

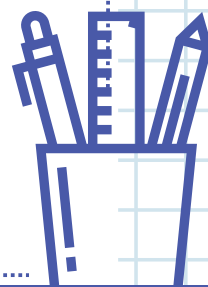


بانک تست ریاضی
سال دهم تجربی
(فصل ۱ الگو و دنباله)

پایه تحصیلی



خاک زیستی پنجم





نام و نام خانوادگی :
 پایه تحصیلی :
 نام دبیر :
 نام آموزشگاه : آکادمی کبادرس
 تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۴/۲۸
 عنوان آزمون : ریاضی سال دهم تجربی (فصل ۱ الگو و دنباله)

بانک تست ریاضی سال دهم تجربی (فصل ۱ الگو و دنباله) سوال

۱ در یک مدرسه از ۶۰ نفر دانش‌آموز پایه دهم، ۳۲ نفر به هر دو درس ریاضی و شیمی علاقه‌مند هستند. همچنین ۴۹ نفر به حداقل یکی از این دو درس علاقه‌مند می‌باشند. مجموع حداقل و حداکثر تعداد دانش‌آموزانی که به درس شیمی علاقه ندارند، کدام است؟

۴۳ (۴)

۳۹ (۳)

۲۸ (۲)

۳۲ (۱)

۲ اگر $A_n = \left[-n, \frac{n-1}{3} \right]$ آنگاه مجموعه $(A_1 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۳ در ده جمله اول یک دنباله هندسی، جمع جملات ردیف زوج، $\sqrt{2}$ برابر جمع جملات ردیف فرد است. اگر جمله نهم این دنباله ۱۶ باشد، جمع اعداد گنگ در بین ۹ جمله اول چقدر است؟

$17\sqrt{2}$ (۴)

$16\sqrt{2}$ (۳)

$15\sqrt{2}$ (۲)

$14\sqrt{2}$ (۱)

۴ اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را با $a_n = (b-2)n^2 + 3n + b$ نشان دهیم، در دسته‌بندی $(a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6), \dots$ واسطه حسابی جملات اول و آخر دسته چهاردهم کدام است؟

$298/5$ (۴)

$297/5$ (۳)

$296/5$ (۲)

۲۹۵ (۱)

۵ اگر $2, x, \frac{2}{9}, y, \dots$ یک دنباله هندسی با جملات مثبت باشد، حاصل $y + x$ کدام است؟

$\frac{5}{27}$ (۴)

$\frac{13}{27}$ (۳)

$\frac{2}{27}$ (۲)

$\frac{20}{27}$ (۱)

۶ دو دنباله حسابی a_n با $a_1 = 1$ و $d_1 = 2$ و دنباله b_n با $b_1 = 2$ و $d_2 = 3$ در نظر بگیرید. بین ۵۰ جمله اول این دو دنباله چند جمله مشترک وجود دارد؟

۱۵ (۴)

۱۶ (۳)

۲۵ (۲)

۲۴ (۱)

۷ اگر $A - B = \emptyset$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه لزوماً نامتناهی است؟

$B - A$ (۴)

B (۳)

B' (۲)

A' (۱)



۸

اگر A و B دو مجموعه به ترتیب متناهی و نامتناهی در مجموعه مرجع Z باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱ $A - B$ نامتناهی است.

۲ $A - B$ تهی است.

۳ $B - A$ نامتناهی است.

۴ $B - A$ متناهی است.

۹

یک دنباله با جملات غیرصفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r + d$ کدام است؟

۱ $\sqrt{2}$

۲ $\frac{1}{2}$

۳ ۱

۴ صفر

۱۰

جمله نهم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_{n+1} = a_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{n-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ ، a_n کدام است؟ (علامت جزء صحیح است).

۱ ۴

۲ ۶

۳ ۸

۴ ۱۰

۱۱

در دنباله حسابی $3 - 5x, 2x - 5, 4x + 7, \dots$ جمله چهاردهم دنباله چند برابر ۲۷ است؟

۱ ۹

۲ ۲۷

۳ ۸۱

۴ ۲۴۳

۱۲

اگر A مجموعه اعداد طبیعی دورقمی بخش‌پذیر بر ۷ و B مجموعه مضارب طبیعی عدد ۱۴ باشند، مجموعه $A - B$ چند عضو دارد؟

۱ ۳

۲ ۴

۳ ۵

۴ ۶

۱۳

اگر جملات سوم، دهم و نوزدهم یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱ $\frac{9}{7}$

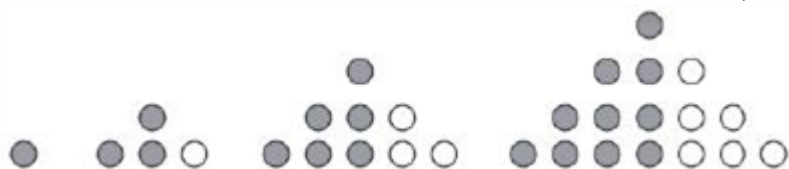
۲ $\frac{7}{9}$

۳ $\frac{2}{3}$

۴ $\frac{3}{2}$

۱۴

در الگوی زیر تعداد گوی‌های رنگی به سفید در شکل پانزدهم کدام است؟



۱ $\frac{5}{4}$

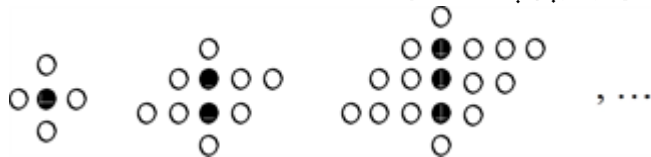
۲ $\frac{6}{5}$

۳ $\frac{7}{6}$

۴ $\frac{8}{7}$

۱۵

با توجه به الگوی زیر، در مرحله سیام اختلاف تعداد نقاط توخالی و توپر چه تعدادی است؟



