



زمان آزمون :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

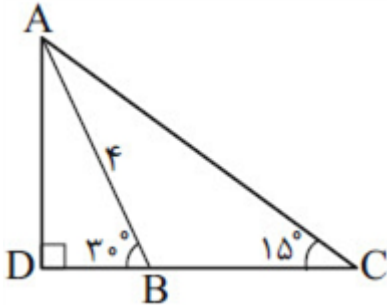
نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۴/۲۹

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم

تجربی فصل دوم مثلثات

۱ با توجه به شکل مقابل $\tan 15^\circ$ کدام است؟



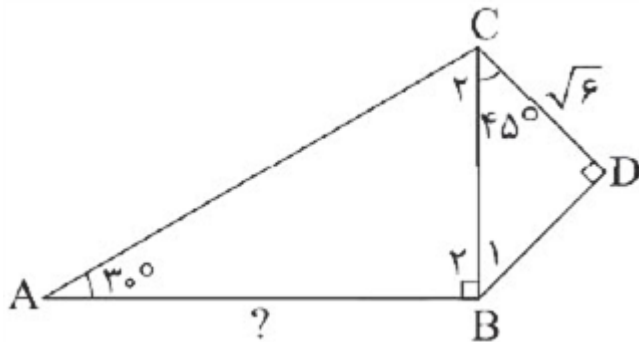
$\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ (۴)

$\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ (۳)

$4 + 2\sqrt{3}$ (۲)

$4 - 2\sqrt{3}$ (۱)

۲ در شکل مقابل، $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. اگر $\widehat{C}_1 = 45^\circ$ ، $\widehat{A} = 30^\circ$ و $CD = \sqrt{6}$ ، طول AB کدام است؟



۹ (۴)

۶ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

۳ در مثلث ABC داریم: $\widehat{B} = 90^\circ$ و $\widehat{C} = 30^\circ$. اگر $M = \frac{2 \sin \widehat{A} - 3 \cos \widehat{C}}{\sqrt{3} \cos \widehat{A} + 2\sqrt{3} \sin \widehat{C}}$ ، آنگاه تمام حدود تغییرات M کدام است؟

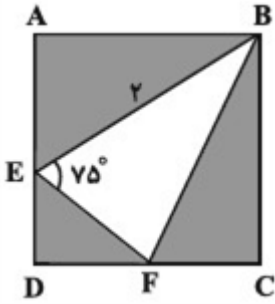
$-\frac{\sqrt{3}}{3} < M < 0$ (۴)

$-\frac{1}{3} < M < 0$ (۳)

$0 < M < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$M < -\frac{1}{3}$ (۱)

- ۴) چهارضلعی ABCD یک مربع است. اگر $AE = FC$ باشد، مساحت قسمت سایه‌خورده کدام است؟
 ($\widehat{BEF} = 75^\circ$, $BE = 2$)



- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

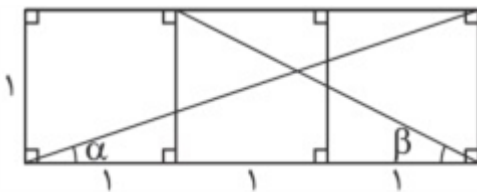
- ۵) خط $2x + 3y = 2$ با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی α می‌سازد. حاصل $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\tan \alpha}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{7\sqrt{5}}{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$

- ۶) اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ و $\tan \alpha \times \sin \alpha > 0$ باشد، آنگاه α در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- ۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

- ۷) با توجه به شکل مقابل، حاصل عبارت $\tan \hat{\alpha} + \tan \hat{\beta}$ کدام گزینه است؟



- ۱) ۱ ۲) ۵ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

- ۸) اگر خط گذرنده از دو نقطه $A(m, -1)$ و $B(\sqrt{3} + m, m)$ با جهت مثبت محور x ها زاویه 30° بسازد، سینوس زاویه خط گذرا از نقاط A و $C(2, 0)$ با محور x ها چقدر است؟

- ۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

- ۹) اگر x زاویه‌ای در ناحیه اول باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \sqrt{|\sin x - \sin^2 x| + |1 - \sqrt{\sin x}| - |\sqrt{\sin x} - \sin^2 x|}$$

۱) $\sqrt{\sin x} - 1$ ۲) $1 - \sqrt{\sin x}$ ۳) $\sin x - 1$ ۴) $1 - \sin x$

- ۱۰) در یک متوازی‌الاضلاع اندازه‌ی یک ضلع و یک قطر ۶ و $6\sqrt{3}$ و زاویه‌ی بین آنها 60° است. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- ۱) ۵۴ ۲) ۲۷ ۳) ۳۶ ۴) ۱۸

