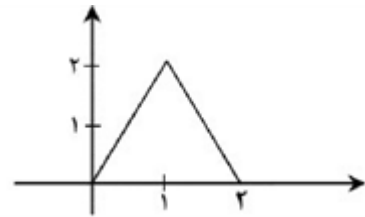
۲



۱



۴



۳

۳۸ کدام یک از نقطه‌های زیر، روی نمودار وارون تابع $F(x) = x^2 + 2x + 1$ واقع است؟

(۲, ۱) ۲

(۱۳, ۲) ۱

(-۲, -۱۱) ۴

$\left(1, \frac{1}{4}\right)$ ۳

۳۹ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد، حاصل $\underbrace{f(f(\dots(fx)))}_{1001 \text{ بار}}$ کدام است؟

$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1001}$ ۴

$\frac{x+1}{x-1}$ ۳

$2x$ ۲

x ۱

۴۰ اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ ، آن گاه ضابطه‌ی $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟

$x^2 + 1$ ۴

$x^2 - 1$ ۳

$x + 1$ ۲

$x - 1$ ۱

۱

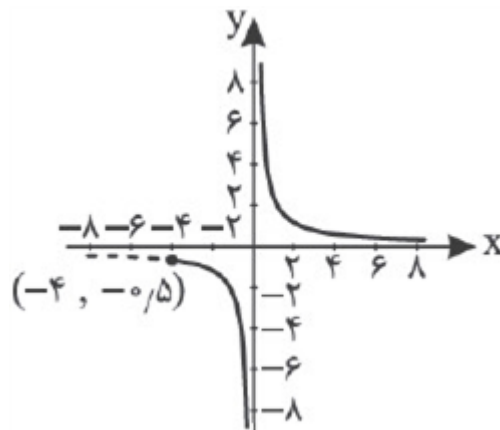
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید $g(x) = x^2 - 4$ باشد، در این صورت می‌دانیم $g(x) \geq -4$ می‌باشد. اگر

$h(x) = \frac{2}{x}$ را در نظر بگیریم، برد تابع $\log(x)$ را می‌خواهیم. پس برای به دست آوردن برد تابع f باید نمودار $h(x)$ را به ازای $x \geq -4$ و $x \neq 0$ رسم کنیم:

مطابق شکل برد تابع $h(x)$ با شرط $x \geq -4$ و $x \neq 0$ برابر است با:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup (0, +\infty)$$

که برابر برد تابع $f(x)$ با دامنه $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$ است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱ و ۳ نادرست‌اند، زیرا هیچ یک از توابع داده شده یک به یک نیستند.

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{مثال نقض}} f(0) = 0, f(2) = 0$$

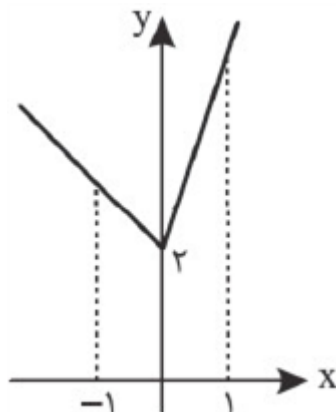
$$g(x) = 2x - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} g(0) = 0, g\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$h(x) = \frac{2x+1}{4x+2} = \frac{2x+1}{2(2x+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

تابع f تابع ثابت $f(x) = \frac{1}{2}$ با دامنه $R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ است.

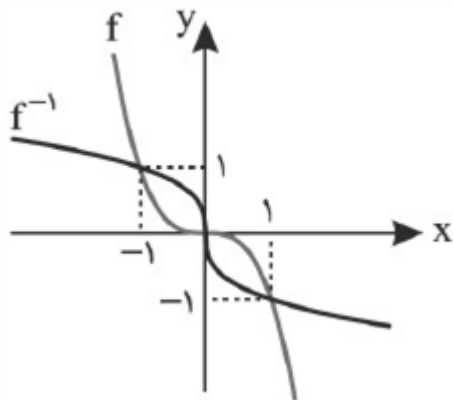
$$i(x) = x + 2 + |2x| = \begin{cases} 3x + 2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$$

چون شیب نیم‌خط‌های موجود در ضابطه i ، یکی مثبت و دیگری منفی است، پس تابع i یک به یک نیست (نمودار آن به



صورت مقابل است.)