۱ ۹۰۲

۲ ۹۳۲

۳ ۹۳۰

۴ ۹۶۲

۱۶ جمعیت کشوری هر سال ۲ درصد کاهش می‌یابد. اگر جمعیت کنونی آن ۴۹ میلیون نفر باشد، جمعیت این کشور پس از n سال کدام است؟

$$\frac{\sqrt[2]{n+2}}{\sqrt[2]{n-6} \times 5^{\sqrt[2]{n-6}}} \quad \text{ف} \quad ۱۷۸$$

$$\frac{\sqrt[2]{n+1}}{\sqrt[2]{n-3} \times 5^{\sqrt[2]{n-3}}} \quad \text{۳} \quad ۱۷۹$$

$$\frac{\sqrt[2]{n+2}}{\sqrt[2]{n-3} \times 5^{\sqrt[2]{n-6}}} \quad \text{۲} \quad ۱۸۱$$

$$\frac{\sqrt[2]{n+1}}{\sqrt[2]{n-6} \times 5^{\sqrt[2]{n-3}}} \quad \text{۱} \quad ۱۸۰$$

۱۷ دنباله‌ی حسابی $۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱, \dots$ چند جمله‌ی سه رقمی دارد؟

$$\text{ف} \quad ۱۷۸$$

$$\text{۳} \quad ۱۷۹$$

$$\text{۲} \quad ۱۸۱$$

$$\text{۱} \quad ۱۸۰$$

۱۸ اگر $n(A) = \frac{1}{4} n(B) = ۳$ باشد و تعداد اعضای که فقط در A یا فقط در B باشند، برابر با ۵ باشد. چه تعداد عضو هم در A و هم در B وجود دارند؟

$$\text{ف} \quad ۲$$

$$\text{۳} \quad ۵$$

$$\text{۲} \quad ۷$$

$$\text{۱} \quad ۴$$

۱۹ به ازای چه مقدار از k ، عدد $۵\sqrt{3}$ واسطه‌ی حسابی بین $-\sqrt{3} + k$ و $\sqrt{3} + k$ است؟

$$\text{ف} \quad ۳$$

$$\text{۳} \quad \sqrt{3}$$

$$\text{۲} \quad ۲\sqrt{3}$$

$$\text{۱} \quad ۲$$

۲۰ اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌ها درست نیست؟

$$(A \cap C) - B = A \quad \text{۲}$$

$$A - C = \emptyset \quad \text{۱}$$

$$B - (B' \cap A) = B \quad \text{ف}$$

$$C' \cap B = \emptyset \quad \text{۳}$$

۲۱ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره‌ی آن دسته باشد، $\dots, (۱۱, ۹, ۷), (۳, ۵), (۱)$ مجموع دو جمله اول و آخر دسته‌ی سی‌ام کدام است؟

$$\text{ف} \quad ۱۸۵۰$$

$$\text{۳} \quad ۱۸۰۰$$

$$\text{۲} \quad ۱۷۵۰$$

$$\text{۱} \quad ۱۷۰۰$$

۲۲ اگر U مجموعه مرجع، $n(U) = ۱۰۰$ ، $n(A) = ۲۰$ ، $n(B') = ۶۰$ و $n(A \cap B) = ۱۵$ باشد، $n(A \cup B)$ کدام است؟

$$\text{ف} \quad ۸۰$$

$$\text{۳} \quad ۷۵$$

$$\text{۲} \quad ۶۰$$

$$\text{۱} \quad ۴۵$$

۲۳ از بین گزینه‌های زیر، کدام جمله عمومی نمی‌تواند مربوط به جملات نوشته شده از دنباله داده شده باشد؟

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{-1}{2} + n, \dots \quad \text{۲}$$

$$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots \quad \text{۱}$$

$$1, 0, -1, \dots, 2^n - n^2, \dots \quad \text{ف}$$

$$1, -3, 9, -27, \dots, (-3)^n, \dots \quad \text{۳}$$

۲۴ اگر t_n یک دنباله‌ی حسابی و b_n یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول برابر باشند و بدانیم دنباله‌ی $(r \neq ۱)$ قدرنسبت دنباله‌ی هندسی (r) کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad \text{ف}$$

$$\text{۳} \quad ۳$$

$$\text{۲} \quad ۲$$

$$\text{۱} \quad \frac{1}{2}$$

۲۵ اگر $A = \{x + y \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = ۶۴\}$ و $B = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq ۲۰\}$ باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $A - B$ چند زیرمجموعه دارد؟

$$\text{ف} \quad ۸$$

$$\text{۳} \quad ۱۶$$

$$\text{۲} \quad ۴$$

$$\text{۱} \quad ۲$$

۲۶ کدام گزینه نادرست است؟

- ۱ $(-\infty, 2] \cap [2, +\infty) = \{2\}$ ۲ $[-2, 5) \cup (5, 7] = [-2, 7]$
 ۳ $(-\infty, 5] - [2, 5] = (-\infty, 2)$ ۴ $(-3, 5] \cap (2, 7] = (2, 5]$