- ۱۱) اگر $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{25}$ باشد، حاصل عبارت $P = \sin^2 x - |\cos x|$ کدام است؟

- ۱) $-0/44$ ۲) $0/44$ ۳) $0/56$ ۴) $-0/56$

۱۲ اگر $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2 - \sin^2 x} = \frac{2}{4}$ باشد، $\frac{1 + \sin^2 x}{2 - \sin^2 x}$ کدام است؟

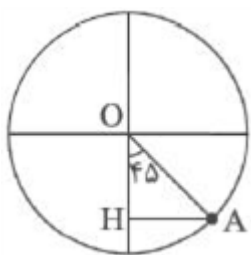
۱۱ $\frac{11}{16}$ (۴)

۵ $\frac{5}{8}$ (۳)

۹ $\frac{9}{16}$ (۲)

۲ $\frac{2}{4}$ (۱)

۱۳ اگر نقطه $A(3a-b, 5a-7b)$ روی دایره مثلثاتی شکل زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟



$40a^2 = 5$ (۴)

$8a^2 = 40$ (۳)

$5a^2 = 40$ (۲)

$40a^2 = 8$ (۱)

۱۴ اگر $\sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{5}$ باشد حاصل عبارت $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

$0/8$ (۴)

$0/4$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

۱۵ اگر $\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$ و $\cot \alpha = \sqrt{\frac{m}{n} - 1}$ باشد، رابطه بین m و n همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند).

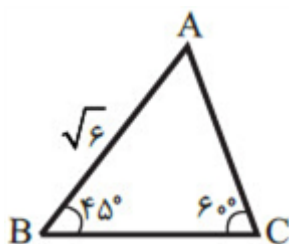
$n = m^2$ (۴)

$n = m^2$ (۳)

$m = n^2$ (۲)

$m = n^2$ (۱)

۱۶ در شکل مقابل، طول ضلع AC کدام است؟



$2\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۱۷ اگر $\begin{cases} 2 \sin x + \sin x \cos x > 2 \tan x + \sin x \\ \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} > 0 \end{cases}$ باشد، x در کدام ناحیه ی مثلثاتی قرار دارد؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۱۸ حاصل $\frac{1 + 3 \tan 60^\circ - 2 \sin 30^\circ + \cot 30^\circ}{2 \cos^2 45^\circ - \sin 60^\circ - \sin 90^\circ}$ کدام است؟

$\frac{-8\sqrt{3}}{3}$ (۴)

-۸ (۳)

۸ (۲)

$\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (۱)

۱۹ نقطه ی $P\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ روی دایره ی مثلثاتی را 180° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم، نقطه ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

-120° (۴)

135° (۳)

240° (۲)

-240° (۱)

۲۰ اگر $\text{tg } \theta < \sin \theta < \cos \theta$ باشد، انتهای کمان زاویه‌ی θ در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی واقع است؟

۴ چهارم

۳ سوم

۲ دوم

۱ اول

۲۱ مقدار کسر $A = \frac{\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ}{1 - 2 \sin 430^\circ + \frac{\cos 230^\circ}{2}}$ کدام است؟

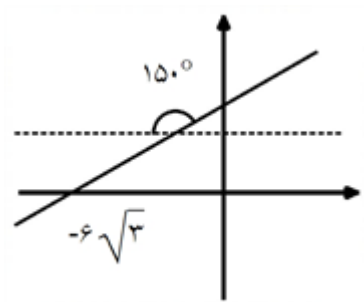
۴ $\frac{1}{2}$

۳ $\frac{16}{25}$

۲ ۱

۱ $\frac{5}{4}$

۲۲ معادله خط d کدام است؟



۴ $3y - \sqrt{3}x = 6$

۳ $3y - \sqrt{3}x = 18$

۲ $\sqrt{3}y - 3x = 6$

۱ $\sqrt{3}y - 3x = 18$

۲۳ مقدار A برابر کدام گزینه است؟ $A = \text{tg } 45^\circ + 4 \sin 30^\circ$

۴ ۵

۳ $1 + 2\sqrt{3}$

۲ $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3}$

۱ ۳

۲۴ اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $A = \text{tg } x + \text{Cotg } x$ کدام است؟

