



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۴/۲۹

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم

تجربی فصل ۳

۱) اگر $a = 2\sqrt{3} - 1$ باشد، حاصل عبارت $\frac{11}{a} - 1$ کدام است؟

۴) $\sqrt{3} + 1$

۳) $2\sqrt{3} + 1$

۲) $\sqrt{3}$

۱) $2\sqrt{3}$

۲) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.
 $5\sqrt{\sqrt[3]{64}} - \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

۳) حاصل $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$ کدام است؟

۴) $2 + 2\sqrt{5} - \sqrt{3}$

۳) $2 + \sqrt{3}$

۲) $2 - \sqrt{3}$

۱) $\sqrt{5} - 2$

۴) اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ مقدار عددی $a = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

۵) حاصل را به دست آورید.
 $1) \sqrt[4]{8} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[2]{256} =$

$2) \sqrt[2]{\sqrt[4]{10^{15}}} \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{10^{12}}} =$

۶) اگر $x = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{27}}{\sqrt[4]{3}}$ و ریشه سوم Ax برابر $\sqrt[4]{2}$ باشد، مقدار A کدام است؟

۴) ۱

۳) $\frac{256}{3}$

۲) $\frac{32}{3}$

۱) $\frac{128}{3}$

۷) اگر $x = 5 + 2\sqrt{6}$ باشد حاصل $\sqrt{10x - x^2}$ کدام است؟

۴) ۱

۳) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

۲) $3 + \sqrt{2}$

۱) $3 - \sqrt{2}$

۸) اگر $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 16$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}$ را به دست آورید.

۹) حاصل عبارت $A = (x - \sqrt[3]{2})^2 (x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})^2$ به ازای $x = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 2}$ کدام است؟

۴) ۲

۳) $\sqrt{2} + 4$

۲) ۴

۱) $\sqrt{2} + 2$

۱۰) اگر $a = \sqrt[4]{3} - \sqrt{5} - 2$ و $b = \sqrt{5} - 2$ و $c = \sqrt{3} - \sqrt{5} - 2$ باشد، حاصل عبارت $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱) اگر $a = \sqrt[4]{14 + 6\sqrt{5}}$ و $b = \sqrt[4]{14 - 6\sqrt{5}}$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{10}$

۱۲) اگر مجموع دو عدد برابر ۶ و حاصل ضرب آن‌ها ۷ باشد، مجموع مکعبات این دو عدد چقدر است؟

- ۱) ۴۵ ۲) $58\sqrt{2}$ ۳) ۹۰ ۴) صفر

۱۳) جواب معادله $\frac{(5-2\sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{6}}}}{(5+2\sqrt{6})^x} = 1$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۴) اگر $A = \sqrt[4]{4}\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[8]{2}\sqrt[9]{9}$ مقدار $(A^2 + 4)^{\frac{1}{2}}$ چه عددی است؟

- ۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{6}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۵) اگر $0 < x < 1$ و $x^2 + 3x - 1 = 0$ حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ چه عددی است؟

- ۱) $10\sqrt{13}$ ۲) $16\sqrt{13}$ ۳) $13\sqrt{13}$ ۴) $12\sqrt{13}$

۱۶) گویا شده $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt[3]{5}+1}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt[3]{25}+1}{124}$ ۳) $\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}{4}$

۱۷) مقدار عبارت $A = \sqrt[3]{\sqrt{32}} \times \sqrt[12]{108} \times \sqrt[4]{9}$ در کدام بازه قرار دارد؟

- ۱) (۱, ۲) ۲) (۲, ۳) ۳) (۳, ۴) ۴) (۴, ۵)

۱۸) حاصل $\sqrt[3]{5}\sqrt{2} + 7 - \sqrt[3]{5}\sqrt{2} - 7$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹) چه تعداد از روابط زیر درست است؟

- الف- اگر $-1 < a < 0$ ، آن‌گاه $a^2 > a^3$ است.
ب- اگر $a < -1$ ، آن‌گاه $a^{20} > a^8$ است.
ج- اگر $a < -1$ ، آن‌گاه $a^{21} > a^9$ است.
د- اگر $a < -1$ ، آن‌گاه $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a}$ است.

