



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۴/۲۹

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم

تجربی فصل ۵ تابع

۱ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x \geq 3 \\ 3x + b, & x < 3 \end{cases}$ ؛ اگر تابع $g(x) = f(x) + |x - 3|$ تابع خطی باشد، آنگاه مقدار $f(-1) + f(3)$ کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ -۲ ۳ -۱ ۴ صفر

۲ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b + |x - 2|, & x \geq 2 \\ -2x + c, & x < 2 \end{cases}$ خطی باشد و $f(1) = 0$ ، آنگاه حاصل $a\sqrt{c}\sqrt{b}$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ -۶ ۳ ۱۰ ۴ -۱۰

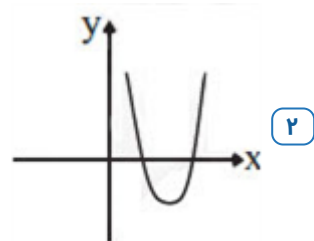
۳ تابع f خطی است به طوری که $f(2x + 1) = 2f(x) + 1$ است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ -۱ ۳ ۱ ۴ نمی‌توان مشخص کرد

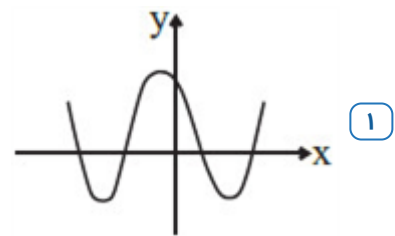
۴ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای توابع $f(x) = 3 - |x - 2|$ و $g(x) = |6 - 3x|$ کدام است؟

- ۱ $\frac{17}{8}$ ۲ $\frac{7}{3}$ ۳ $\frac{9}{4}$ ۴ $\frac{5}{2}$

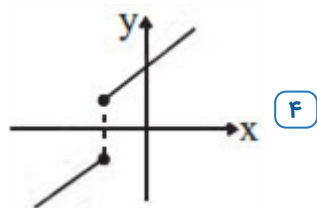
۵ کدامیک از شکل‌های زیر نمودار یک تابع را نشان نمی‌دهد؟



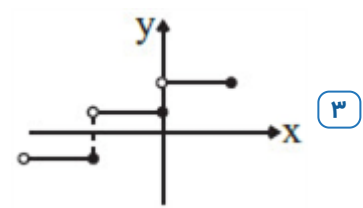
۲



۱



۴



۳

۶ مساحت سطح محدود بین نمودارهای $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 2$ و $g(x) = k$ برابر ۹ واحد مربع است. مقدار k کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۶ ۳ ۵ ۴ ۳

۷ در تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x \geq 1 \\ -3, & x \leq 1 \end{cases}$ حاصل $f(3) - f(-x^2)$ کدام است؟

- ۱ -۱۶ ۲ -۱۰ ۳ $-3 - x^2$ ۴ $x^2 - 3$

۸ طول یک مستطیل از k برابر عرض آن ۲ واحد بیشتر است. اگر رابطه‌ی ریاضی که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان می‌کند به صورت $f(x) = 9x + 4$ باشد، که در آن x عرض مستطیل است، مقدار k کدام است؟

۳/۵ (۴)

۴ (۳)

۴/۵ (۲)

۳ (۱)

۹ رابطه‌ی $R = \{(0, -1), (b, 2a), (1, a - 2b)\}$ تابعی است که برد آن یک عضو دارد. حاصل $a + b$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

-۱ (۱)

۱۰ نمودار تابع $y = |1 - 2x|$ را ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت و یک واحد به سمت y ‌های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار نهایی در چه فاصله‌ای پایین خط $y = 1$ قرار می‌گیرد؟

$(2, 4)$ (۴)

$(1/5, 3/5)$ (۳)

$(1/5, 2/5)$ (۲)

$(1, 3)$ (۱)

۱۱ اگر $f = \{(5, a + 1), (-1, 2b - 9), (c, \sqrt{16})\}$ تابع همانی باشد، $g = \{(5, a), (-1, b), (16, c)\}$ کدام نوع تابع است؟

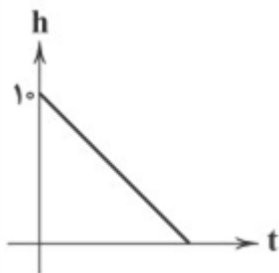
نامشخص (۴)

چند ضابطه (۳)

ثابت (۲)

همانی (۱)

۱۲ متحرکی از ارتفاع ۱۰ متری با سرعتی ثابت در حال پایین آمدن است. نمودار مقابل رابطه‌ی بین ارتفاع و زمان طی‌شده از آغاز حرکت را نشان می‌دهد. اگر این متحرک در هر ثانیه $1/5$ متر را طی کند، پس از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟



$6\frac{2}{3}$ (۴)

۱۵ (۳)

$6\frac{1}{3}$ (۲)

$1\frac{2}{3}$ (۱)

۱۳ اگر مجموعه‌ی $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ دامنه‌ی تابع $f : A \rightarrow B$ باشد، برد تابع f چند عضو دارد؟