۴ $\frac{2}{3}$

۳ $\frac{4}{3}$

۲ $\frac{8}{3}$

۱ ۱

۲۵ اگر $\sin \theta - \cos \theta = \frac{6}{5}$ باشد، $(\theta > 135^\circ)$ حاصل $\sin \theta + \cos \theta$ کدام است؟

۴ $-\frac{\sqrt{14}}{5}$

۳ $\frac{\sqrt{14}}{5}$

۲ $-\frac{4}{5}$

۱ $\frac{4}{5}$

۲۶ در کدام یک از محدوده‌های زیر $\text{tg } \theta > \text{Cotg } \theta$ است؟

۴ $190^\circ < \theta < 200^\circ$

۳ $150^\circ < \theta < 180^\circ$

۲ $95^\circ < \theta < 120^\circ$

۱ $0^\circ < \theta < 45^\circ$

۲۷ اگر α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ، آن‌گاه حاصل $\text{tg } \alpha - \text{Cotg } \alpha$ کدام است؟

۴ $\frac{25}{12}$

۳ $-\frac{25}{12}$

۲ $\frac{7}{12}$

۱ $-\frac{7}{12}$

۲۸ اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

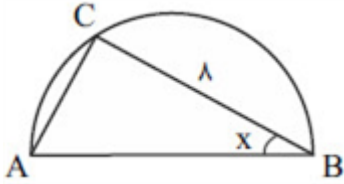
۴ $\frac{17}{81}$

۳ $\frac{17}{27}$

۲ $\frac{13}{81}$

۱ $\frac{13}{27}$

۲۹ در شکل زیر که یک نیم‌دایره به شعاع ۵ سانتی‌متر است، $\tan x$ کدام است؟



۰/۷۵ (۴)

۰/۵ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۸ (۱)

۳۰ اگر $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha = 4$ باشد، حاصل $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{Cotg}^2 \alpha$ کدام است؟ (با فرض آن‌که $\operatorname{tg} \alpha$ و $\operatorname{Cotg} \alpha$ تعریف شده باشند).

۶۰ (۴)

۷۶ (۳)

۵۲ (۲)

۶۴ (۱)

۳۱ کدام نامساوی درست نیست؟

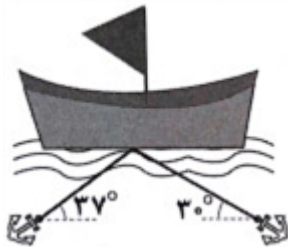
$\cos 38^\circ < \cos 1^\circ$ (۲)

$\cos 17^\circ < \cos 11^\circ$ (۱)

$\sin 29^\circ < \sin 35^\circ$ (۴)

$\sin 215^\circ < \sin 245^\circ$ (۳)

۳۲ مطابق شکل، یک قایق توسط دو لنگر روی سطح آب رودخانه نگه داشته شده است. اگر طول طناب کوتاه‌تر ۱۰ متر باشد طول طناب بزرگ‌تر چند متر است؟ ($\cos 37^\circ = 0/8$)



۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۱۴ (۱)

۳۳ اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tan x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۳۴ اگر $\frac{5}{3} - \cos \alpha = 1$ و $\tan \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ باشد، آنگاه کمان α در کدام ربع دایره مثلثاتی است؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۳۵ حاصل عبارت $\sin^4 x - \cos^4 x + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ کدام است؟

$-\cos^2 x$ (۴)

$-\sin^2 x$ (۳)

$\sin^2 x$ (۲)

$\cos^2 x$ (۱)

۳۶ مساحت مستطیل ABCD برابر ۱۶ می‌باشد. اگر زاویه حاده بین دو قطر برابر 30° باشد، طول قطر مستطیل چه قدر است؟

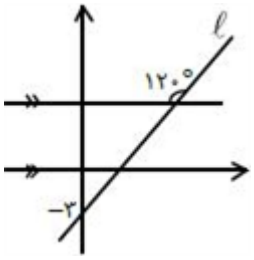
۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۳۷ با توجه به شکل مقابل، معادله خط l کدام است؟



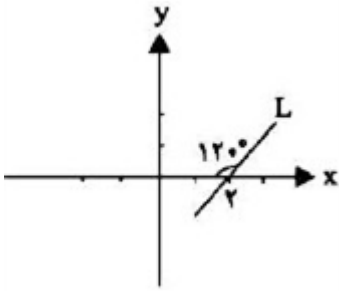
$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$ (۴)

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$ (۳)

$y = -\sqrt{3}x - 3$ (۲)

$y = \sqrt{3}x - 3$ (۱)

۳۸ مطابق شکل زیر، اگر خط L از نقطه‌ی $(3, a)$ بگذرد، a کدام است؟



$\sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

۲ (۱)

۳۹ حاصل عبارت $\frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$ کدام است؟ (عبارت تعریف شده است.)