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

۲۰ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

۲۱ عبارت $27a^2 - 1$ مضرب کدامیک از عبارتهاست؟

الف) $a - 1$ ب) $3a - 1$ پ) $9a^2 + 3a + 1$ ت) $3a + 1$

۲۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[3]{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{2}{9}} \quad \sqrt{\sqrt{2^5}} = \sqrt[4]{2^5} \quad \sqrt[3]{\sqrt{7^2}} = \sqrt[6]{7^2}$$

$$\sqrt[5]{19} = 19^{\frac{1}{5}} \quad \sqrt[5]{6^4} = 6^{\frac{4}{5}} \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$$

۲۳ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه‌ی چهارم را تعریف کرد. با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم:

$$2^4 = 16 \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow \\ \text{ریشه های چهارم} \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 16 \end{matrix} \quad 5^4 = 625 \Rightarrow \begin{matrix} \nearrow \\ \text{ریشه های چهارم} \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} 5 \\ 625 \end{matrix}$$

$$(-2)^4 = 16 \quad (-5)^4 = 625$$

آیا 16 - ریشه‌ی چهارم دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر 16 شود؟ اکنون عبارت زیر را کامل کنید.

«هر عدد مثبت دارای ریشه‌ی چهارم است که یک‌دیگرند. عددهای منفی ریشه‌ی چهارم ندارند.»

۲۴ اگر $A = 7 + 4\sqrt{3}$ و $B = 7 - 4\sqrt{3}$ باشند، آنگاه حاصل $\sqrt{\sqrt{A} - \sqrt{B}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{12}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۵ در تجزیه‌ی $x^4 + 6x^2 + 8$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x^2 + 8$ ۲) $x^2 - 8$ ۳) $x^2 + 4x + 8$ ۴) $x^2 + 4x + 4$

۲۶ کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^8}$

۳) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5}$ ۴) $\sqrt[3]{0.03} > (0.03)^{\frac{2}{3}}$

۲۷ حاصل عبارت $27x^3 - 27xy^2 + 9x^2 - 15xy + 3x + 5y$ به ازای $x = 0.5$ و $y = 0.4$ چه قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۲۵ ۳) ۸ ۴) صفر

۲۸ تجزیه کنید.

الف) $x^3 + 3x - 4$ ب) $x^3 + 6x^2 + 12x + 7$

۲۹ حاصل عبارت $\frac{3^{0.5} \times 9^{0.25}}{81^{-0.1}}$ کدام است؟

۱) $3^{0.15}$ ۲) $3^{1/4}$ ۳) $3^{0.6}$ ۴) $3^{0.95}$

۳۰ ریشه‌ی پنجم عدد $2/43 \times 10^{-13}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) 3×10^{-2} ۲) 3×10^{-5} ۳) 3×10^{-4} ۴) 3×10^{-6}

جاهای خالی را پر کنید. **۳۱**

$$\begin{aligned}
 ۱) & (\dots - \dots)(^۴a^۷ + ^۶ab + ^۹b^۷) = \dots - \dots \\
 ۲) & (^۳x - ۵y)(\dots + \dots + \dots) = ۲۷x^۷ - ۱۲۵y^۷ \\
 ۳) & (۱۰x + \dots)(۱۰۰x^۷ - \dots + ۴) = \dots + \dots \\
 ۴) & (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots) = \sqrt[۴]{۸} - \sqrt[۲]{۲۷}
 \end{aligned}$$

در دایره علامت < یا > یا = قرار دهید. **۳۲**

$$\begin{aligned}
 \text{الف)} & \left(\frac{۱}{۱۲۸}\right)^{-۴} \bigcirc \left(\frac{۱}{۸}\right)^{-۹} \\
 \text{ب)} & (۳۲۴^۲)^{\frac{۲}{۳}} \bigcirc (\sqrt[۳]{۱۶۲})^۲ \\
 \text{ج)} & \left(\frac{۴}{۷}\right)^{\frac{۷}{۴}} \bigcirc \left(\frac{۷}{۴}\right)^{\frac{۴}{۷}}
 \end{aligned}$$