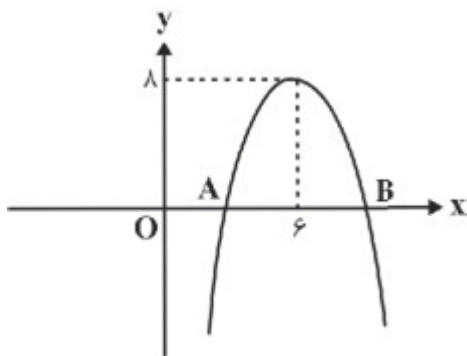
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۱۴ در نمودار سهمی زیر، $OA = AB$ است. سهمی محور y ‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟



-۳۲ (۴)

-۵۶ (۳)

-۶۴ (۲)

-۷۲ (۱)

۱۵ اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & ; x^2 \geq |x| \\ 2x^2 + c & ; x^2 \leq |x| \end{cases}$ تابع باشد، مقدار a کدام است؟

۴ -۲

۳ $\frac{1}{2}$

۲ ۲

۱ ۱

۱۶ اگر رابطه‌ی $f = \{(4, b^2), (b+3, 5-a), (4, 3-2b), (b+3, 3a+1)\}$ تابع باشد، ab کدام است؟

۴ ۳

۳ -۱

۲ ۱

۱ -۳

۱۷ اگر $g(x) = [x]$ و $f(x) = \text{sign}(x)$ تابع همانی باشد، حاصل عبارت $\frac{\pi h(\pi) + 16f(-\sqrt{3})}{h(\pi) + g(-\pi)}$ کدام است؟
([] نماد جزء صحیح است.)

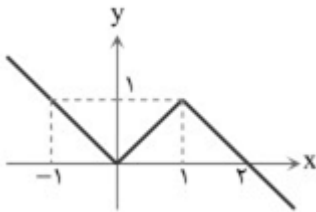
۴ $\frac{\pi^2 - 16}{\pi - 3}$

۳ $\frac{\pi^2 + 16}{\pi - 4}$

۲ $\pi - 4$

۱ $\pi + 4$

۱۸ نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار کدام تابع زیر در بازه‌ی $[0, 2]$ بر نمودار f منطبق است؟



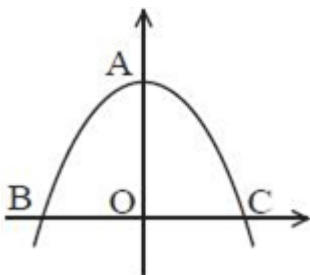
۴ $-f(x+2)$

۳ $-f(x-2)$

۲ $f(2-x)$

۱ $f(-x-2)$

۱۹ در شکل زیر نمودار $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + k$ رسم شده است. اگر $OA = OB = OC$ ، مقدار k چه عددی است؟



۴ ۳

۳ ۴

۲ ۱

۱ ۲

۲۰ به ازای هر k در بازه‌ی $[a, b]$ ، خط $y = k$ نمودار تابع $y = x - 1 + \frac{|3x|}{x}$ را قطع نمی‌کند. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

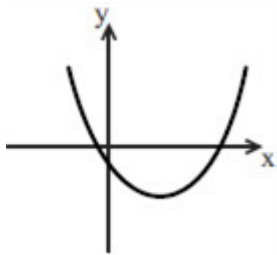
۴ ۶

۳ ۲

۲ ۴

۱ ۸

۲۱ شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه‌ی زیر همواره درست است؟



- ۱ $a + b > 0$ ۲ $a + b < 0$ ۳ $b + c > 0$ ۴ $b + c < 0$

۲۲ در تابع خطی f با شیب منفی، می‌دانیم $f(1) = 2$ و $f(f(-1)) = -8$ است. مقدار $f(2)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{9}{2}$ ۲ $\frac{7}{2}$ ۳ ۳ ۴ صفر

۲۳ با فرض $f(x) + f(1) = \frac{2x^2 + x}{3}$ مقدار $f(3)$ کدام است؟

- ۱ ۷ ۲ ۶ ۳ $\frac{6}{5}$ ۴ $\frac{7}{5}$

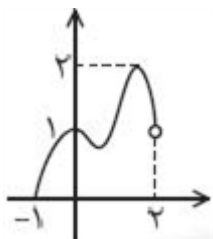
۲۴ اگر رابطه‌ی $f = \{(2, a^2), (3, b^2), (2, a+2), (3, 2b-1)\}$ یک تابع باشد، کدام گزینه می‌تواند حاصل $\frac{f(2) - 2}{f(3) + 1}$ باشد؟

- ۱ ۲ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ -۱ ۴ $-\frac{1}{2}$

۲۵ اگر $f(x) = -x + 2kx - 4k$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- ۱ -۲ ۲ -۴ ۳ ۱ ۴ ۵

۲۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. $D_f \cap R_f$ کدام است؟



- ۱ $[-1, 2]$ ۲ $[-1, 2)$ ۳ $[0, 1]$ ۴ $[0, 2)$

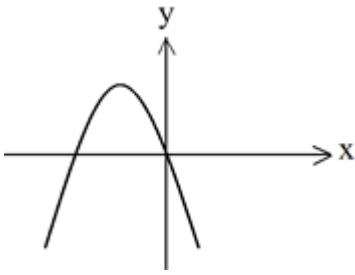
۲۷ کدام ضابطه‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی تابع ثابت است؟