گزینه ۲ نادرست است. چون ممکن است توابع f و f^{-1} خارج از خط $y = x$ نیز نقطه تلاقی داشته باشند (فقط در صورتی که تابع f اکیداً صعودی باشد، نقاط برخورد f و f^{-1} قطعاً روی خط $y = x$ خواهند بود). به عنوان نمونه توابع $f(x) = -x^2$ و $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ طبق شکل دو نقطه تلاقی خارج از خط $y = x$ دارند.



بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۳

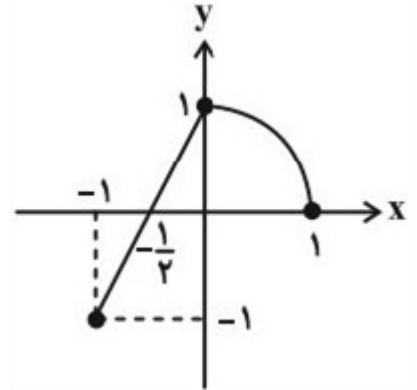
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f به صورت مقابل است:و برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع f ، لازم است که ضابطه(های) آن را به دست آوریم:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 2f(x) + 1 & ; -1 \leq f(x) < 0 \\ \sqrt{1 - f(x)} & ; 0 \leq f(x) \leq 1 \end{cases}$$

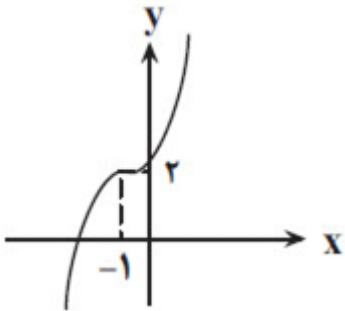
با توجه به نمودار تابع f مشخص است که در بازه $\left[-1, -\frac{1}{4}\right)$ ، $-1 \leq f(x) < 0$ و در بازه $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ ، $0 \leq f(x) \leq 1$ است.

$$\Rightarrow (f \circ f)(x) = \begin{cases} 2(2x+1) + 1 & ; -1 \leq x < -\frac{1}{4} \\ \sqrt{1 - (2x+1)} & ; -\frac{1}{4} \leq x < 0 \\ \sqrt{1 - \sqrt{1-x}} & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(x) = \begin{cases} 4x+3 & ; -1 \leq x < -\frac{1}{4} \\ \sqrt{-2x} & ; -\frac{1}{4} \leq x < 0 \\ \sqrt{1 - \sqrt{1-x}} & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

بزرگترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً نزولی است، بازه $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با انتقال نمودار $y = x^3$ ، نمودار $g(x) = (x+1)^3 + 2$ را رسم می‌کنیم:

$$y = x^3 \xrightarrow[\text{دو واحد به بالا}]{\text{یک واحد به چپ}} g(x) = (x+1)^3 + 2$$

با توجه به شکل، نمودار g از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.

۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید تابع حاصل از تبدیل مورد نظر در هر گزینه را پیدا کنیم. گزینه صحیح را شرح

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{ضرب طول نقاط در } \frac{1}{4}]{x \rightarrow 4x} y = f(4x) \quad \text{می‌دهیم:}$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{x \rightarrow x + \frac{1}{4}} y = f\left(4\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) = f(4x+1)$$

۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $f(3-x)$ از نقطه $(-2, 0)$ می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$f(3 - (-2)) = 0 \Rightarrow f(5) = 0$$

از طرفی تابع $f(3-x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین تابع $f(x-1)$ اکیداً نزولی خواهد بود و از نقطه $(4, 0)$ می‌گذرد. برای تعیین دامنه تابع $g(x)$ داریم:

X	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	○	-	○	+
$f(x-1)$	+	+	+	○	-
$(x^2 - 4)f(x-1)$	+	○	-	○	-

$$(x^2 - 4)f(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, 4]$$

دامنه تابع $g(x)$ شامل پنج عدد طبیعی است.

۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آن‌که ورودی $2x-1$ به ورودی $3x-2$ و ورودی $-x+2$ به ورودی $\frac{-3x+5}{2}$ تبدیل

شوند داریم:

$$\begin{cases} 2x-1 = 3t-2 \Rightarrow x = \frac{3t-1}{2} \\ -x+2 = \frac{-3t+5}{2} \Rightarrow -x = \frac{-3t+1}{2} \Rightarrow x = \frac{3t-1}{2} \end{cases}$$

یعنی برای آن‌که معادله $2f(2x-1) = 3g(-x+2)$ به معادله $f(3x-2) = \frac{3}{2}g\left(\frac{-3x+5}{2}\right)$ تبدیل شود باید از تبدیل

$x \rightarrow \frac{3x-1}{2}$ استفاده کنیم یعنی هر یک از ریشه‌های معادله داده شده به ترتیب در ۲ ضرب می‌شوند، سپس به‌علاوه

یک می‌شوند و در آخر بر ۳ تقسیم می‌شوند تا تبدیل به ریشه معادله جدید شوند.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\delta = 10$$

اگر $x_\delta, \dots, x_2, x_1$ ریشه‌های معادله داده شده باشند داریم:

اگر $x'_\delta, \dots, x'_2, x'_1$ ریشه‌های معادله جدید باشند داریم:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{2x_1+1}{3} \\ x'_2 = \frac{2x_2+1}{3} \\ \vdots \\ x'_\delta = \frac{2x_\delta+1}{3} \end{cases}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 + \dots + x'_\delta &= \frac{2x_1+1}{3} + \frac{2x_2+1}{3} + \dots + \frac{2x_\delta+1}{3} \\ &= \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \dots + x_\delta) + 5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(10) + \frac{5}{3} = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

۸

$$f(x) = x^2 - 4x - 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا حدود دامنه تابع را مشخص می‌کنیم:

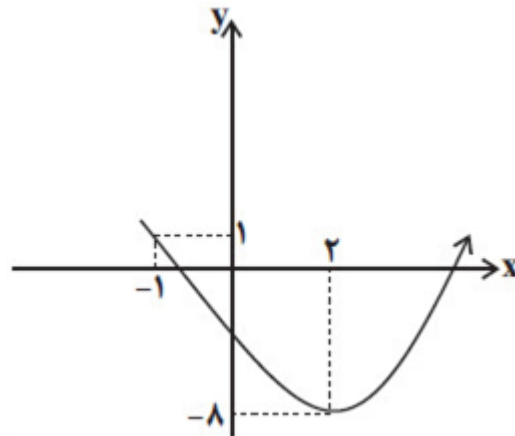
$$|2x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Rightarrow -2 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2$$

حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{+4}{2} = 2$$

همان‌طور که می‌بینید تابع f در بازه $(-1, 2)$ ، نزولی است.



۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

برای رسم $f^{-1}(2x + 1)$ مراحل زیر را به ترتیب دنبال می‌کنیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به خط } y=x} f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} f^{-1}(x + 1)$$

$$\xrightarrow{\text{طول نقاط را نصف می‌کنیم}} f^{-1}(2x + 1)$$

۱۰

$$R_1 = \left[\frac{13}{2}, +\infty \right)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{ضابطه دوم: } -x^2 + 2mx + 2 = -(x - m)^2 + m^2 + 2$$

باید رأس سهمی $(x = m)$ داخل بازه $x > -\frac{3}{2}$ نباشد، پس:

$$m \leq -\frac{3}{2} \xrightarrow{m^2 + 2 \leq \frac{17}{2}} m = -2 \Rightarrow y_2 = -(x + 2)^2 + 6$$

$$f^{-1}(-19) \Rightarrow -(x + 2)^2 + 6 = -19 \Rightarrow (x + 2)^2 = 25 \xrightarrow{x > -\frac{3}{2}} x = 3$$