با فرض $x = ۲ + \sqrt{۳}$ ، حاصل $x + \frac{۱}{x}$ کدام است؟ **۳۳**

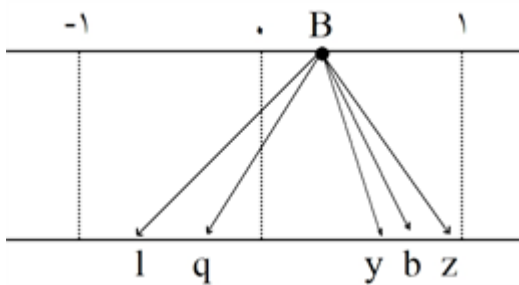
$۴\sqrt{۳}$ **۴**

۴ **۳**

۲ **۲**

$۲ - \sqrt{۳}$ **۱**

در شکل مقابل پاره‌خط‌ها نشانگر ریشه دوم و سوم و چهارم هستند. کدام پاره‌خط بیان‌گر ریشه سوم و دوم عدد B است؟ **۳۴**



Bq , Bb **۴**

By , Bz **۳**

Bb , Bz **۲**

Bl , Bb **۱**

مقدار عبارت $۱۰^۲ + ۱۰ \times ۱۱ + ۲ \times ۱۱^۲ + ۱۱ \times ۱۲ + ۱۲^۲ - ۱۲^۳$ کدام است؟ **۳۵**

-۱۳۳۱ **۴**

۱۳۳۱ **۳**

-۱۰۰۰ **۲**

۱۰۰۰ **۱**

اگر $x = \sqrt[۲]{(\sqrt[۳]{۳})^۲}$ باشد، حاصل $\frac{\sqrt[۵]{x^۷} \times \sqrt{x}}{x^۳}$ کدام است؟ **۳۶**

$۳^{\frac{۲۲}{۲۱}}$ **۴**

$۳^{-\frac{۲۱}{۲۲}}$ **۳**

$۳^{\frac{۲۱}{۲۲}}$ **۲**

$۳^{-\frac{۲۲}{۲۱}}$ **۱**

حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۳]{\sqrt{۶} + ۲} \times \sqrt[۴]{۱۰ - ۴\sqrt{۶}}}{\sqrt[۵]{۲}\sqrt[۳]{۴}}$ کدام است؟ **۳۷**

$\sqrt[۱۵]{۲}$ **۴**

$\sqrt[۶]{۲}$ **۳**

$\sqrt[۲]{۲}$ **۲**

۱ **۱**

۳۸ حاصل عبارت $\sqrt{2(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta)}$ برابر کدام گزینه است؟ (θ زاویه ی حاده است).

۱ $2 \sin \theta + 2 \cos \theta$ ۲ $\sqrt{2}(\sin \theta + \cos \theta)$

۳ $1 + \sin \theta \cos \theta$ ۴ $1 + \sin \theta + \cos \theta$

۳۹ مخرج کسر را گویا کنید. $\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}}$

۴۰ حاصل عبارت $A = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{2})^{x^2 - 2x}}{(\sqrt{2} - 1)^{2x - 1}}}$ به ازای $x = 1 + \sqrt{2}$ کدام است؟

۱ ۱ $1 + \sqrt{2}$ ۲ $\sqrt{2} - 1$ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ $2\sqrt{2}$

۴۱ اگر $x = 4$ باشد، حاصل $\sqrt{(-x)^2} + \sqrt[4]{(1 - x)^4}$ کدام است؟

۱ ۹ ۲ -۹ ۳ ۷ ۴ -۷

۴۲ دو جمله ی اول یک دنباله هندسی $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ و $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۴۳ ساده کنید: $\sqrt[5]{32(x - y)^{10}}$

۴۴ چند جمله ای مقابل را تجزیه کنید: $x^2 + x^2 - 4x - 4$

۴۵ حاصل عبارت مقابل را با استفاده از اتحادها بنویسید: $\left(x^8 - \frac{1}{3}\right)^2$

۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{11}{a} - 1 = \frac{11}{2\sqrt{3} - 1} - 1 = \frac{11(2\sqrt{3} + 1)}{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} - 1 = \frac{11(2\sqrt{3} + 1)}{11} - 1 = 2\sqrt{3} + 1 - 1 = 2\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{\sqrt[3]{64}} - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{4} - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10 - \sqrt[2]{\frac{1}{8}} = 10 - 2 = 8$$

۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 9 + 4\sqrt{5} &= 9 + 2\sqrt{20} = (\sqrt{4} + \sqrt{5})^2 = (2 + \sqrt{5})^2 \\ \Rightarrow \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} &= |2 + \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} \\ 8 - 2\sqrt{15} &= (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

پس حاصل نهایی برابر است با:

$$2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$$

$$a^x = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = x + \frac{1}{x} + 2 = 4 + 2 = 6 \xrightarrow{a>1} a = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} 1) & \sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[2]{256} = 2^{\frac{3}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{8}{2}} = 2^{\frac{15+16+40}{10}} = 2^{\frac{71}{10}} = \sqrt[10]{2^{71}} \\ 2) & \sqrt[3]{\sqrt[4]{10^{15}}} \times \sqrt[5]{\sqrt[3]{10^{12}}} = 10^{\frac{15}{12}} \times 10^{\frac{12}{15}} = 10^{\frac{18}{12}} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} \end{aligned}$$

۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = \frac{\sqrt{3 \times 3^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3$$

$$\sqrt[3]{Ax} = \sqrt[3]{3A} = 4\sqrt[3]{2} \xrightarrow{\text{توان 3}} 3A = 64 \times 2 \Rightarrow A = \frac{128}{3}$$

۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \\ 10 - x &= 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \\ \sqrt{10 - x - x^2} &= \sqrt{x(10 - x)} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{(3 - 2)^2} = 1 \end{aligned}$$

۸ تساوی $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 16$ را در مزدوج عبارت رابکالی یعنی $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7}) &= 16(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}) \\ \Rightarrow x+1 - x+7 &= 16(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}) \Rightarrow 8 = 16(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}) \\ \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} &= \frac{8}{16} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹

$$A = ((x - \sqrt[3]{2})(x^3 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}))^3 = (x^3 - 2)^3 \xrightarrow{x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} + 2}} \\ A = (\sqrt[3]{2} + 2 - 2)^3 = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰

توجه شود که حاصل جمع مقادیر a و b و c برابر صفر است یعنی داریم:

$$a + b + c = (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - 2) + (\sqrt{3} - \sqrt{5} - 2) = 0$$

از طرفی می‌دانیم طبق اتحاد مربع مجموع سه جمله داریم:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab + 3bc + 3ac \\ \Rightarrow 0^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + ac + bc) \\ \Rightarrow -3(ab + ac + bc) = a^3 + b^3 + c^3 \Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + ac + bc} = -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا توجه کنید که $a = \sqrt[3]{9 + 5 + 2 \times 3 \sqrt{5}} = \sqrt[3]{(3 + \sqrt{5})^3} = 3 + \sqrt{5}$ و به همین ترتیب $b = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ است. ۱۱

$$ab = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{a + \frac{2}{a}}{a - \frac{2}{a}} = \frac{a^2 + 2}{a^2 - 2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲

روش اول:

$$a + b = 6 \xrightarrow{\text{توان ۳}} a^3 + b^3 + 3ab = 36 \xrightarrow{ab=7} a^3 + b^3 = 36 - 21 = 15 \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 6(22 - 7) = 6 \times 15 = 90$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ ab = 7 \end{cases} \Rightarrow b = 6 - a \Rightarrow a(6 - a) = 7 \Rightarrow 6a - a^2 = 7 \Rightarrow a^2 - 6a + 7 = 0 \\ \Rightarrow \Delta = 36 - 4 \times 7 = 8 \Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow b = 3 - \sqrt{2} \\ a = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow b = 3 + \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین دو عدد مطلوب $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ اند و داریم:

$$\begin{cases} (3 - \sqrt{2})^3 = 27 - 3 \times 9\sqrt{2} + 3 \times 2 \times 2 - 2\sqrt{2} = 45 - 29\sqrt{2} \\ (3 + \sqrt{2})^3 = 27 + 3 \times 9\sqrt{2} + 3 \times 2 \times 2 + 2\sqrt{2} = 45 + 29\sqrt{2} \end{cases} \\ \Rightarrow (3 - \sqrt{2})^3 + (3 + \sqrt{2})^3 = 90$$