- ۱ $\begin{cases} f: R \rightarrow R \\ f(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ ۲ $\begin{cases} f: R \rightarrow R \\ f(x) = x \end{cases}$ ۳ $\begin{cases} f: R \rightarrow R \\ f(x) = 0 \end{cases}$ ۴ $\begin{cases} f: R \rightarrow R \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

۲۸ مجموعه مقادیر شیب خطوط گذرا از مبدأ که با تابع $f(x) = x^2 - 7x + 4$ هیچ نقطه‌ی برخوردی ندارند. به صورت بازه‌ی (a, b) می‌باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱ -۱۲ ۲ -۱۴ ۳ ۱۴ ۴ ۱۲

۲۹ شکل زیر مربوط به تابع $y = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه همواره صحیح است؟



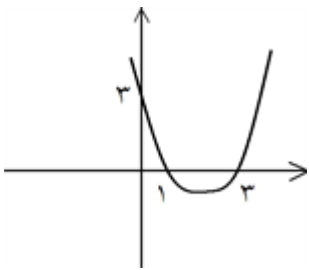
- ۱ $ab < 0$ (۱) ۲ $a + b + c < 0$ (۲) ۳ $a - b > 0$ (۳) ۴ $abc > 0$ (۴)

۳۰ اگر رابطه زیر نمایش زوج مرتب یک تابع باشد مقدار $(a + b)^2 - 3ab$ کدام است؟

$$R = \left\{ (2, a^2 - b^2), (46, 1), (4, 41 - ab), (2, 41), (4, 41), (46, a - b) \right\}$$

- ۱ ۲۰ (۱) ۲ ۲۱ (۲) ۳ ۲۵ (۳) ۴ ۳۰ (۴)

۳۱ شکل زیر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 3x - 7$ کدام است؟



- ۱ ۲ و ۵ (۱) ۲ ۳ و ۴ (۲) ۳ ۱ و ۴ (۳) ۴ ۲ و ۷ (۴)

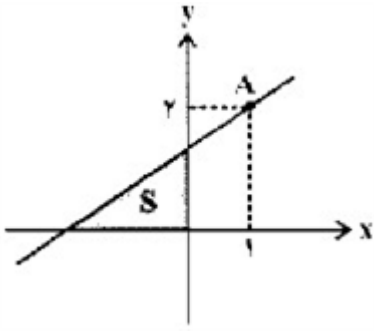
۳۲ در مورد تابع خطی f می‌دانیم $f(2) = 5$ و $f(-1) = -1$ ، این تابع محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱ ۱ (۱) ۲ ۲ (۲) ۳ $\frac{1}{2}$ (۳) ۴ $-\frac{1}{2}$ (۴)

۳۳ اگر $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}$ باشد، مقدار $f(1 - \sqrt{3})$ کدام است؟

- ۱ $1 - 2\sqrt{3}$ (۱) ۲ $1 - \sqrt{3}$ (۲) ۳ ۲ (۳) ۴ ۱ (۴)

۳۴ در شکل مقابل، خطوط گذرنده از نقطه‌ی $A(1, 2)$ با شیب m ، در ناحیه‌ی دوم با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت S ایجاد می‌کنند. تابع S برحسب m کدام است؟



۲ $S = \frac{(m-2)^2}{m} : 0 < m < 2$

۱ $S = \frac{(m-2)^2}{2m} : 0 < m < 2$

۴ $S = \frac{(m-2)^2}{m} : m > 0$

۳ $S = \frac{(m-2)^2}{2m} : m > 0$

۳۵ در بازه‌ی $(-\infty, a)$ ، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ بالاتر از نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرار می‌گیرد، بیش‌ترین مقدار a کدام است؟

۴ -۳

۳ -۱

۲ ۳

۱ ۱

۳۶ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}$ در کدام‌یک از فاصله‌های زیر کاملاً زیر محور x ها قرار دارد؟

۴ $(2, +\infty)$

۳ $(-\infty, 1)$

۲ $(2, 3)$

۱ $(3, 4)$

۳۷ برد تابع $y = \frac{1}{x^2 + x^2 + 1}$ به صورت بازه‌ی $(\alpha, \beta]$ است. $\alpha + \beta$ کدام است؟

۴ $\frac{5}{2}$

۳ $\frac{3}{2}$

۲ ۲

۱ ۱

۳۸ اگر برد تابع $g(x)$ ، اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد، برد تابع $f(x) = \frac{2g(x)}{g(x)-2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ صفر

۳ ۱

۲ ۳

۱ ۲

۳۹ رابطه‌ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m ، یک تابع است؟

۴ هیچ مقدار m

۳ ۲

۲ -۱

۱ -۲

۴۰ اگر $f(x) = -x^2 - 2x$ باشد، حاصل $f(x-1) - f(x+1)$ کدام است؟

۴ $4(x-1)$

۳ $2(x-1)$

۲ $4(x+1)$

۱ $2(x+1)$

۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه تابع g را به صورت یک تابع قطعه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} (a+1)x - 1 & ; x \geq 3 \\ 2x + 3 + b & ; x < 3 \end{cases}$$

حال برای اینکه تابع g یک تابع خطی شود، باید هر دو ضابطه آن برابر باشند:

$$\begin{cases} a+1=2 \\ b+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \geq 3 \\ 2x-4 & ; x < 3 \end{cases} \Rightarrow f(3) + f(-1) = 5 + (-7) = -2$$

۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی تابع $f(x)$ خطی است یعنی عبارت موجود در هر دو ضابطه برابرند.