۱۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = 3x - 2 \Rightarrow y + 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = -x + 3$ و ضابطه $g(x)$ به صورت $g(x) = \frac{3}{4}x - 2$ می‌باشند پس:

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) = (-x + 3) \left(\frac{3}{4}x - 2 \right)$$

همان‌طور که می‌بینید تابع $fg(x)$ یک سهمی است پس بیش‌ترین مقدار a همان طول رأس سهمی می‌باشد پس:

$$x_s = \frac{3 + \frac{4}{3}}{2} = \frac{13}{6}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به آن که تابع g^{-1} of g^{-1} وارون تابع fog است، پس:

$$D_{g^{-1} \circ f^{-1}} = R_{fog}$$

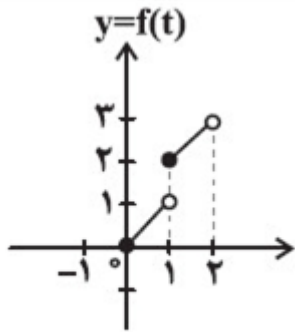
برای تعیین برد تابع $y = f(g(x))$ تابع درونی را t می‌گیریم و حدود t را پیدا می‌کنیم که برای تابع بیرونی حکم دامنه را دارد.

$$y = f(g(x)) \quad g(x) = 2\left(\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right)$$

$$0 \leq \frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] < 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2\left(\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right) < 2 \Rightarrow 0 \leq t < 2$$

حدود t را پیدا می‌کنیم.

حالا این محدوده برای $f(t)$ حکم دامنه (ورودی) دارد.



$$y = f(t) \quad 0 \leq t < 2 \Rightarrow y = t + [t], \quad 0 \leq t < 2$$

$$y = f(t) = t + [t]$$

نمودار $y = t + [t]$ را رسم می‌کنیم و برد آن را در این بازه می‌یابیم.

$$D_{g^{-1} \circ f^{-1}} = R_{fog} = [0, 1) \cup [2, 3)$$

کدام گزینه در بازه $[0, 1) \cup [2, 3)$ نیست؟

$\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1/7 - 1/4 = 0/3$	گزینه ۱:
$\sqrt{5} - \sqrt{2} \approx 2/2 - 1/4 = 0/8$	گزینه ۲:
$\sqrt{7} - \sqrt{2} \approx 2/6 - 1/4 = 1/2$	گزینه ۳:
$\sqrt{13} - \sqrt{2} \approx 3/6 - 1/4 = 2/2$	گزینه ۴:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر انتقال‌ها را برعکس انجام دهیم به تابع اولیه، یعنی f می‌رسیم. بنابراین ابتدا باید

$y = 2 \cos x$ را $\frac{3\pi}{4}$ واحد به راست و سپس ۲ واحد به پایین انتقال دهیم. با انجام این مراحل به صورت زیر به ضابطه‌ی

f می‌رسیم:

$$y_1 = 2 \cos x \xrightarrow[\text{انتقال دهیم}]{\frac{3\pi}{4} \text{ واحد به راست}} y_2 = 2 \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{انتقال دهیم}]{2 \text{ واحد به پایین}} y_3 = 2 \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - 2 = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - 2 = -2 \sin x - 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2 = -2 \times \frac{1}{2} - 2 = -3$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2 + 2x + 1 = 3(x^2 + 2x) + 1 = 3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 1 \\
 &= 3(x^2 + 2x + 1) - 1 = 3(x+1)^2 - 1 \Rightarrow y = 3(x+1)^2 - 1 \\
 \Rightarrow y+1 &= 3(x+1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{\frac{y+1}{3}} = (x+1) \xrightarrow{\text{رادیکال}} \sqrt{\frac{y+1}{3}} = |x+1| \\
 \xrightarrow{x \leq -1} \sqrt{\frac{y+1}{3}} &= -(x+1) \Rightarrow x = -1 - \sqrt{\frac{y+1}{3}} \\
 \Rightarrow f^{-1}(x) &= -1 - \sqrt{\frac{x+1}{3}} \\
 a = -1, b = 3 &\Rightarrow a+b = 2
 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. توابع درجه سوم دارای برد R می‌باشند.