۲۷ در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۵ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۱۸ نفر در گروه ورزش و ۷ نفر در هر دو گروه ثبتنام کرده‌اند. چند نفر آنان در هریک از این دو گروه ثبتنام نکرده‌اند؟

- ۱ ۷ ۲ ۱۲ ۳ ۱۴ ۴ ۱۶

۲۸ اگر $a_1 = a_2 = 1$ و $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ باشد، جمله‌ی ۱۰۰ام دنباله‌ی $\{a_n\}$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ ۲

۲۹ اگر $U = [-2, 5]$ مجموعه‌ی مرجع و $A = (-1, 2]$ و $B = (1, 3]$ باشند، چند عدد صحیح از مجموعه‌ی مرجع، در مجموعه‌ی $A \cup B'$ قرار نمی‌گیرد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۸

۳۰ اگر $n(U) = 80$ ، $n(A) = 35$ ، $n(B') = 65$ و $n(A - B) = 25$ باشد، حاصل $n(A \cup B) - n(B - A)$ کدام است؟ (U مجموعه مرجع است.)

- ۱ ۱۵ ۲ ۳۰ ۳ ۳۵ ۴ ۴۰

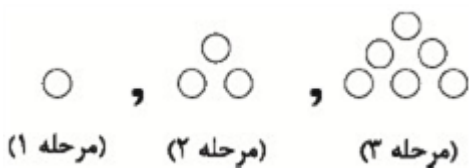
۳۱ در یک دنباله هندسی $t_5 - t_3 = 6$ ، $t_6 - t_4 = 3$ می‌باشد. اگر حاصل ضرب ۲۰ جمله اول برابر 2^K باشد، مقدار K کدام است؟

- ۱ -۹۰ ۲ -۱۰۰ ۳ -۸۰ ۴ -۱۱۰

۳۲ از بین گزینه‌های زیر، کدام جمله‌ی عمومی نمی‌تواند مربوط به جملات نوشته شده از دنباله‌ی داده شده باشد؟

- ۱ $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots$ ۲ $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{-1}{2} + n, \dots$
 ۳ $1, -3, 9, -27, \dots, (-3)^n, \dots$ ۴ $1, 0, -1, \dots, 2^n - n^2, \dots$

۳۳ در دنباله‌ی مثلثی شکل زیر، مرحله‌ی بیستم شامل چند دایره است؟



- ۱ ۲۰۵ ۲ ۲۱۰ ۳ ۲۵ ۴ ۲۲۰

۳۴ در یک کلاس ۵۰ نفره، ۱۲ نفر به هیچ‌کدام از رشته‌های ورزشی تنیس و فوتبال علاقه‌ای ندارند. اگر ۱۷ نفر فقط به رشته‌ی فوتبال و ۱۴ نفر فقط به رشته‌ی تنیس علاقه داشته باشند، چند نفر به هر دو رشته‌ی ورزشی علاقه دارند؟

- ۱ ۶ ۲ ۷ ۳ ۸ ۴ ۹

۳۵ اگر بازه‌های $A = [-2, 5]$ ، $B = (-\infty, 1)$ و $C = (a, 2]$ مفروض باشند، آنگاه نمایش هندسی بازه‌ی

$(B - A) \cap (A \cup C)$ به صورت خواهد بود در این صورت a کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ -۲ ۳ -۴ ۴ -۵

۳۶ مجموع سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله‌ی بعدی آن است. جمله‌ی چندم این دنباله برابر صفر است؟

۱ پنجم ۲ ششم ۳ هفتم ۴ چهارم

۳۷ در یک کلاس ۲۸ نفری، ۱۸ نفر از آن‌ها عضو تیم شطرنج و ۱۲ نفر عضو تیم شنا هستند. اگر ۸ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟

۱ ۱۰ ۲ ۶ ۳ ۸ ۴ ۵

۳۸ در یک کلاس ۶۰ نفره، ۳۰ نفر به فوتبال و ۴۵ نفر به والیبال علاقه دارند. اگر پنج نفر به هیچ رشته‌ای علاقه نداشته باشند، چند نفر به هر دو رشته علاقه دارند؟

۱ ۱۰ ۲ ۱۵ ۳ ۲۰ ۴ ۲۵

۳۹ در دنباله‌ی حاصل از جملات مشترک دو دنباله‌ی حسابی $۲, ۶, ۱۰, \dots$ و $۲, ۸, ۱۴, \dots$ کوچک‌ترین جمله‌ی سه رقمی کدام است؟

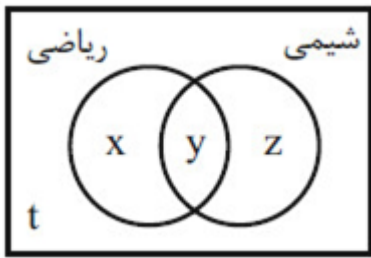
۱ ۱۰۴ ۲ ۱۱۰ ۳ ۱۱۶ ۴ ۱۲۲

۴۰ در دنباله‌های حسابی « $۲, ۹, ۱۶, ۲۳, \dots$ » و « $۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, \dots$ » چند عدد سه رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ موجود است؟

۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$I) x + y + z + t = 60$$

$$II) y = 32$$

$$III) x + y + z = 49$$

$$\xrightarrow{II, III} x + z = 17 (*)$$

$$\xrightarrow{I, III} t = 11$$

برای آنکه حداقل و حداکثر دانش آموزانی که به شیمی علاقه ندارند را به دست آوریم، بایستی حداقل و حداکثر مقدار $x + t$ را محاسبه کنیم.