چون در ضابطه اول $x \geq 2$ پس $|x-2|$ برابر با $x-2$ است.

$$\Rightarrow ax + b + |x-2| = -2x + c \Rightarrow (a+1)x + b - 2 = -2x + c \Rightarrow a+1 = -2 \Rightarrow a = -3$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow -2(1) + c = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b - 2 = c \Rightarrow b - 2 = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow a\sqrt{c\sqrt{b}} = -3\sqrt{2\sqrt{4}} = -6$$

۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع f را $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$f(2x+1) = a(2x+1) + b = 2ax + a + b$$

$$2ax + a + b = 2ax + 2b + 1 \Rightarrow b = a - 1$$

و رابطه داده شده را به صورت زیر می‌سازیم:

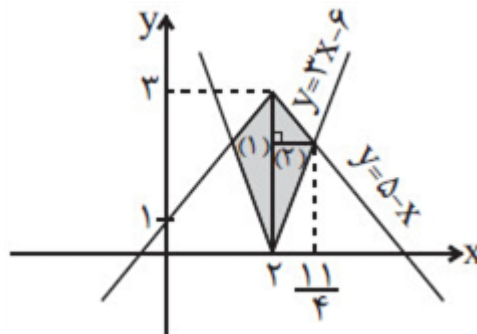
پس ضابطه تابع $f(x) = a(x+1) - 1$ و در نتیجه $f(-1) = -1$ است.

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با روش نقطه‌گذاری در ضابطه توابع داده شده، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. نقطه رأس

هر دو تابع دارای طول ۲ می‌باشد لذا مطابق شکل مساحت ناحیه خواسته شده از دو مثلث یکسان تشکیل شده است.

برای محاسبه مساحت یکی از مثلث‌ها کافی است محل برخورد دو خط مربوطه را محاسبه نماییم:



$$f(x) = 3 - |x-2| \xrightarrow{x \geq 2} f(x) = 5 - x$$

$$g(x) = |6 - 3x| \xrightarrow{x \geq 2} g(x) = 3x - 6$$

$$3x - 6 = 5 - x \Rightarrow 4x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

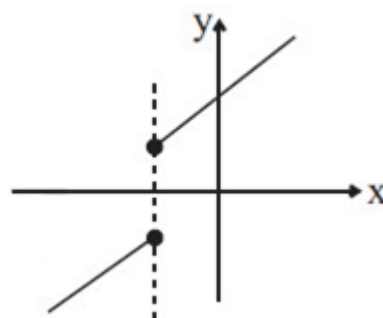
$$\text{ارتفاع مثلث} = \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\text{r}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{3 \times \frac{2}{4}}{2} = \frac{9}{8}$$

$$\text{مساحت ناحیه موردنظر} = 2S_{\text{r}} = 2 \times \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$$

۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در نمودار گزینه ۴ می‌توان خطی عمودی رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین این نمودار معرف یک تابع نیست.



۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودارهای تابع f و g را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2} + 2 = |x-1| + 2$$

مختصات نقاط A و B را می‌یابیم:

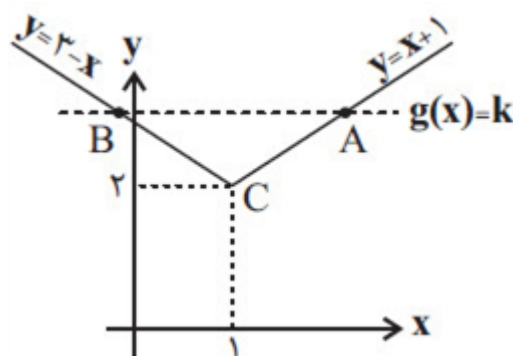
$$x_A : x + 1 = k \Rightarrow x = k - 1$$

$$x_B : 3 - x = k \Rightarrow x = 3 - k$$

پس در مثلث ABC داریم:

$$\begin{cases} \text{قاعده} = x_A - x_B = 2k - 4 \\ \text{ارتفاع} = k - 2 \end{cases}$$

$$S = \frac{(2k-4)(k-2)}{2} = (k-2)^2 = 9 \Rightarrow (k-2) = \pm 3 \xrightarrow{k>2} k = 5$$



۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به ازای $x = 1$ ، باید مقدار دو ضابطه با هم برابر باشد:

$$a(1) + 2 = -3 \Rightarrow a = -5$$

حاصل خواسته شده برابر است با:

$$f(3) \xrightarrow{3 \geq 1} -5(3) + 2 = -13$$

$$\Rightarrow -13 - (-3) = -10$$

$$f(-x^4) \xrightarrow{-x^4 \leq 1} -3$$

۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

عرض مستطیل را x در نظر می‌گیریم و در نتیجه طول مستطیل برابر است با $kx + 2$ ، در این صورت:

$$\text{محیط مستطیل} = f(x) = 2(\text{عرض} + \text{طول})$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(kx + 2 + x) \Rightarrow f(x) = 2kx + 4 + 2x \Rightarrow f(x) = (2k + 2)x + 4$$

با توجه به اینکه $f(x) = 9x + 4$ بنابراین:

$$2k + 2 = 9 \Rightarrow 2k = 7 \Rightarrow k = 3/2$$

۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون رابطه R تابعی می‌باشد که برد آن تک عضوی است، پس خواهیم داشت:

$$(2a = a - 2b = -1)$$

$$\begin{cases} 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ a - 2b = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} - 2b = -1 \Rightarrow -2b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

۱۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|1 - 2x| = |2x - 1| \xrightarrow{\text{واحد به راست}} |2(x - \frac{1}{2}) - 1| = |2x - 5| \xrightarrow{\text{واحد پایین}} |2x - 5| - 1$$

$$|2x - 5| - 1 < 1 \Rightarrow |2x - 5| < 2 \Rightarrow -2 < 2x - 5 < 2 \Rightarrow 3 < 2x < 7 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}$$

۱۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، در هر زوج مرتب مؤلفه‌های اول و دوم مساوی هستند.

$$a + 1 = 5 \Rightarrow a = 4$$

$$2b - 9 = -1 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$c = \sqrt{16} \Rightarrow c = 4$$

چون $a = b = c = 4$ است، در تابع g همه‌ی مؤلفه‌های دوم با هم مساوی هستند. بنابراین تابع g ، تابع ثابت است.

۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رابطه داده‌شده، خطی با شیب $(-1/5)$ است. برای درک بهتر داریم:

$$A(0, 10) \xrightarrow[\text{۱/۵ متر پایین می آید}]{\text{۱ ثانیه بعد}} B(1, 10 - 1/5) = (1, 9/5)$$

معادله‌ی خط گذرا از A و B را می‌نویسیم:

$$h = at + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(0, 10)} b = 10 \\ \xrightarrow{(1, 9/5)} 9/5 = a + b \Rightarrow a = 9/5 - 10 = -1/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = -1/5t + 10$$

$$\xrightarrow{h=0} -1/5t + 10 = 0 \Rightarrow 1/5t = 10 \Rightarrow t = \frac{10}{1/5} = \frac{10}{1/5} = \frac{50}{1} = 50 \text{ ثانیه}$$

۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر یک از اعضای دامنه را در ضابطه‌ی تابع جایگذاری نموده و مقادیر برد را به دست

می‌آوریم.

$$f(2) = 2(2 - 1) - 2 = 0$$

$$f(1) = 1(1 - 1) - 2 = -2$$

$$f(0) = 0(0 - 1) - 2 = -2$$

$$f(-1) = -1(-1 - 1) - 2 = 0$$

برد تابع f مجموعه‌ی $\{-2, 0\}$ می‌باشد که دارای دو عضو است.

۱۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر طول نقاط A و B به ترتیب x_1 و x_2 باشد، داریم:

$$\begin{aligned} OA = x_1 &\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = 12 \\ OB = x_2 &\end{aligned}$$

از طرفی $OA = AB$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} OA &= x_1 \\ AB &= OB - OA = x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 - x_1 = x_1 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \xrightarrow{x_2=2x_1} \\ x_1 + 2x_1 &= 12 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 8 \\ y &= k(x - 6)^2 + 8 \xrightarrow{y=0} 0 = k(4 - 6)^2 + 8 \Rightarrow 4k + 8 = 0 \Rightarrow k = -2 \\ \Rightarrow y &= -2(x - 6)^2 + 8 \xrightarrow{x=0} y = -2 \times 36 + 8 \Rightarrow y = -72 + 8 = -64 \end{aligned}$$

۱۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^2 \geq |x|$ و $x^2 \leq |x|$ ، ضابطه‌های f را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & ; x \in \{0\} \cup (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ 2x^2 + c & ; x \in [-1, 1] \end{cases}$$

برای این‌که f تابع باشد مقادیر دو ضابطه به ازای $x \in \{0, -1, 1\}$ برابر باید باشد:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0 \\ \left. \begin{aligned} f(1) &= a + b = 2 + c \Rightarrow a + b = 2 \\ f(-1) &= a - b = 2 + c \Rightarrow a - b = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

۱۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در دو زوج مرتب، مؤلفه‌ی اول ۴ است. بنابراین باید مؤلفه‌ی دوم آن‌ها برابر باشد:

$$b^2 = 3 - 2b \Rightarrow b^2 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow (b - 1)(b + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