$$g(x) = x(x^2 + 2x + 1) - x = x^3 + 2x^2$$

دقت کنید که سایر چندجمله‌ای‌ها درجه دوم هستند که برد آن‌ها R نیست.گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار $(2x+1)^2$ ، همان نمودار $f(x)$ است که:

- ۱- ابتدا یک واحد به چپ منتقل شده: $f(x+1)$
 - ۲- سپس در راستای محور x ها دو برابر منقبض شده: $f(2x+1)$
 - ۳- سپس نسبت به محور y ها قرینه شده: $-f(2x+1)$
 - ۴- و در نهایت در راستای محور y ها دو برابر منبسط شده است: $-2f(2x+1)$
- در اثر این عملیات نقطه (x, y) را تبدیل می‌کنیم:

- ۱- یک واحد انتقال به چپ: $(x-1, y)$
- ۲- نصف شده مؤلفه‌ی اول: $\left(\frac{x-1}{2}, y\right)$
- ۳- قرینه شدن مؤلفه‌ی دوم: $\left(\frac{x-1}{2}, -y\right)$
- ۴- دو برابر شدن مؤلفه‌ی دوم: $\left(\frac{x-1}{2}, -2y\right)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2a} \leq -1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{2a} \leq 0 \Rightarrow 0 < a \leq \frac{3}{2}$$

البته $a = 0$ هم جواب است.گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا $g = f \times f$ را محاسبه می‌کنیم. اعضای برد f را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\Rightarrow g = \{(0, 1), (1, 4), (2, 9), (3, 16), (4, 25)\}$$

$$0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 2 \Rightarrow (0, 2) \in \text{f} \circ \text{f} \quad \text{حال } \text{f} \circ \text{g} \text{ را به دست می‌آوریم:}$$

$$1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) \in \text{f} \circ \text{f}$$

$$2 \xrightarrow{g} 9 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow (2, 5) \in \text{f} \circ \text{f}$$

$$3 \xrightarrow{g} 16 \xrightarrow{f} 6 \Rightarrow (3, 6) \in \text{f} \circ \text{f}$$

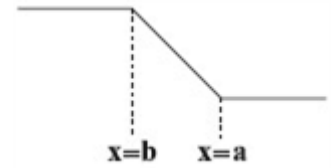
$$4 \xrightarrow{g} 25 \xrightarrow{f} 7 \Rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

پس جواب گزینه‌ی ۴ خواهد بود.

۲۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع به صورت آبشاری یا سرسره‌ای است و قرار است نزولی باشد، پس باید $a > b$ باشد، این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً یکنوا هستند پس ۵ و ۳- همان ریشه‌ها هستند:

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = (5, -3)$$



۲۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f را به صورت مکعب کامل مرتب می‌کنیم.

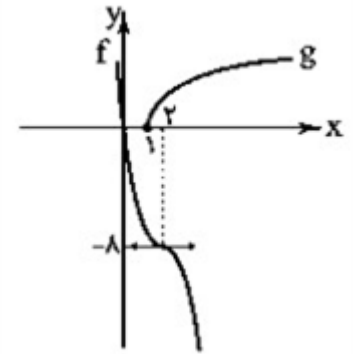
$$f(x) = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 8$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x - 2)^3 - 8$$

نمودار f تغییریافته‌ی نمودار x^3 است.

$$x^3 \rightarrow (x - 2)^3 \rightarrow -(x - 2)^3 \rightarrow -(x - 2)^3 - 8$$

دقت کنید که تابع f از مبدأ می‌گذرد.



دو تابع f و g متقاطع نیستند.

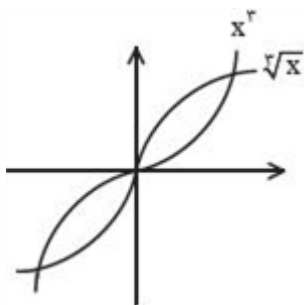
۲۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ همگی درست هستند.