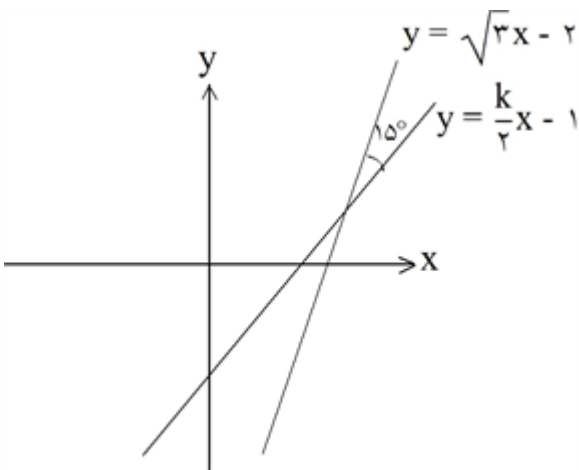
$\cos \theta$ (۴)

$\sin \theta$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۴۰ با توجه به شکل مقابل مقدار k کدام است؟



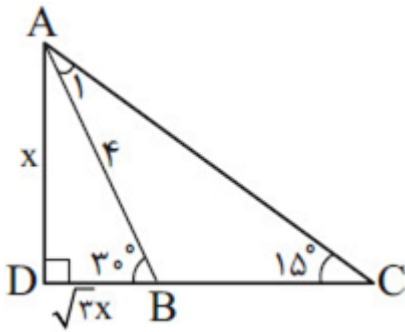
$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱



$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BD = \sqrt{3}x \\ AD = x \end{cases}$$

با توجه به اینکه زاویه خارجی مثلث ABC است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = 30^\circ \xrightarrow{\hat{C}=15^\circ} \hat{A} = 15^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ متساوی الساقین}$$

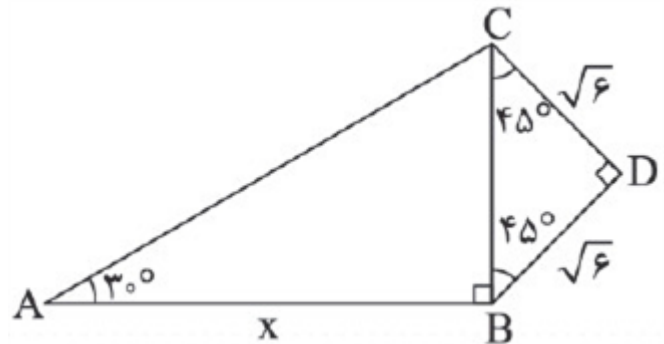
$$x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + 3x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\tan 15^\circ = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که $\hat{D} = 90^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ ، بنابراین $\hat{B} = 45^\circ$ و در نتیجه $BD = CD = \sqrt{6}$. بنابراین $BC = \sqrt{2}CD = \sqrt{12}$. از طرفی چون $\hat{A} = 30^\circ$ ، بنابراین داریم:

$$\cot \hat{A} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cot 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{12}}$$

$$\Rightarrow x = \cot 30^\circ \times \sqrt{12} = \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}$ متمم یکدیگرند، پس سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است.

$$M = \frac{2 \sin \hat{A} - 3 \sin \hat{A}}{\sqrt{3} \cos \hat{A} + 2\sqrt{3} \cos \hat{A}} = \frac{-\sin \hat{A}}{3\sqrt{3} \cos \hat{A}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \tan \hat{A}$$

بنابراین:

$$30^\circ < \hat{C} < 90^\circ \Rightarrow 0 < \hat{A} < 60^\circ \Rightarrow 0 < \tan \hat{A} < \sqrt{3} \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{3\sqrt{3}}\right)} -\frac{1}{3} < -\frac{1}{3\sqrt{3}} \tan \hat{A} < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < M < 0$$

۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث ABE و BCF بنا به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند. بنابراین $BF = ۲$ است و مثلث BEF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\widehat{EFB} = ۷۵^\circ$. پس در مثلث BEF داریم: $\widehat{B} = ۳۰^\circ$. مساحت مثلث BEF برابر است:

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} BE \times BF \times \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۳۰^\circ = ۱$$