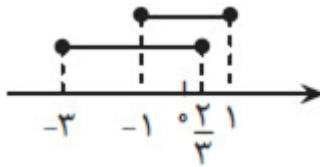
طبق رابطه (*) کمترین و بیشترین مقدار x به ترتیب برابر صفر و ۱۷ می‌باشد. پس حداقل و حداکثر $x + t$ به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \min : x + t &= 0 + 11 = 11 \\ \max : x + t &= 17 + 11 = 28 \end{aligned} \quad \xrightarrow{+} \quad 11 + 28 = 39$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \left[-3, \frac{4}{3}\right] \\ A_5 &= \left[-5, \frac{2}{3}\right] \end{aligned} \quad \cap \rightarrow \left[-3, \frac{2}{3}\right]$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A_1 &= [-1, 2] \\ A_4 &= [-4, 1] \end{aligned} \quad \cap \rightarrow [-1, 1]$$



$$\Rightarrow (A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_4) = [-3, -1]$$

شامل اعداد صحیح ۲- و ۳- می‌باشد.

$$\frac{\text{جمع ردیف زوج}}{\text{جمع ردیف فرد}} = \frac{a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9} = r = \sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a_9 = a_1 r^8 = a_1 \sqrt{2}^8 = 16 \Rightarrow a_1 = 1$$

پس قدرنسبت دنباله $\sqrt{2}$ است و داریم:

پس جملات اول تا نهم، ۱، $\sqrt{2}$ ، ۲، $2\sqrt{2}$ ، ۴، $4\sqrt{2}$ ، ۸، $8\sqrt{2}$ ، ۱۶، $16\sqrt{2}$ هستند. جمع اعداد گنگ بین آنها $(1 + 2 + 4 + 8)\sqrt{2}$ یعنی $15\sqrt{2}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه درجه n در دنباله حسابی باید ۱ باشد، پس:

$$b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (13)$$

$$(a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{13} + \dots + a_{15})$$

$$\text{تعداد ۱ تا ۱۳} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{13}{2} \times (1 + 13) = 91$$

$$14 \text{ دسته } (a_{92}, \dots, a_{105})$$

$$\left. \begin{aligned} a_{92} &= 3 \times 92 + 2 = 278 \\ a_{105} &= 3 \times 105 + 2 = 317 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{واسطه حسابی} = \frac{a_{92} + a_{105}}{2} = \frac{278 + 317}{2} = \frac{595}{2} = 297.5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر خاصیت دنباله‌های هندسی داریم:

$$x^2 = 2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \xrightarrow{x>0} x = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^2 = xy \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} \frac{4}{81} = \frac{2}{3} \times y \Rightarrow y = \frac{\frac{4}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{\cancel{4}^2 \times \cancel{3}}{\cancel{81}_9 \times \cancel{2}_3} = \frac{2}{27}$$

$$y + x = \frac{2}{27} + \frac{2}{3} = \frac{2+18}{27} = \frac{20}{27}$$

$$a_n : 1, 3, 5, \dots \Rightarrow 2n - 1 \quad n \leq 50$$

$$b_n : 2, 5, 8, \dots \Rightarrow 3m - 1 \quad m \leq 50$$

$$2n - 1 = 3m - 1 \Rightarrow 2n = 3m \Rightarrow n = \frac{3}{2}m \Rightarrow m \text{ زوج } \xrightarrow{m=2k} n = \frac{3}{2}m = \frac{3}{2} \times 2k = 3k$$

$$\begin{cases} m = 2k \leq 50 \Rightarrow k \leq 25 \\ n = 3k \leq 50 \Rightarrow k \leq \frac{50}{3} \Rightarrow k \leq 16 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \leq 16$$

حال داریم:

پس ۱۶ عدد برای k و در نتیجه برای m و n یافت می‌شود که جملات مشابه بسازد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

$$۱) A - B \subseteq A, \text{ متناهی } A \Rightarrow \text{متناهی } A - B \times$$

$$۲) \begin{cases} A = \{-10, -9, \dots, 0, 9, 10\} \\ B = \{2k | k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} \end{cases} \Rightarrow A - B = \{-9, -7, \dots, -1, 1, \dots, 9\} \neq \emptyset \times$$

$$۳) B - A \Rightarrow \text{نامتناهی} \checkmark$$

نامتناهی
نامتناهی

(از تعداد نامتناهی عضو، متناهی عضو برداریم باز هم نامتناهی عضو باقی می‌ماند.)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دنباله فوق باید یک دنباله ثابت باشد لذا در دنباله ثابت $d = 0$ و $r = 1$ است پس $r + d = 1$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_{4-2} + a_2 = a_2 + a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_3 + a_2 = 2 + 2 = 4$$

$$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_3 + a_3 = 2 + 2 = 4$$

$$n = 7 \Rightarrow a_7 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$n = 8 \Rightarrow a_8 = a_4 + a_4 = 3 + 3 = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$2b = a + c \Rightarrow 2(2x - 5) = 3 - 5x + 4x + 7$$

$$\Rightarrow 4x - 10 = 10 - x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