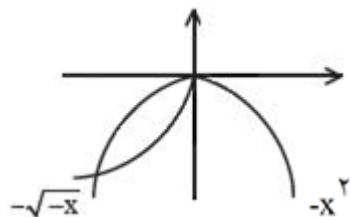
$$f(x) = x^2 - x \Rightarrow f(2) = 2, f(-1) = 2$$

$$\Rightarrow f(-1) \neq \frac{f(2)}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = x^{\sqrt{x}}$ و وارون آن $y = \sqrt{x}$ را در شکل زیر می‌بینید:



به‌علاوه برای $x < 0$ ، نمودار تابع $y = -x^{\sqrt{-x}}$ و وارون آن $y = -\sqrt{-x}$ را هم رسم می‌کنیم. پس از بین گزینه‌های ۱ و ۲، باید یکی را انتخاب کنیم. توجه کنید که اگر $-1 < x < 0$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[3]{x} < -\sqrt{-x}$ است، پس گزینه (۱) صحیح خواهد بود.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به ماشین $(\text{gof})(x) = -x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + 3$ و $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ است، پس داریم:

$$g(f(x)) = 1 - \sqrt{f(x)} = -x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{\sqrt{x}} + x - 1 \Rightarrow f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{\sqrt{x}} - x^{\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow x - \sqrt{x}^{\sqrt{x}} \geq 0 \Rightarrow x(1 - \sqrt{x}) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$0 \leq |x - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow |x - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq x - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq x \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$$

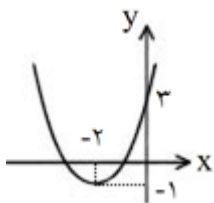
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 3 = x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 4 - 1 = (x + 2)^{\sqrt{x}} - 1 \Rightarrow y + 1 = (x + 2)^{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y + 1} = |x + 2|^{\frac{x}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{x \leq -2} \sqrt{y + 1} = -(x + 2)$$

$$\Rightarrow x = -2 - \sqrt{y + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x + 1}$$

نمودار تابع $y = x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 3$ به شکل زیر است. با توجه به نمودار، برد تابع $y \geq -1$ است که همان دامنه f^{-1} می‌شود.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون وارون f بر خودش منطبق است، پس داریم:

$$y = \frac{ax}{x+1} \Rightarrow yx + y = ax \Rightarrow ax - xy = y \Rightarrow x(a-y) = y$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{a-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1x}{a-x} = -\frac{1x}{x-a}$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow -\frac{1x}{x-a} = \frac{ax}{x+1} \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1x}{x+1} \Rightarrow f(1) = -\frac{1 \cdot 1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

نکته: تابع $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، داریم: $f = f^{-1}$ ، اگر $a+d=0$ باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_f : a-x > 0 \Rightarrow x < a$$

$$D_g : 1x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{1}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x > -\frac{2}{1} \mid \text{Log} \left(\frac{1x+2}{1} \right) < a \right\} \Rightarrow -\frac{2}{1} = -\frac{15}{1k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{15}{2} \Rightarrow D_{f \circ g} = \left(-\frac{2}{1}, 2 \right)$$

$$\text{Log} \left(\frac{1x+2}{1} \right) < a \Rightarrow 1x+2 < 1^a \Rightarrow 1x < 1^a - 2 \Rightarrow x < \frac{1^a - 2}{1} \xrightarrow{x < 2} \frac{1^a - 2}{1} = 2$$

$$\Rightarrow 1^a - 2 = 2 \Rightarrow 1^a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a \text{Log} \left(\frac{a+1}{\sqrt{k-1}} \right) \xrightarrow[k=\frac{15}{2}}^{a=2} 1 \text{Log} \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \text{Log} \frac{1}{1} = 1 \times -2 = -2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax + b$$

$$f(1) = 5 \Rightarrow a + b = 5$$

$$f^{-1}(1) = 2 \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow 2a + b = 1$$

$$-1 \times \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f^{-1}(1) = k \Rightarrow f(k) = 1 \Rightarrow 2k + 3 = 1 \Rightarrow 2k = -2 \Rightarrow k = -1$$

$$f(2 + f^{-1}(1)) = f(2 - 1) = f(1) = 5 + 3 = 8$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_g = \mathbb{R}$$