روش سوم:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 6^3 - 3(7)(6) = 216 - 126 = 90$$

۱۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

عبارت را در $\frac{(5-2\sqrt{6})^x}{(5-2\sqrt{6})^x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{(5-2\sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(5+2\sqrt{6})^x} \times \frac{(5-2\sqrt{6})^x}{(5-2\sqrt{6})^x} = \frac{(5-2\sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{3}}+x}}{(25-24)^x} = 1 \Rightarrow (5-2\sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{3}}+x} = 1$$

از طرفی می‌دانیم هر عددی (به غیر از صفر) به توان صفر، برابر یک است، پس داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: $\sqrt[n]{a^m/b} = \sqrt[n]{a^m/b}$

$$A = \sqrt[5]{2^6 \times 3^2} \sqrt[5]{2^3 \times 3^2} = \sqrt[5]{2^{15} \times 3^4} = 2^{\frac{3}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}}$$

$$A^2 = 2^{\frac{6}{5}} \times 3^{\frac{8}{5}} \Rightarrow A^2 = 96 \Rightarrow (A^2 + 4)^{\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{2}} = 10$$

۱۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - 1 = -3x \Rightarrow x - \frac{1}{x} = -3, 0 < x < 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9 = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{13}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{13})^2 - 2(\sqrt{13}) = 10\sqrt{13}$$

۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{25} + \sqrt{5} + 1}{\sqrt{25} + \sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{25} + \sqrt{5} + 1}{5-1} = \frac{\sqrt{25} + \sqrt{5} + 1}{4}$$

۱۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{32} \times \sqrt[4]{108} \times \sqrt[5]{9}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[3]{2^2 \times 3^3} \times \sqrt[3]{3^2}$$

$$A = 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow A = 2 \times 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow A = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{12}$$

$$\sqrt{9} < \sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{16} \Rightarrow 3 < A < 4$$

$$\begin{cases} A = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} \\ B = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} \end{cases} \Rightarrow A - B = C \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (A - B)^3 = C^3$$

$$\Rightarrow A^3 - B^3 - 3AB(A - B) = C^3$$

$$\Rightarrow (5\sqrt{2} + 7) - (5\sqrt{2} - 7) - 3(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)(C) = C^3$$

$$\Rightarrow 14 - 3(1)(C) = C^3 \Rightarrow C^3 + 3C = 14 \quad (*)$$

پیدا کردن مقدار C از معادله (*) به دو روش زیر ممکن است:

$C = 2$: آزمایش گزینه‌ها در معادله

$$C^3 + 3C - 14 = 0 \Rightarrow C^3 + 3C - 8 - 6 = 0 \Rightarrow C^3 - 8 + 3C - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (C - 2)(C^2 + 2C + 4) + 3(C - 2) = 0 \Rightarrow (C - 2)(C^2 + 2C + 4 + 3) = 0$$

$$\Rightarrow (C - 2)(C^2 + 2C + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ C^2 + 2C + 7 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی موارد: ۱۹

مورد «الف»: نادرست

$$-1 < a < 0 \Rightarrow \underbrace{a^3}_{\text{مثبت}} < \underbrace{a^2}_{\text{منفی}}$$

مورد «ب»: درست - با افزایش توان، عبارت بزرگ تر می‌شود چون هر دو طرف توان زوج دارند.

$$a < -1 \Rightarrow \underbrace{a^3}_{+} > \underbrace{a^2}_{+}$$

مورد «ج»: نادرست - با افزایش عدد کوچک‌تر می‌شود. (دقت کنید توان فرد است.)

$$a < -1 \Rightarrow \underbrace{a^3}_{-} < \underbrace{a^2}_{-}$$

مورد «د»: درست - اگر $a < -1$ هر چه فرجه بزرگ‌تر شود، حاصل رادیکال بزرگ‌تر می‌شود.

$$a < -1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

۲۰

بنابراین به ازای ۱ و ۱ تعریف نمی‌شود.

$$(3a - 1)(9a^2 + 3a + 1) \text{ یعنی: } - \text{ لاغر} - \text{ یعنی: } (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$$

هر دو گزینه‌ی ب و پ صحیح هستند.