پس دنباله ما به فرم زیر می‌باشد:

$$-17, 3, 23, \dots$$

$$d = 3 - (-17) = 20 \Rightarrow a_n = 20n - 37$$

$$\Rightarrow a_{14} = 20(14) - 37 = 280 - 37 = 243 \Rightarrow \frac{a_{14}}{27} = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \{14, 21, 28, 35, 42, 49, \dots, 98\}$$

$$B = \{14, 28, 42, 56, \dots\}$$

$$A - B = \{21, 35, 49, 63, 77, 91\} \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

روش اول: $a_1 + 2d, a_1 + 9d, a_1 + 18d$: دنباله‌ی حسابی این سه جمله، جملات متوالی دنباله‌ی هندسی هستند.

بنابراین:

$$(a_1 + 9d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 18d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 18a_1d + 81d^2 = a_1^2 + 20a_1d + 36d^2$$

$$\Rightarrow 2a_1d - 45d^2 = 0 \Rightarrow d(2a_1 - 45d) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ غ ق ق} \\ a_1 = \frac{45}{2}d \longrightarrow \frac{45}{2}d + 2d, \frac{45}{2}d + 9d, \frac{45}{2}d + 18d \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{45}{2}d}{\frac{45}{2}d} = \frac{63}{49} \Rightarrow r = \frac{9}{7}$$

$$r = \frac{19 - 10}{10 - 3} = \frac{9}{7}$$

روش دوم:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

	شکل ۱	شکل ۲	شکل ۳	شکل ۴	شکل n ام ...
گوی‌های رنگی	۱	۱ + ۲	۱ + ۲ + ۳	۱ + ۲ + ۳ + ۴	$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
گوی‌های سفید	۰	۱	۱ + ۲	۱ + ۲ + ۳	$1 + \dots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$

پس تعداد گوی‌های رنگی به سفید در شکل پانزدهم برابر است با:

$$\frac{\frac{15 \times 16}{2}}{\frac{14 \times 15}{2}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

۱۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تعداد نقاط توپر دنباله خطی $P_n = n$ است و تعداد کل نقاط:

$$a_n = n(n+2) + 2 \Rightarrow a_n = n^2 + 2n + 2$$

$$\text{اختلاف توپر و توخالی} = \underbrace{(n^2 + 2n + 2 - n)}_{\text{توخالی}} = n^2 + 2$$

در مرحله سیام = ۹۰۲

۱۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر A جمعیت کنونی باشد، داریم:

$$A_1 = A - \frac{2}{100} A = \frac{98}{100} A$$

$$A_2 = A_1 - \frac{2}{100} A_1 = \frac{98}{100} A_1 = \left(\frac{98}{100}\right)^2 A$$

(دنباله‌ای هندسی با $r = \frac{98}{100}$)

$$A_n = \left(\frac{98}{100}\right)^n A = \left(\frac{98}{100}\right)^n \times 49, \dots, \dots = \frac{(49 \times 2)^n}{10^{2n}} \times 49 \times 10^6$$

$$= \frac{49^n \times 2^n \times 49}{10^{2n-6}} = \frac{49^{n+1} \times 2^n}{2^{2n-6} \times 5^{2n-6}} = \frac{(7^2)^{n+1}}{2^{n-6} \times 5^{2n-6}} = \frac{7^{2n+2}}{2^{n-6} \times 5^{2n-6}}$$

۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جمله‌ی اول برابر ۶ و قدرنسبت برابر ۵ است.

$$100 \leq a_1 + (n-1)d \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 6 + (n-1)5 \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 5n - 5 \leq 999$$

$$100 \leq 5n + 1 \leq 999$$

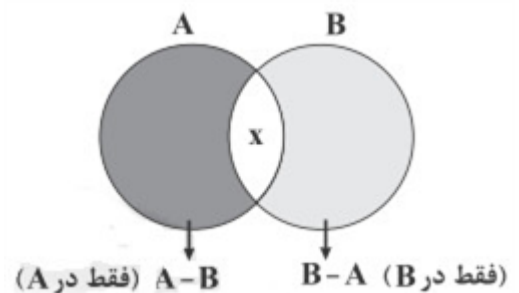
$$99 \leq 5n \leq 998 \Rightarrow \frac{99}{5} \leq n \leq \frac{998}{5} \Rightarrow 19 \frac{4}{5} \leq n \leq 199 \frac{3}{5} \Rightarrow n = 20, 21, \dots, 199$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 199 - 20 + 1 = 180$$

۱۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} n(A) = 3 \\ n(B) = 6 \\ n(A - B) + n(B - A) = 5 \end{cases}$$

اگر $n(A \cap B) = x$ باشد، داریم:

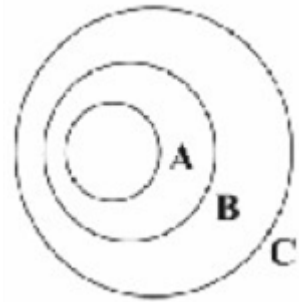
$$\begin{cases} n(A - B) + x = 3 \\ n(B - A) + x = 6 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \underbrace{n(A - B) + n(B - A)}_5 + 2x = 9$$

$$\Rightarrow 2x = 9 - 5 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$5\sqrt{3} = \frac{(7\sqrt{3} + k) + (-\sqrt{3} + k)}{2} \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{6\sqrt{3} + 2k}{2} \Rightarrow k = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد، دراین صورت نمودار ون مجموعه‌ها به صورت زیر خواهد بود: ۲۰



$$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

با توجه به شکل داریم:
بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $A \subset C \Rightarrow A - C = \emptyset$ ✓
- ۲) $A \subset C \Rightarrow A \cap C = A \Rightarrow (A \cap C) - B = A - B \stackrel{A \subset B}{=} \emptyset$ ✗
- ۳) $C' \cap B = B \cap C' = B - C \stackrel{B \subset C}{=} \emptyset$ ✓
- ۴) $B' \cap A = A \cap B' = A - B = \emptyset \Rightarrow B - (B' \cap A) = B - \emptyset = B$ ✓

پس گزینه‌ی (۲) اشتباه و پاسخ مسئله است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تا قبل از دسته‌ی سی‌ام $1 + 2 + 3 + \dots + 29$ عدد فرد استفاده شده است: ۲۱

$$1 + 2 + 3 + \dots + 29 = \frac{29 \times 30}{2} = 15 \times 29$$

پس اولین عدد دسته‌ی سی‌ام $(15 \times 29 + 1)$ اُمین عدد فرد و آخرین عدد آن $(15 \times 29 + 30)$ اُمین عدد فرد است.
 $(15 \times 29 + 1) = 2 \times (15 \times 29 + 1) - 1 = 30 \times 29 + 1$
 $(15 \times 29 + 30) = 2 \times (15 \times 29 + 30) - 1 = 30 \times 29 + 59$

مجموع این دو عدد:

$$2 \times 30 \times 29 + 60 = 60 \times 29 + 60 = 60 \times (29 + 1) = 1800$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۲

$$n(B) = n(U) - n(B') = 100 - 60 = 40$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 40 - 15 = 45$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی جمله عمومی دنباله‌ای در اختیار باشد با قرار دادن $n = 1, 2, 3, \dots$ می‌توان جملات اول، دوم، سوم و ... را یافت. در گزینه (۳) با جمله عمومی $a_n = (-3)^n$ جملات به صورت $-3, 9, -27, \dots$ خواهند بود که مربوط به جملات این دنباله داده شده نیستند. ۲۳



نکته: جمله n ام دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول t_1 و قدرنسبت d ، به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.
 نکته: جمله n ام دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله‌ی اول و r قدرنسبت می‌باشد.
 $(t_1, r \neq 0)$

جمله‌ی اول هر دو دنباله را t_1 در نظر می‌گیریم، همچنین قدرنسبت دنباله‌ی t_n را d و قدرنسبت دنباله‌ی b_n را r می‌نامیم. مطابق فرض سؤال دنباله‌ی $t_1, t_2, t_3, b_1, b_2, \dots$ یک دنباله‌ی حسابی است. چون t_n خود یک دنباله‌ی حسابی است، پس b_2 جمله‌ی چهارم و b_3 جمله‌ی پنجم دنباله‌ی t_n هستند. داریم:

$$t_4 = b_2 \Rightarrow t_1 + 3d = t_1, r \Rightarrow t_1 - t_1, r = -3d$$

$$\Rightarrow t_1(1-r) = -3d \Rightarrow t_1 = \frac{-3d}{1-r} \quad (1)$$

$$t_5 = b_3 \Rightarrow t_1 + 4d = t_1, r^2 \Rightarrow t_1 - t_1, r^2 = -4d$$

$$\Rightarrow t_1(1-r^2) = -4d \Rightarrow t_1 = \frac{-4d}{1-r^2} \quad (2)$$

$$\frac{-3d}{1-r} = \frac{-4d}{1-r^2} \Rightarrow -3d(1-r)(1+r) = -4d(1-r) \quad \text{از رابطه‌ی (۱) و (۲) داریم:}$$

$$\xrightarrow{r \neq 1} -3(1+r) = -4 \Rightarrow -3 - 3r = -4 \Rightarrow 3r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

$$A = \{x + y \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = 6\}$$

$$xy = 6 \Rightarrow 2^1, 3^1, 6^1, (-2)^1, (-3)^1, (-6)^1$$

$$A = \{(2+6), (4+3), (8+2), (6+1), (-2+6), (-8+2)\} \Rightarrow A = \{8, 7, 10, 6, 4, -6\}$$

$$B = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 20\} \Rightarrow B = \{2^x \mid x = 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow B = \{2, 4, 8, 16\}$$