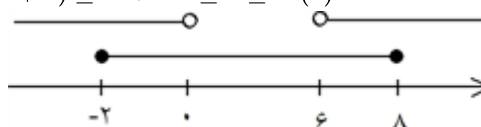
$$D_f : \begin{cases} x > 0 \\ 4 - \text{Log} \frac{x}{1} \geq 0 \Rightarrow \text{Log} \frac{x}{1} \leq 4 \Rightarrow x \leq 16 \end{cases} \Rightarrow D_f = (0, 16]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 - 4x \leq 16\}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x > 4 \vee x < 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x \leq 16 \Rightarrow x^2 - 4x - 16 \leq 0 \Rightarrow (x-8)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 8 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{f \circ g} = [-2, 0) \cup (4, 8]$$



۳۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها نقطه‌ای که با حذف آن یک مقدار از $f(x)$ حذف می‌شود. فقط نقطه‌ی رأس سهمی است. بنابراین:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x \cdot f(x, -1) \xrightarrow{x=3} 3 \times f(2) = 3 \times (4 - 12 + 10) = 3 \times 2 = 6$$

۳۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. رابطه‌ی f ، تابع یک‌به‌یک است، پس:

$$\begin{cases} f(a+b) = f(5) = 2 \Rightarrow a+b = 5 \\ f(a) = f(1) = 3 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a-b = -3$$

۳۳ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مقابل محور تقارن یک سهمی، سهمی را در نقطه‌ی رأس سهمی قطع می‌کند.

از آن‌جا که $x = -\frac{b}{2a} = -2$ محور تقارن سهمی است و سهمی را در نقطه‌ای به عرض $y = -2$ قطع کرده، بنابراین

نقطه‌ی $(-2, -2)$ عضو منحنی است، در نتیجه:

$$-2 = (-2)^2 + 4(-2) + k \Rightarrow k = 2$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $y = x^2 + 4x + 2$ است. همچنین با توجه به شکل مقابل، طول پاره‌خطی که منحنی روی

محور x ها ایجاد می‌کند، برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع است، یعنی:

$$\text{طول پاره خط} = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 - 4(2)}}{|1|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



۳۴ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل سؤال، می‌توان نوشت:

$$(-1, 1) \in f \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 1 \Rightarrow a - b + c = 1 \xrightarrow{a-b=-2} c = 4$$

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b + 2a = 0 \xrightarrow{a-b=-2} a = -1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 4$$