نکته: عبارت $\sqrt[3]{a+b}$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

$$\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[5]{19} = 19^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}}$$

۲۲

خیر - خیر ۲۳

«هر عدد مثبت دارای دو ریشه‌ی چهارم است که قرینه‌ی یکدیگرند. عددهای منفی ریشه‌ی چهارم ندارند.»

صفر فقط یک ریشه‌ی چهارم دارد و آن هم خود صفر می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۴

$$A = ۲ + ۴\sqrt{۳} = (۲ + \sqrt{۳})^۲ \Rightarrow \sqrt{A} = ۲ + \sqrt{۳}$$

$$B = ۲ - ۴\sqrt{۳} = (۲ - \sqrt{۳})^۲ \Rightarrow \sqrt{B} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\sqrt{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \sqrt{۲ + \sqrt{۳} - (۲ - \sqrt{۳})} = \sqrt{۲\sqrt{۳}} = \sqrt{\sqrt{۱۲}} = \sqrt[۴]{۱۲}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک رابطه‌ی $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$ داریم: ۲۵

$$x^۴ + ۶۴ = (x^۲ + ۸)^۲ - ۱۶x^۲ = (x^۲ + ۸)^۲ - (۴x)^۲$$

$$x^۴ + ۶۴ = (x^۲ + ۸ - ۴x)(x^۲ + ۸ + ۴x)$$

حال از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ درست‌اند، زیرا: ۲۶

گزینه ۱: $\sqrt{\sqrt[۴]{۲}} = \sqrt[۴ \times ۲]{۲} = \sqrt[۸]{۲}$

گزینه ۲: $\sqrt[۴]{۳} \times \sqrt[۵]{۳} = ۳^{\frac{1}{۴}} \times ۳^{\frac{1}{۵}} = ۳^{\frac{1}{۴} + \frac{1}{۵}} = ۳^{\frac{9}{۲۰}} = \sqrt[۲۰]{۳^9}$

گزینه ۴: $۰ < ۰/۰.۳ < ۱ \Rightarrow \sqrt[۴]{۰/۰.۳} > (۰/۰.۳)^{\frac{۳}{۴}}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$(۳x + ۵y)(۹x^۲ - ۱۵xy + ۲۵y^۲) - ۲۷x^۳ = ۲۷x^۳ + ۱۲۵y^۳ - ۲۷x^۳ = ۱۲۵y^۳$$

$$= ۱۲۵\left(\frac{۲}{۵}\right)^۳ = ۱۲۵ \times \frac{۸}{۱۲۵} = ۸$$

الف) $x^۳ + ۳x - ۴ = x^۳ - ۱ + ۳x - ۳ = (x - ۱)(x^۲ + x + ۱) + ۳(x - ۱)$

$= (x - ۱)(x^۲ + x + ۴)$

ب) $\underbrace{x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۸ - ۱}_{\text{اتحاد مکعب دو جمله ای}} = (x + ۲)^۳ - ۱ = (x + ۲ - ۱)((x + ۲)^۲ + (x + ۲) + ۱)$

اتحاد مکعب دو جمله ای

$$= (x + ۱)(x^۲ + ۴x + ۴ + x + ۲ + ۱) = (x + ۱)(x^۲ + ۵x + ۷)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$\frac{۳^{۰/۰.۵} \times ۹^{۰/۲.۵}}{۸^{۱-۰/۱}} = \frac{۳^{۰/۰.۵} \times (۳^۲)^{۰/۲.۵}}{(۳^۴)^{-۰/۱}} = \frac{۳^{۰/۰.۵} \times ۳^{۰/۰.۵}}{۳^{-۰/۴}} = ۳^{۰/۰.۵ + ۰/۰.۵ - (-۰/۴)}$$

$$= ۳^{۰/۰.۵ + ۰/۰.۵ + ۰/۴} = ۳^{۰/۹.۵}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۰

$$۲/۴۳ \times ۱۰^{-۱۳} = ۲۴۳ \times ۱۰^{-۱۵} = ۳^۵ \times (۱۰^{-۳})^۵ \Rightarrow \sqrt[۵]{۳^۵ \times (۱۰^{-۳})^۵} = ۳ \times ۱۰^{-۳}$$