در دو زوج مرتب مؤلفه‌ی اول $b + 3$ است و باید مؤلفه دوم آن‌ها برابر باشد:

$$3a + 1 = 5 - a \Rightarrow a = 1$$

اگر $b = 1$ باشد $b + 3 = 4$ می‌شود و زوج مرتب‌های $(4, b^2)$ و $(b + 3, 5 - a)$ دارای مؤلفه‌ی اول یکسان ۴ و مؤلفه‌ی دوم متفاوت خواهد شد. بنابراین $b = -3$ قابل قبول است. در نتیجه:

$$ab = 1 \times (-3) = -3$$

$$f = \{(4, 9), (0, 4)\}$$

۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $h(x) = x$ است، در نتیجه:

$$h(\pi) = \pi$$

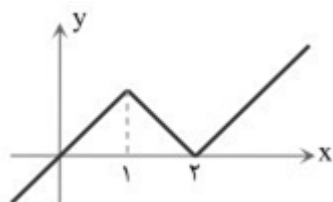
$$-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{sign}(-\sqrt{3}) = -1$$

$$-4 < -\pi < -3 \Rightarrow g(-\pi) = [-\pi] = -4$$

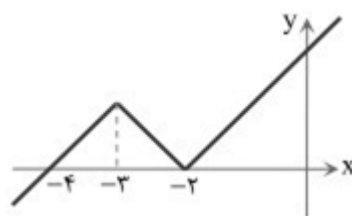
$$\Rightarrow \frac{\pi h(\pi) + 16 f(-\sqrt{3})}{h(\pi) + g(-\pi)} = \frac{\pi(\pi) + 16(-1)}{\pi - 4} = \frac{\pi^2 - 16}{\pi - 4} = \frac{(\cancel{\pi - 4})(\pi + 4)}{(\cancel{\pi - 4})} = \pi + 4$$

۱۸

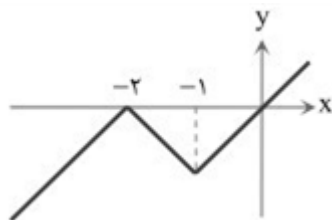
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار هر یک از گزینه‌ها به صورت زیر است:



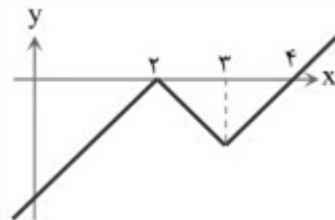
گزینه «۲»:



گزینه «۱»:



گزینه «۴»:



گزینه «۳»:

نمودار تابع $f(2-x)$ در بازه $[0, 2]$ بر نمودار $f(x)$ منطبق است.

۱۹

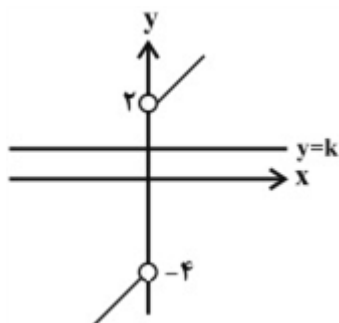
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، $b = 0$ ، پس $OA = k$ از طرفی:

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + k = 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt{2}k \Rightarrow x = +\sqrt{\sqrt{2}k}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{2}k} = k \Rightarrow \sqrt{2}k = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

۲۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم.



$$y = \begin{cases} x - 4 & ; x < 0 \\ x + 2 & ; x > 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که خط $y = k$ با شرط $k \in [-4, 2]$ ، نمودار تابع را قطع نمی‌کند، پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با: $2 - (-4) = 6$.

۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع مینیمم‌دار است، بنابراین $a > 0$ است. از طرفی عرض از مبدأ آن منفی است، در

نتیجه $f(0) = c < 0$ ، همچنین طول رأس آن مثبت است، یعنی $x = \frac{-b}{2a} > 0$

$$\frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$c + b < 0$$

بنابراین $a > 0$ ، $b < 0$ و $c < 0$ و همواره:

۲۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ باشد، داریم:

$$f(1) = a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a$$

$$f(-1) = -a + b \Rightarrow f(f(-1)) = f(-a + b) = a(-a + b) + b$$

$$= -a^2 + ab + b = -8$$

$$\Rightarrow -a^2 + a(2 - a) + 2 - a = -8 \Rightarrow -a^2 + 2a - a^2 + 2 - a = -8$$

$$\Rightarrow 2a^2 - a - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = \frac{5}{2} \end{cases}$$

چون شیب نمودار f منفی است، $a = \frac{5}{2}$ قابل قبول نیست. بنابراین داریم:

$$a = -2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f(x) = -2x + 4 \Rightarrow f(2) = 0$$

۲۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) + f(1) = \frac{2x^2 + x}{3} \xrightarrow{x=1} 2f(1) = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 + x}{3} - \frac{1}{2} \xrightarrow{x=2} f(2) = \frac{2(2)^2 + 2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{21}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این که این رابطه تابع باشد باید:

$$\begin{cases} a^2 = a + 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a + 1)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ یا } 2 \\ b^2 = 2b - 1 \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b - 1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

حال به ازای مقادیر مختلف a و b ، رابطه را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f = \{(2, 1), (3, 1)\} \xrightarrow{\frac{f(2)=1}{f(3)=1}} \frac{f(2) - 2}{f(3) + 1} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow f = \{(2, 4), (3, 1)\} \xrightarrow{\frac{f(2)=4}{f(3)=1}} \frac{f(2) - 2}{f(3) + 1} = \frac{4 - 2}{1 + 1} = 1$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح می‌باشد.