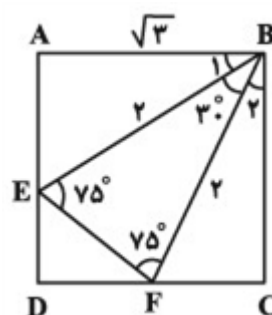
از طرفی از هم‌نهشتی مثلث‌های ABE و BCF داریم:

$$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = ۳۰^\circ$$

و در نتیجه $AB = ۲ \cos ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$ به دست می‌آید. در نتیجه مساحت مربع ABCD برابر ۳ است و مساحت

$$S = S_{ABCD} - S_{\triangle BEF} = ۳ - ۱ = ۲$$

قسمت رنگی برابر است با:



۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x + ۲y = ۲ \Rightarrow ۲y = -x + ۲ \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + ۱$$

شیب خط ۲- است، در نتیجه $\tan \alpha = -۲$ و چون $\tan \alpha$ منفی است، پس $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$.

$$۱ + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow ۱ + ۴ = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه دوم}} \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{۵}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = -۲ \times \frac{-\sqrt{۵}}{۵} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\frac{۲ \sin \alpha - \cos \alpha}{\tan \alpha} = \frac{۲ \left(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \right) - \left(-\frac{\sqrt{۵}}{۵} \right)}{-۲} = \frac{\frac{۴\sqrt{۵}}{۵} + \frac{\sqrt{۵}}{۵}}{-۲} = -\frac{۵\sqrt{۵}}{۱۰}$$

۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱) با توجه به اینکه $\sin \alpha \times \cos \alpha < ۰$ پس α در ناحیه‌ی دوم یا چهارم واقع است.

(۲) با توجه به اینکه:

$$\tan \alpha \times \sin \alpha > ۰ \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \sin \alpha > ۰ \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} > ۰ \Rightarrow \cos \alpha > ۰$$

پس α در ناحیه‌ی اول یا چهارم واقع است.

چون α باید هر دو شرط (۱) و (۲) را داشته باشد α در ناحیه‌ی چهارم واقع است.

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \tan \hat{\alpha} &= \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۱}{۳} \\ \tan \hat{\beta} &= \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۱}{۲} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \hat{\alpha} + \tan \hat{\beta} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۶}$$

۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\tan 30^\circ = m_{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{m+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = 0$$

حال شیب خط گذرا از دو نقطه $A(0, -1)$ و $C(2, 0)$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2} \quad (\alpha, \text{ حاده است}) \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \\ \Rightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{1}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده}} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

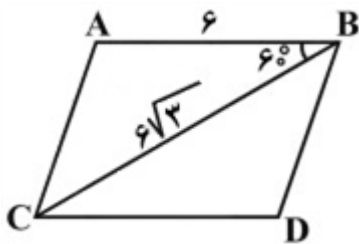
۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه در ناحیه اول داریم $0 < \sin x < 1$ پس:

$$\sin^2 x < \sin x < \sqrt{\sin x} < 1$$

پس علامت داخل قدرمطلق‌ها همگی مثبت می‌باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sin x - \sin^2 x} + 1 - \sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin x + \sin^2 x} \\ &= \sqrt{\sin x + 1 - 2\sqrt{\sin x}} = \sqrt{(\sqrt{\sin x} - 1)^2} = \underbrace{|\sqrt{\sin x} - 1|}_{\text{منفی}} = 1 - \sqrt{\sin x} \end{aligned}$$

۱۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، مساحت متوازی‌الاضلاع دو برابر مساحت مثلث ABC است:



$$\begin{aligned} S &= 2S_{ABC} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B} = 6 \times 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 54 \end{aligned}$$

۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{25} \Rightarrow 25 \sin^2 x + 25 \sin x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (5 \sin x + 8)(5 \sin x - 3) = 0$$

$$\xrightarrow{-1 \leq \sin x \leq 1} \sin x = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{4}{5}$$

$$P = \sin^2 x - |\cos x| = \frac{9}{25} - \frac{4}{5} = -\frac{11}{25} = -0.44$$

۱۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 + \tan^2 x}{2 - \tan^2 x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 + 4 \tan^2 x = 6 - 3 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 7 \tan^2 x = 2 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{2}{7} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{9}{7} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{7}{9} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1 + \sin^2 x}{2 - \sin^2 x} = \frac{1 + \frac{2}{9}}{2 - \frac{2}{9}} = \frac{\frac{11}{9}}{\frac{16}{9}} = \frac{11}{16}$$