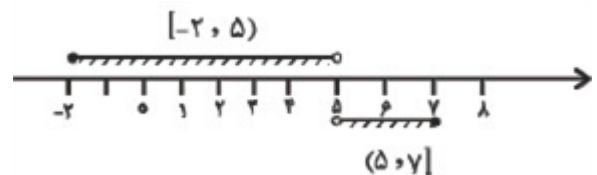
$$A - B = \{-6, 7, 10, 6\}$$

یادآوری: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با 2^n

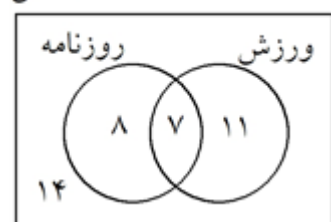
$$n(A - B) = 4 \Rightarrow 2^4 = 16 \quad \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

$$[-2, 5) \cup (5, 7] = [-2, 7] - \{5\}$$

به کمک نمایش روی محور می‌توان درستی سایر گزینه‌ها را نشان داد.



کلاس



$$\text{فقط روزنامه} = 8 - 7 = 1$$

$$\text{فقط ورزش} = 11 - 7 = 4$$

در هیچ‌یک از این دو گروه ثبت نام نکرده‌اند.

۲۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا چند عضو ابتدایی دنباله را می‌نویسیم:

$$a_1 = a_2 = 1 \Rightarrow a_3 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow a_4 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow a_5 = -1 - 0 = -1 \Rightarrow a_6 = -1 + 1 = 0 \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n: \underbrace{1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, \dots}_{\text{تکرار می شود.}}$$

چون جملات ۶ تا ۶ تا تکرار می‌شود، بنابراین کافی است مضارب ۶ را برداریم:

$$a_{1..} = a_{(1 \times 6) + 4} = a_4 = -1$$

۲۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

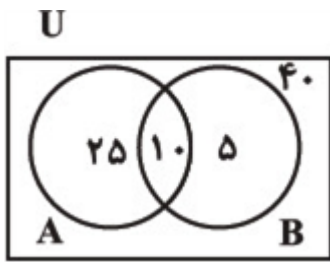
$$\begin{cases} U = [-2, 5] \\ B = (1, 3] \end{cases} \Rightarrow B' = [-2, 2] \cup (3, 5] \\ \Rightarrow A \cup B' = [-2, 2] \cup (3, 5]$$

تنها عضوی از مجموعه‌ی مرجع که صحیح بوده و عضو مجموعه‌ی $A \cup B'$ نیست. عدد ۳ است. پس مجموعه‌ی $A \cup B'$ تنها یک عدد صحیح را شامل نمی‌شود.

۳۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$$\begin{cases} n(U) = 80 \\ n(A) = 35 \text{ و } n(A - B) = 25 \Rightarrow n(A \cap B) = 10 \\ n(B') = 65 \Rightarrow n(B) = 80 - 65 = 15 \end{cases} \\ \Rightarrow n(B - A) = 5$$



$$\begin{cases} n(A \cup B) = 40 \\ n(B - A) = 5 \end{cases} \Rightarrow n(A \cup B) - n(B - A) = 40 - 5 = 35$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) - n(B - A) &= [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] \\ &- [n(B) - n(A \cap B)] = n(A) = 35 \end{aligned}$$

۳۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} t_5 - t_3 = 6 \Rightarrow t_1 q^4 - t_1 q^2 = 6 \\ t_6 - t_4 = 3 \Rightarrow t_1 q^5 - t_1 q^3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 q^2 (q^2 - 1) = 6 \\ t_1 q^3 (q^2 - 1) = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = -32$$

$$t_1 t_2 \dots t_{19} = t_1 \cdot t_1 q \cdot t_1 q^2 \dots t_1 q^{18} = t_1^{19} \cdot q^{1+2+\dots+18}$$

$$t_1^{19} \cdot q^{\frac{19 \times 20}{2}} = t_1^{19} \cdot q^{190} = \left(t_1^2 \cdot q^{19} \right)^{10} = (2^{10} \times 2^{-19})^{10} = (2^{-9})^{10} = 2^{-90} = 2^K \Rightarrow K = -90$$

۳۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی جمله‌ی عمومی دنباله‌ای در اختیار باشد با قرار دادن $n = 1, 2, 3, \dots$ می‌توان

جملات اول، دوم، سوم و ... را یافت. در گزینه‌ی ۳، با جمله‌ی عمومی $a_n = (-3)^n$ جملات به صورت $-3, 9, -27, \dots$ خواهند بود که مربوط به جملات این دنباله‌ی داده شده نیستند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۳

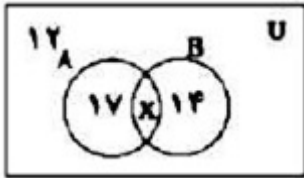
$$t_1 = 1, t_2 = 1 + 2 = 3, t_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \dots, t_n = 1 + 2 + \dots + n$$

$$t_1 = \frac{1(1+1)}{2}, t_2 = \frac{2(2+1)}{2}, t_3 = \frac{3(3+1)}{2}, \dots, t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$t_{20} = \frac{20(20+1)}{2} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

حمله بیستم: $t_{20} = \frac{20(20+1)}{2} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در صورتی که مجموعه‌ی افرادی که به رشته‌ی فوتبال علاقه دارند را با A و مجموعه‌ی افرادی که به رشته‌ی تنیس علاقه دارند را با B نمایش دهیم، داریم: (U مجموعه‌ی مرجع است).