۲۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع ثابت $f(x) = c$ می‌باشد. برای آنکه f تابع ثابتی باشد، باید ضریب عددی x برابر

صفر باشد، یعنی داریم:

$$f(x) = (-1 + 2k)x - 4k \Rightarrow -1 + 2k = 0 \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{k=\frac{1}{2}} f(x) = -4 \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow f(x) = -2 \Rightarrow f(-1) = -2$$

۲۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دامنه تابع $(-1, 2)$ و برد آن $[0, 2]$ است، اشتراک آن‌ها:

$$[-1, 2) \cap [0, 2] = [0, 2)$$

۲۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع $f: \begin{cases} A \rightarrow B \\ f(x) = c \end{cases}$ را که در آن برد تابع، مجموعه‌ی تک‌عضوی $R = \{c\}$ می‌باشد، تابع

ثابت می‌نامیم. با توجه به این تعریف، تابع گزینه‌ی ۳، تابع ثابت است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط گذرنده از مبدأ به صورت $y = mx$ می‌باشد.

$$x^2 - 7x + 4 = mx \Rightarrow x^2 - (7+m)x + 4 = 0 \xrightarrow[\Delta < 0]{\text{معادله نباید جواب داشته باشد}}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (7+m)^2 - 16 < 0 \Rightarrow (m+7)^2 < 16 \Rightarrow -4 < m+7 < 4$$

$$\xrightarrow{-7} -11 < m < -3$$

$$\begin{cases} a = -11 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -14$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً این سهمی رو به پایین می‌باشد، در نتیجه:

ثانیاً این سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس $(0, 0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند و در نتیجه داریم:

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{(0,0)} c = 0 \Rightarrow y = ax^2 + bx$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$

از طرفی طول رأس سهمی منفی است، بنابراین:

$$a + b + c = a + b < 0 \quad \text{در نتیجه } a < 0, b < 0 \text{ و } c = 0 \text{ می‌باشد و داریم:}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$۱) a < 0, b < 0 \Rightarrow ab > 0$$

$$۲) \begin{array}{l} \underbrace{a}_{-} - \underbrace{b}_{+} \begin{cases} \xrightarrow{|a| > |b|} a - b < 0 \\ \xrightarrow{|a| < |b|} a - b > 0 \end{cases} \end{array}$$

$$۴) c = 0 \Rightarrow abc = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 61 \Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 61 \\ a - b = 1 \\ 61 - ab = 41 \Rightarrow ab = 20 \end{cases} \xrightarrow[\substack{a-b=1 \\ ab=20}]{\substack{a-b=1 \\ ab=20}} 1 \times (a^2 + 20 + b^2) = 61$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 41$$

$$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - ab = 41 - 20 = 21$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محل برخورد تابع با محور x ها ۱ و ۳ است. بنابراین معادله‌ی سهمی به صورت زیر است.

$$y = a(x-1)(x-3) \xrightarrow[y=3]{x=0} 3 = a(0-1)(0-3) \Rightarrow a = 1$$

$$y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 3x - 7 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. راه حل اول: نکته: معادله خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد، عبارت است

$$y - y_1 = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{شیب خط}} (x - x_1)$$

از:

با استفاده از نکته، معادله خطی را که از دو نقطه $(2, 5)$ و $(-1, -1)$ می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$m = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x + 1$$

محل تقاطع خط با محور طول‌ها، نقطه‌ای است که مقدار y آن برابر صفر است، پس:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

نکته: هر تابع خطی به فرم $y = ax + b$ است که در آن a و b اعداد حقیقی هستند.

با توجه به نکته، معادله خط را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} f(2) = 5 \Rightarrow 5 = 2a + b \\ f(-1) = -1 \Rightarrow -1 = -a + b \end{cases}$$

$$6 = 3a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1$$

پس معادله خط به صورت $y = 2x + 1$ می‌باشد. ادامه راه حل مشابه است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1} \Rightarrow f(1 - \sqrt{3}) = \frac{(1 - \sqrt{3})^2 - 3}{2(1 - \sqrt{3}) - 1} = \frac{1 + 3 - 2\sqrt{3} - 3}{2 - 2\sqrt{3} - 1} = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}} = 1$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل، برای این‌که در ناحیه‌ی دوم، مثلثی ایجاد شود، باید شیب خط مثبت بوده و از ۲ کوچک‌تر باشد، در غیر

این‌صورت، در ربع دوم مثلثی با محورهای مختصات ایجاد نمی‌شود، پس $0 < m < 2$.

برای محاسبه‌ی مساحت، ابتدا معادله خط گذرنده از $A(1, 2)$ با شیب m را می‌نویسیم.