۱۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل می‌دانیم مثلث OAH متساوی‌الساقین است، پس طول و عرض نقطه A با هم برابر هستند، اما چون در ناحیه چهارم y ها منفی می‌باشند، پس باید داشته باشیم:

$$-y = x$$

$$-5a + 7b = 3a - b \Rightarrow -8a = -8b \Rightarrow a = b \Rightarrow A(2a, -2a)$$

از طرفی طول OA باید یک باشد (چون شعاع دایره مثلثاتی برابر با یک است).

$$\sqrt{4a^2 + 4a^2} = 1 \Rightarrow 8a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow 4 \cdot a^2 = \frac{1}{2}$$

۱۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x}$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اتحاد مثلثاتی $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ و $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ خواهیم داشت:

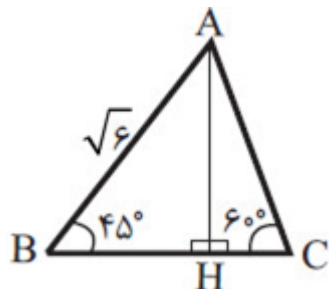
$$1 + \frac{1}{\cot^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (1) \Rightarrow 1 + \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m}{n}-1}\right)^2} = \frac{1}{(\sqrt{1-m^2})^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{m}{n}-1} = \frac{1}{1-m^2} \Rightarrow 1 + \frac{n}{m-n} = \frac{1}{1-m^2} \Rightarrow \frac{m-n+n}{m-n} = \frac{1}{1-m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m-n} = \frac{1}{1-m^2} \Rightarrow m - m^2 = m - n \Rightarrow n = m^2$$

۱۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا از رأس A، ارتفاع وارد به ضلع BC را رسم می‌کنیم.



$$\triangle AHB : \sin 45^\circ = \frac{AH}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{\sqrt{6}} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\triangle AHC : \sin 60^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC = 2$$

۱۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \sin x(1 + \cos x) > \tan x(1 + \cos x) \\ \cos x(1 + \cot^2 x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > \tan x \quad (1) \\ \cos x > 0 \quad (2) \end{cases}$$

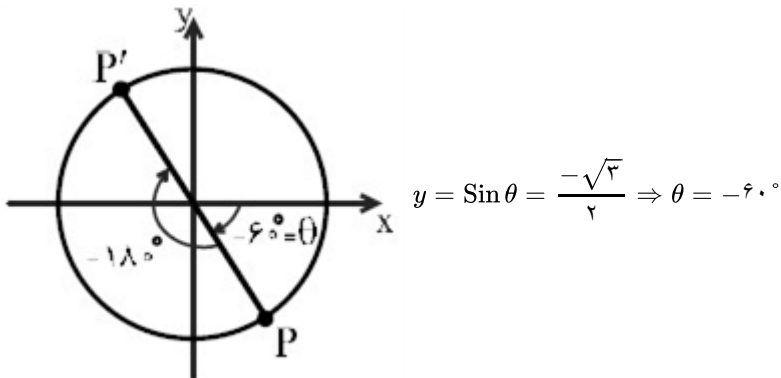
در نواحی دوم و چهارم رابطه‌ی (۱) و در نواحی اول و چهارم رابطه‌ی (۲) برقرار است. پس x در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به جدول زیر، حاصل عبارت را می‌یابیم:

	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
cot	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

$$\begin{aligned} \text{حاصل} &= \frac{1 + 2\sqrt{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)} = \frac{1 + 2\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}}{2\left(\frac{2}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \\ &= 2 \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = 2 \frac{\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -8 \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد. از آنجایی که:

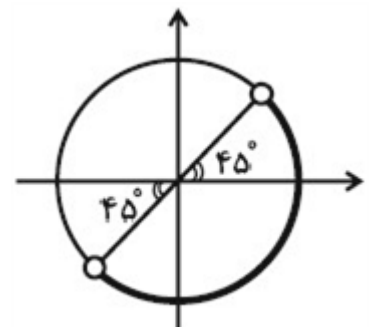


می‌دانیم سینوس زاویه‌ی 60° درجه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است، از آنجا که انتهای کمان زاویه در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد، سینوس آن منفی است، بنابراین زاویه‌ی θ برابر با -60° خواهد بود.