۱) $(۲a - ۳b)(۴a^۲ + ۶ab + ۹b^۲) = ۸a^۳ - ۲۷b^۳$

۲) $(۳x - ۵y)(۹x^۲ + ۱۵xy + ۲۵y^۲) = ۲۷x^۳ - ۱۲۵y^۳$

۳) $(۱۰x + ۲)(۱۰۰x^۲ - ۲۰x + ۴) = ۱۰۰۰x^۳ + ۸$

۴) $(\sqrt[۴]{۲} - \sqrt{۳})(\sqrt{۲} + \sqrt[۴]{۱۸} + ۳) = \sqrt[۴]{۸} - \sqrt{۲۷}$

۳۱

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{128}\right)^{-4} &= (2^{-7})^{-4} = 2^{28} \\ \left(\frac{1}{8}\right)^{-9} &= (2^{-3})^{-9} = 2^{27} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{128}\right)^{-4} > \left(\frac{1}{8}\right)^{-9}$$

(ب)

$$324 = 18^2 \Rightarrow (324)^{\frac{2}{3}} = (18^2)^{\frac{2}{3}} = 18^{\frac{4}{3}} = 18^{\frac{2}{3}} \times 18^{\frac{2}{3}}$$

$$162 = 9 \times 18 \Rightarrow (\sqrt{162})^2 = 18^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow ((324)^2)^{\frac{2}{3}} > (\sqrt{162})^2$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{به توان ۲۸}} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{49}{3}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{16}{3}}$$

(ج) ابتدا هر دو را به توان ۲۸ می‌رسانیم $\Leftarrow$

چون مخرج مشترک $\frac{4}{3}$ و $\frac{5}{3}$ که توان‌ها هستند، ۲۸ می‌باشد، اعداد به دست آمده یعنی $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{49}{3}}$ و $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{16}{3}}$ را با هم

مقایسه می‌کنیم. چون $1 < \frac{4}{5} < 0$ به توان عدد صحیح رسیده است، حاصل بسیار کوچک می‌شود ولی چون $\frac{5}{4}$ از یک

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

بزرگ‌تر است و به توان صحیح رسیده است، از یک بزرگ‌تر می‌شود. پس $\Leftarrow$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $x = 2 + \sqrt{3}$ ، آنگاه $x + \frac{1}{x}$ برابر می‌شود با:

$$2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

اگر مخرج کسر $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ را گویا کنیم، داریم:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

یعنی عبارت مورد نظر برابر است با:

$$2 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. B عددی بین ۱ و ۰ است و هر چه به فرجه مرتبه بزرگ‌تری برسد به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

میدانیم B دو ریشه چهارم و دو ریشه دوم دارد که قرینه یکدیگرند و هر کدام فرجه بیش‌تری داشته باشد به ۱- نزدیک می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & (10^2 + 10 \times 11 + 11^2) + (11^2 + 11 \times 12 + 12^2) - 12^2 \\ &= (11 - 10)(10^2 + 10 \times 11 + 11^2) + (12 - 11)(11^2 + 11 \times 12 + 12^2) - 12^2 \\ &= 11^3 - 10^3 + 12^3 - 11^3 - 12^2 = -10^3 = -1000 \end{aligned}$$

۳۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = \sqrt[r]{(\sqrt[r]{r})^{\frac{r}{r}}} = \sqrt[r]{\sqrt[r]{r^{\frac{r}{r}}}} = \sqrt[r]{r^{\frac{r}{r}}} = r^{\frac{r}{r}} = r^1 = r$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt[r]{x^r} &= \sqrt[r]{\left(r^{\frac{r}{r}}\right)^r} = \sqrt[r]{r^{\frac{r \times r}{r}}} = \sqrt[r]{r^{\frac{r^2}{r}}} = \sqrt[r]{r^r} = r^{\frac{r}{r} \times \frac{1}{r}} = r^{\frac{r}{r^2}} = r^{\frac{1}{r}} \\ \sqrt{x} &= \sqrt{r^{\frac{r}{r}}} = r^{\frac{r}{r} \times \frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} \\ x^r &= \left(r^{\frac{r}{r}}\right)^r = r^{\frac{r \times r}{r}} = r^{\frac{r^2}{r}} \\ \Rightarrow \text{حاصل} &= \frac{r^{\frac{r}{r}} \times r^{\frac{1}{r}}}{r^{\frac{r}{r}}} = \frac{r^{\frac{r+1}{r}}}{r^{\frac{r}{r}}} = \frac{r^{\frac{r+1}{r}}}{r^1} = r^{\frac{r+1}{r} - 1} = r^{\frac{r+1-r}{r}} = r^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \right.$$

۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{نکته: } \sqrt[a]{\sqrt[b]{c}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{c}}$$

$$\frac{\sqrt[r]{\sqrt[r]{r} + 2} \times \sqrt[r]{10 - 4\sqrt[r]{r}}}{\sqrt[r]{2\sqrt[r]{r}}} = \frac{\sqrt[r]{\sqrt{(\sqrt[r]{r} + 2)} \times \sqrt[r]{10 - 4\sqrt[r]{r}}}}{\sqrt[r]{2\sqrt[r]{r}}}$$

$$= \frac{\sqrt[r]{10 + 4\sqrt[r]{r}} \times \sqrt[r]{10 - 4\sqrt[r]{r}}}{\sqrt[r]{2\sqrt[r]{r}}} = \frac{\sqrt[r]{(10 + 4\sqrt[r]{r})(10 - 4\sqrt[r]{r})}}{\sqrt[r]{2\sqrt[r]{r}}} = \frac{\sqrt[r]{100 - 16 \times r}}{\sqrt[r]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[r]{r}}{\sqrt[r]{2}} = \frac{\sqrt[r]{r}}{\sqrt[r]{2}} = 1$$

۳۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{r(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta)} = \sqrt{r + r \sin \theta + r \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + r \sin \theta + r \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta}$$

$$\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 + r \sin \theta + r \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{(1 + \sin \theta + \cos \theta)^2}$$

$$= \underbrace{|1 + \sin \theta + \cos \theta|}_{\oplus} = 1 + \sin \theta + \cos \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt[r]{ra^r}} \times \frac{\sqrt[r]{ra}}{\sqrt[r]{ra}} = \frac{\sqrt[r]{ra}}{ra} \text{ (○/Δ)}$$

۳۹

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(\sqrt{r} - 1) \times \frac{\sqrt{r} + 1}{\sqrt{r} + 1} = \frac{1}{\sqrt{r} + 1} \Rightarrow A = ((1 + \sqrt{r})^{x^r - rx^r} (1 + \sqrt{r})^{rx^{r-1}})^{\frac{1}{r}}$$

$$= ((1 + \sqrt{r})^{x^r - rx^r + rx^{r-1}})^{\frac{1}{r}} \Rightarrow A = ((1 + \sqrt{r})^{(x-1)^r})^{\frac{1}{r}}$$

$$\xrightarrow{x=1+\sqrt{r}} ((1 + \sqrt{r})^r)^{\frac{1}{r}} = 1 + \sqrt{r}$$

۴۰

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۴۱

$$\sqrt{(-x)^r} = |-x|, \sqrt{(1-x)^r} = |1-x|$$

$$x = r \Rightarrow |-x| + |1-x| = |-r| + |1-r| = r + r = 2r$$

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{3 - 2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

۴۲

$$\sqrt[5]{3^2(x-y)^{10}} = \sqrt[5]{2^5(x-y)^{10}} = \sqrt[5]{(2(x-y)^2)^5} = 2(x-y)^2$$

۴۳

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ &= (x^3 + x^2) + (-4x - 4) = \underset{\text{دسته بندی}}{x^2(x+1)} - \underset{\text{فاکتورگیری}}{4(x+1)} = \underset{\text{فاکتورگیری}}{(x+1)(x^2-4)} = \underset{\text{اتحاد مزدوج}}{(x+1)(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

۴۴

$$\begin{aligned} \left(\wedge_{\mathbf{X}} - \frac{1}{3} \right)^2 &= (\wedge_{\mathbf{X}})^2 - 2(\wedge_{\mathbf{X}}) \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \\ &= 6\wedge_{\mathbf{X}}^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

۴۵

1	1	2	3	4
3	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
40	1	2	3	4
41	1	2	3	4