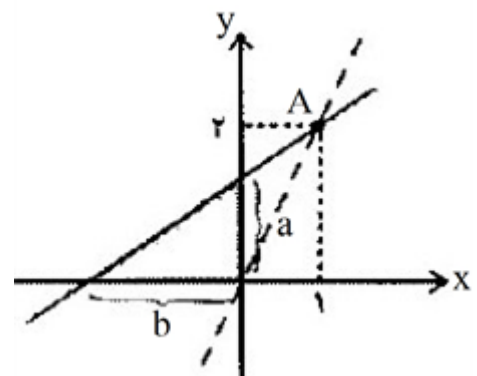
$$y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx + 2 - m$$

برای محاسبه‌ی طول اضلاع a و b داریم: $x = 0 \Rightarrow y = 2 - m \Rightarrow a = 2 - m > 0$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{m - 2}{m} < 0 \Rightarrow b = \frac{2 - m}{m} > 0$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{(2 - m) \times \frac{(2 - m)}{m}}{2} = \frac{(m - 2)^2}{2m}$$

پس مساحت مثلث برابر است با:



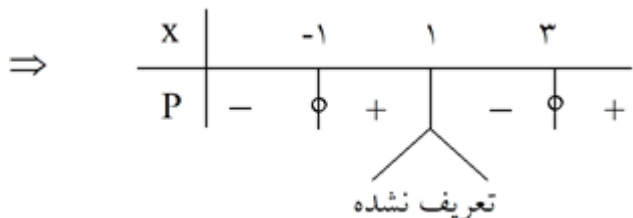
۳۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آن که نمودار تابع به معادله $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ بالاتر از نیمساز ناحیه اول و سوم

که معادله آن به صورت $y = x$ است قرار بگیرد، باید:

$$\frac{x+3}{x-1} > x \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} - x > 0 \Rightarrow \frac{x+3-x(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+2x+3}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{x-1} < 0 \Rightarrow P = \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} < 0$$



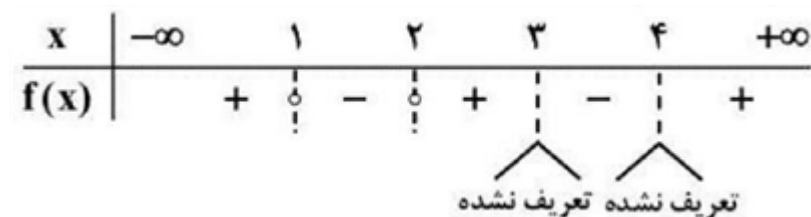
با توجه به جدول بالا اگر بدانیم که در بازه $(-\infty, a)$ نمودار تابع f بالاتر از نیمسازهای ناحیه اول و سوم قرار می‌گیرد، آنگاه بیشترین مقدار a برابر است با (-1) .

۳۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید نامعادله $f(x) < 0$ را حل کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+12} < 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} < 0$$

این عبارت به سادگی تعیین علامت می‌شود:



یعنی مجموعه‌ی جواب نامعادله $f(x) < 0$ برابر است با $(1, 2) \cup (3, 4)$ ، که در بین گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی «۱» زیرمجموعه‌ی آن است.

۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مخرج کسر را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1$$

$$\Rightarrow R_y : (0, 1] \Rightarrow \alpha + \beta = 0 + 1 = 1$$

$$f(x) = \frac{2g(x)}{g(x)-2} = \frac{2(g(x)-2)+4}{g(x)-2} = 2 + \frac{4}{g(x)-2}$$

$$g(x) \leq 0 \Rightarrow g(x)-2 \leq -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{g(x)-2} < 0 \Rightarrow 0 \leq 2 + \frac{4}{g(x)-2} < 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 2$$

برد تابع $f(x)$ ، شامل دو عدد صحیح صفر و یک است.

۳۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای این که رابطه‌ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ یک تابع باشد، نباید دو (یا چند) زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول یکسان در آن رابطه وجود داشته باشند. دقت کنیم اگر در تابعی دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز مساوی باشند تا آن دو زوج مرتب برابر شده و در واقع تبدیل به یک زوج مرتب شوند. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در دو زوج مرتب اول و چهارم، مؤلفه‌های اول یکسان می‌باشند. در نتیجه با برابر قرار دادن مؤلفه‌های دوم آن دو، داریم:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \{(3, 1) \text{ و } (2, 1) \text{ و } (-2, -1) \text{ و } (3, 1) \text{ و } (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع است} \\ m = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \{(3, 4) \text{ و } (2, 1) \text{ و } (-2, 2) \text{ و } (3, 4) \text{ و } (2, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست} \end{cases}$$

$m = 2$ قابل قبول نمی‌باشد چون به ازای آن دو زوج مرتب دوم و پنجم مؤلفه‌های اول یکسان می‌شوند اما مؤلفه‌های دوم برابر نمی‌شوند.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$f(x) = -x^2 - 2x$$

$$f(x-1) = -(x-1)^2 - 2(x-1) = -(x^2 - 2x + 1) - 2x + 2 = -x^2 + 2x - 1 - 2x + 2 = -x^2 + 1$$

$$f(x+1) = -(x+1)^2 - 2(x+1) = -(x^2 + 2x + 1) - 2x - 2 = -x^2 - 2x - 1 - 2x - 2 = -x^2 - 4x - 3$$

$$\Rightarrow f(x-1) - f(x+1) = -x^2 + 1 + x^2 + 4x + 3 = 4x + 4 = 4(x+1)$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