وقتی این زاویه، 180° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه‌ی θ' برابر است با:

$$\theta' = -180^\circ + \theta = -180^\circ - 60^\circ = -240^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ناحیه‌ای که در آن $\sin \theta < \cos \theta$ است، در شکل مشخص شده است. از طرفی در ناحیه‌ی سوم $\sin \theta < 0$ و $\tan \theta > 0$ هم‌چنین در ناحیه‌ی اول $\tan \theta > \sin \theta$ است. پس با توجه به شرط داده شده، انتهای کمان زاویه‌ی θ در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$A = \frac{\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ}{1 - 2 \sin 30^\circ + \frac{\cos 120^\circ}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{5 \times 8}{4 \times 10} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۲

زاویه خط با جهت مثبت محور x ها $\Rightarrow \text{tg } 30^\circ = \text{شیب خط} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

معادله خط $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(-6\sqrt{3}, 0)} 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-6\sqrt{3}) + b \Rightarrow b = 6$

$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 6 \Rightarrow 3y - \sqrt{3}x = 18$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۳

$$A = \text{tg } 45^\circ + 4 \sin 30^\circ = 1 + 4 \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم: ۲۴

$$A = \text{tg } x + \text{Cotg } x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad (1)$$

حال باید حاصل $\sin x \cos x$ را به دست آوریم:

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{16}$$

$$1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{16} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{15}{32} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{1}{\frac{15}{32}} = \frac{32}{15}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید، چون $\sin \theta - \cos \theta = \frac{6}{5}$ شده و از آنجا که $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ پس حتماً باید $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$ باشد (چرا؟؟!) بنابراین θ در ناحیه دوم قرار دارد. چون $\theta > 135^\circ$ ، پس ۲۵

پس حتماً باید $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$ باشد (یعنی $|\cos \theta| > \sin \theta$ و در نتیجه $-\cos \theta > \sin \theta$)

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{6}{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{36}{25} \Rightarrow -2 \sin \theta \cos \theta = \frac{11}{25} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{11}{50}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \left(-\frac{11}{50}\right) = 1 - \frac{11}{25} = \frac{14}{25}$$

$$\Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{14}}{5}$$

اما می‌دانیم $\sin \theta + \cos \theta < 0$ پس جواب $-\frac{\sqrt{14}}{5}$ قابل قبول است.

$$0 < \theta < 45^\circ : \sin \theta < \cos \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta < \operatorname{Cotg} \theta$$

$$45^\circ < \theta < 90^\circ : \sin \theta > \cos \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta > \operatorname{Cotg} \theta$$

$$90^\circ < \theta < 135^\circ : \sin \theta > |\cos \theta| \Rightarrow \operatorname{tg} \theta < \operatorname{Cotg} \theta$$

$$135^\circ < \theta < 180^\circ : \sin \theta < |\cos \theta| \Rightarrow \operatorname{tg} \theta > \operatorname{Cotg} \theta$$

$$180^\circ < \theta < 225^\circ : |\sin \theta| < |\cos \theta| \Rightarrow \operatorname{tg} \theta < \operatorname{Cotg} \theta$$

$$225^\circ < \theta < 270^\circ : |\sin \theta| > |\cos \theta| \Rightarrow \operatorname{tg} \theta > \operatorname{Cotg} \theta$$

$$270^\circ < \theta < 315^\circ : |\sin \theta| > \cos \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta < \operatorname{Cotg} \theta$$

$$315^\circ < \theta < 360^\circ : |\sin \theta| < \cos \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta > \operatorname{Cotg} \theta$$

با توجه به مطالب بالا گزینه‌ی ۳ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{-3}{4}, \operatorname{Cotg} \alpha = \frac{-4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{Cotg} \alpha = \frac{-3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{7}{12}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\sin x \cos x = -\frac{4}{9} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{12}{27} = \frac{13}{27}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در یک نیم‌دایره، اگر نقطه C روی نیم‌دایره باشد، آن‌گاه زاویهٔ روبه‌رو به قطر آن ۹۰° است. همچنین قطر دایرهٔ AB = ۱۰ سانتی‌متر است، پس مثلث ACB قائم‌الزاویه است، لذا طبق قضیهٔ فیثاغورس

داریم:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$$

$$\Rightarrow 10^2 = (AC)^2 + 8^2 \Rightarrow AC = \sqrt{100 - 64} = 6$$

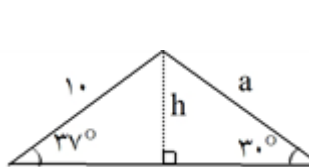
$$\Rightarrow \tan x = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ داریم:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{Cotg}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha)^2 - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{Cotg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{Cotg} \alpha) \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{Cotg}^2 \alpha$$

$$= (4)^2 - 2 \times 4 = 16 - 8 = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی، یعنی از ۱۸۰° تا ۲۷۰°، تابع $y = \sin x$ از ۰ تا -۱ کاهش می‌یابد. پس گزینه‌ی ۳ غلط است.