$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)') = 50 - 12 = 38$$

$$n(A - B) = 17, n(B - A) = 14$$

همچنین می‌دانیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (۱)$$

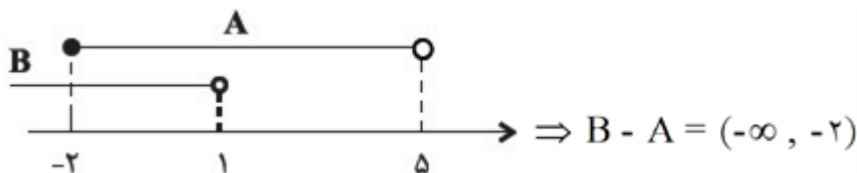
$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad (۲)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \quad (۳)$$

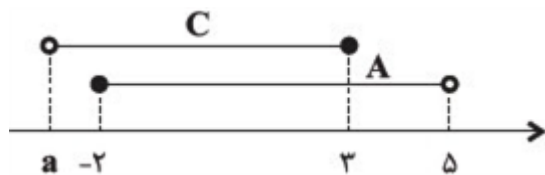
$$\xrightarrow{۳, ۲, ۱} n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A - B) - n(B - A)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 38 - 17 - 14 = 7$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۵



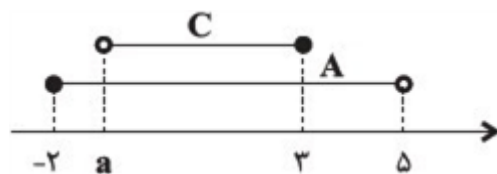
برای $A \cup C$ دو حالت وجود دارد:
(۱) $a < -2$



$$a < -2 \Rightarrow A \cup C = (a, 5) \Rightarrow (B - A) \cap (A \cup C) = (a, -2)$$

با توجه به شکل
داده شده $a = -4$

$$a \geq -2 \quad (۲)$$



$$a \geq -2 \Rightarrow A \cup C = [-2, 5) \Rightarrow (B - A) \cap (A \cup C) = \emptyset$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق صورت سؤال داریم: ۳۶

$$a_1 + a_2 + a_3 = 4(a_4 + a_5 + a_6) \quad (1)$$

از طرفی می دانیم:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 2a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 \quad (2) \\ a_4 + a_6 = 2a_5 \Rightarrow a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow{(2),(3),(1)} 3a_2 = 4(3a_5)$$

$$\Rightarrow a_2 = 4a_5 \Rightarrow a_1 + d = 4(a_1 + 4d) \Rightarrow 3a_1 + 15d = 0 \Rightarrow a_1 + 5d = 0 \Rightarrow a_6 = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$\begin{aligned} n(A) &= 18 & n(B) &= 12 & n(U) &= 28 \\ n(A \cup B)' &= 8 \Rightarrow n(A \cup B) = n(U) - n(A \cup B)' = 28 - 8 = 20 \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ 20 &= 18 + 12 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$\begin{aligned} n(A) &= 30 \Rightarrow \text{فوتبال} \\ n(B) &= 45 \Rightarrow \text{والیبال} \\ n(A' \cap B') &= 5 \Rightarrow n((A \cup B)') = 5 \Rightarrow n(U) - n(A \cup B) = 5 \Rightarrow n(A \cup B) = 55 \\ n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 30 + 45 - 55 = 20 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قدرنسبت دنباله‌ی حسابی $2, 6, 10, \dots$ برابر $d = 4$ و قدرنسبت حسابی $2, 8, 14, \dots$ برابر $d' = 6$ می‌باشد، در دنباله‌ی حاصل از جملات مشترک دو دنباله، قدرنسبت برابر کوچک‌ترین مضرب مشترک d و d' ، یعنی $12 = [4, 6]$ است. لذا دنباله‌ی حاصل به‌صورت روبه‌رو است:

$$\begin{aligned} a_n = a + (n-1)d &\geq 100 \Rightarrow 2 + 12(n-1) \geq 100 \Rightarrow n \geq 10 \\ a_{10} &= a + (10-1)d = 2 + 9 \times 12 = 110 \end{aligned}$$

کم‌ترین مقدار n برابر ۱۰ است و لذا:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دنباله جملات مشترک دو دنباله حسابی اولین جمله مشترک، جمله اول و k م قدرنسبت ها، قدرنسبت دنباله مشترک می باشد. ۴۰

$$\begin{cases} a_n : 2, 9, 16, 23, 30, \textcircled{37} \\ b_n : 12, 17, 22, 27, 32, \textcircled{37} \end{cases} \Rightarrow \text{اولین جمله مشترک}$$

$$d = [5, 7] = 35 \Rightarrow c_n = 37 + (n-1)(35) \Rightarrow c_n = 35n + 2$$

$$100 \leq 35n + 2 < 300 \Rightarrow 98 \leq 35n < 298$$

$$\Rightarrow 2/8 \leq n < 8/5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 3 \leq n \leq 8$$

بنابراین ۶ عدد سه رقمی مشترک کوچکتر از ۳۰۰ موجود است.



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