$$\Rightarrow f(1) = -1 + 2 + 4 = 5$$

۳۵ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

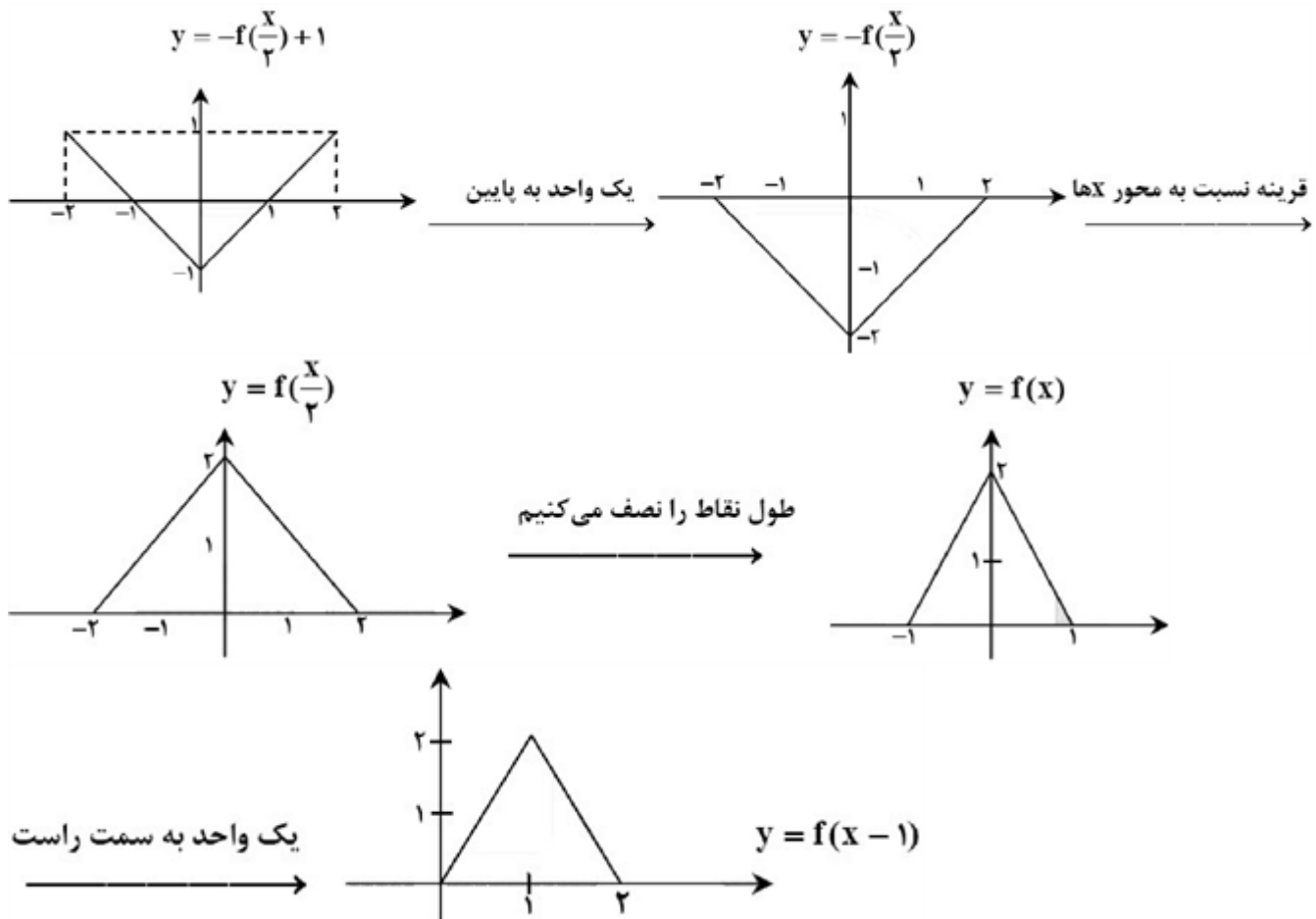
$$g(x) = -x^2 + x \Rightarrow \begin{cases} g(2x) = -(2x)^2 + 2x = -4x^2 + 2x \\ g(-2x) = -(-2x)^2 - 2x = -4x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\text{عبارت } g(2x) - g(-2x) = -4x^2 + 2x - (-4x^2 - 2x) = 4x$$

۳۶ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_{f \circ f^{-1}} = R_f \Rightarrow D_g = D_f \cap R_f - \{x \mid f^{-1} \circ f(x) = 0\} = [2, 8] \cap [-3, 6] - \{0\} = [2, 6]$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۷



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر نقطه‌ی $A(x, y)$ روی نمودار تابع $y = F(x)$ قرار داشته باشد، نقطه‌ی $A'(y, x)$ روی نمودار وارون تابع F قرار دارد. با توجه به نکته‌ی بالا، در گزینه‌ی «۱» داریم:

$$F(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 13 \Rightarrow (2, 13) \in F \Rightarrow (13, 2) \in F^{-1}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعداد فرد حاصل $f(x)$ خواهد شد. ۳۹

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = x \Rightarrow f(f(f(x))) = f(x)$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + \sqrt{x^2} = 1 + |x| = 1 + x$$

$$\Rightarrow y = 1 + x \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow y^{-1} = x - 1 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = x - 1$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