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 30^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2h \\ \sin 30^\circ = \frac{h}{1} \xrightarrow{\sin 30^\circ = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} / \frac{1}{2} = \frac{h}{1} \\ \Rightarrow h = 1 \\ \Rightarrow a = 2h = 2 \times 1 = 2 \text{ متر} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{1 - \sin^2 x}^{\cos^2 x}}{\cos x} < 0 \Rightarrow \cos x < 0$$

پس انتهای کمان x باید در ناحیه دوم یا سوم قرار داشته باشد.

$$\text{از طرف دیگر: } \sin x + \tan x > 0 \Rightarrow \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} > 0$$

$$\Rightarrow \sin x \left(\frac{1 + \cos x}{\cos x} \right) > 0 \Rightarrow \tan x \underbrace{(1 + \cos x)}_{\text{همواره نامنفی}} > 0$$

$$\Rightarrow \tan x > 0$$

مقادیر تانژانت در ناحیه‌های اول و سوم مثبت است، پس با توجه به قسمت اول، باید انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد.

$$1 - \cos \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 - \frac{5}{3} = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه ی ۲ یا ۳}$$

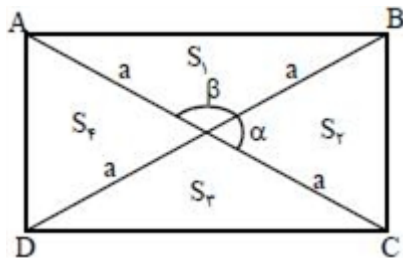
$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیه ی ۲ یا ۴}$$

ناحیه ی ۲ = اشتراک نواحی

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \frac{1}{1 + \tan^2 x} = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\Rightarrow 1(\sin^2 x - \cos^2 x) + \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر قطرهای مستطیل ABCD را رسم کنیم، چهار مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود:



α و β مکمل‌اند، پس: $\sin \alpha = \sin \beta$ ، بنابراین: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} a^2 \sin \beta$$

$$S_2 = S_3 = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$$

$$S_2 = \frac{16}{4} = 4 = \frac{1}{2} a^2 \sin 30^\circ \Rightarrow 4 = \frac{1}{4} a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow d = 2a = 8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد،

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{پس:}$$

$$y = \sqrt{3}x - 3$$

عرض از مبدأ خط نیز برابر ۳- است، بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط L با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی 60° می‌سازد، بنابراین شیب L برابر است با:

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

بنابراین معادله‌ی خط برابر است با:

$$y = \sqrt{3}x + b$$

چون خط L از $(2, 0)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$(2, 0) \in L \Rightarrow 0 = \sqrt{3} \times 2 + b \Rightarrow b = -2\sqrt{3} \Rightarrow L: y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

$$(3, a) \in L \Rightarrow a = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

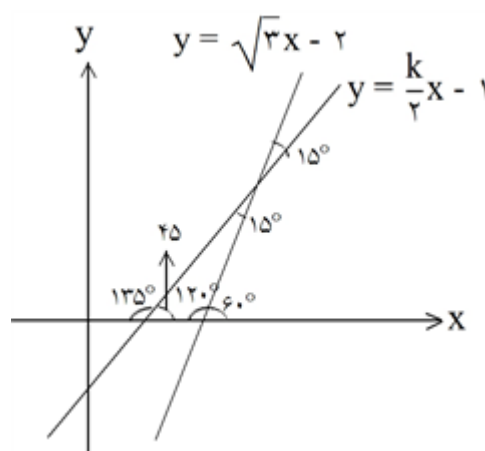
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} &= \frac{\overbrace{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}^{\text{اتحاد مزدوج}} - \sin^2 \theta}{\sin^3 \theta (1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{\overbrace{(1 - \cos^2 \theta)}^{\sin^2 \theta} - \sin^2 \theta}{\sin^3 \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{0}{\sin^3 \theta (1 - \cos \theta)} = 0 \end{aligned}$$

۴۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون شیب خط $y = \sqrt{3}x - 2$ برابر $\sqrt{3}$ است زاویه‌ی این خط با محور طول‌ها رو به جهت مثبت، 60° است. پس زاویه‌ی خط $y = \frac{k}{2}x - 1$ با محور طول‌ها رو به جهت مثبت، مطابق شکل مقابل برابر 45° است و در نتیجه:

$$\frac{k}{2} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \Rightarrow k = 2$$



1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

