



نام و نام خانوادگی :

نام درس :

نام دبیر :

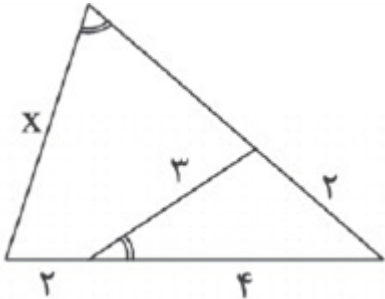
عنوان آزمون :

تاریخ برگزاری

بانک تست ریاضی سال یازدهم

تجربی (فصل ۲ هندسه)

در شکل مقابل، زوایای مساوی و اندازه اضلاع مشخص شده‌اند. مقدار x کدام است؟



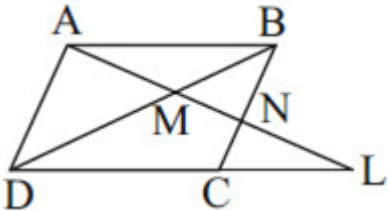
۸ (۴)

۷/۵ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

در متوازی‌الاضلاع ABCD (شکل مقابل)، اگر $MN = 2$ و $NL = 6$ باشد، آنگاه اندازه AM ، برابر کدام است؟



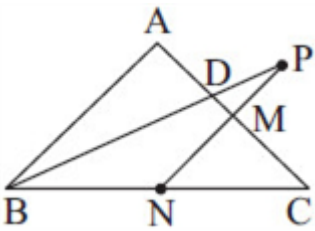
۳ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۱)

در شکل مقابل BD نیمساز و M وسط AC است. اگر $MN \parallel AB$ بوده و $PM + \frac{AB}{2} = \frac{3}{5}$ باشد، اندازه BC کدام است؟



$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{9}{5}$ (۳)

$\frac{9}{10}$ (۲)

$\frac{6}{5}$ (۱)

در لوزی ABCD به ضلع ۲ واحد، از رأس C خطی رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. اگر $CM = 2$ و $CN = 3$ باشد، محیط مثلث AMN کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۳ (۳)

۱۳/۵ (۲)

۱۱/۵ (۱)

دو مثلث، یکی به اضلاع $(1, 2, a)$ و دیگری $(3, 4, b)$ ، با یکدیگر متشابه‌اند. کدامیک از اعداد زیر نمی‌تواند نسبت تشابه این دو مثلث باشد؟

$k = 4$ (۴)

$k = 3$ (۳)

$k = 2$ (۲)

$k = \frac{3}{2}$ (۱)

۶ نقطه M به فاصله $-x^2 + 4x + (m+1)$ از خط d قرار دارد. اگر دو نقطه روی خط d موجود باشد که فاصله‌اش از M برابر ۳ باشد، حدود m کدام است؟

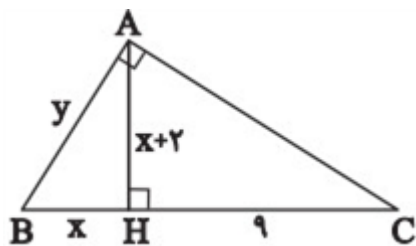
۱ $m > 4$

۲ $m < 2$

۳ $m > -2$

۴ $m < -2$

۷ در شکل زیر حاصل $x + y$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟
($\hat{A} = 90^\circ$ و ارتفاع AH است.)



۱ $4 + \sqrt{10}$

۲ $1 + 2\sqrt{13}$

۳ $4 + 2\sqrt{10}$

۴ $4 + 2\sqrt{13}$

۸ ریشه‌های معادله $\frac{3x^2 - 11x + 13}{x^2 - 3x + 3} = \frac{5x^2 - 12x + 8}{2x^2 - 7}$ چگونه است؟

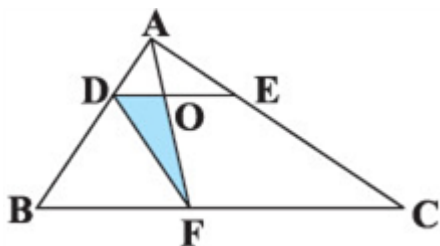
۱ دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت دارد.

۲ دو ریشه‌ی حقیقی هم‌علامت دارد.

۳ چهار ریشه‌ی حقیقی دارد.

۴ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۹ در شکل مقابل نقطه F طوری روی BC قرار گرفته است که $\frac{BF}{FC} = \frac{2}{3}$ ، اگر بدانیم که $\frac{DA}{DB} = \frac{1}{3}$ و $DE \parallel BC$ ، مساحت مثلث DOF چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



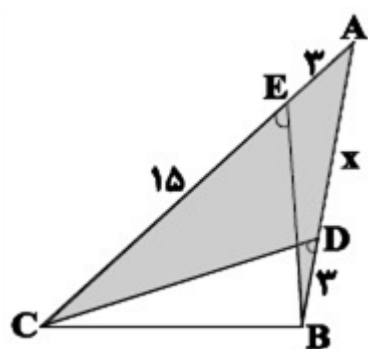
۱ $2/5$

۲ ۵

۳ $7/5$

۴ ۱۰

۱۰ در شکل مقابل $\widehat{CEB} = \widehat{CDB}$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، مقدار x کدام است؟



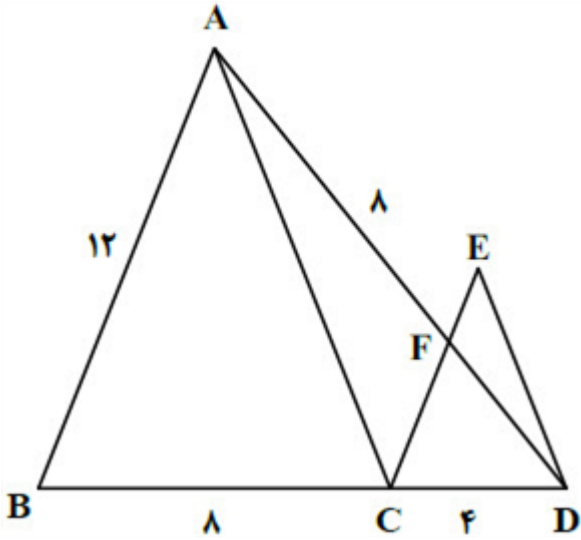
۱ ۵

۲ ۸

۳ ۶

۴ ۹

۱۱ در شکل مقابل، $AB \parallel CE$ و $AC \parallel ED$ است. اندازه ED چقدر است؟



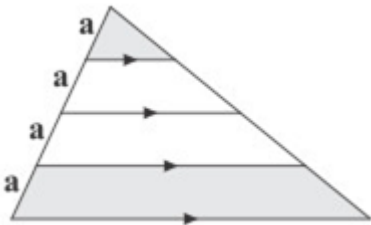
۴ $3\sqrt{5}$

۳ $2\sqrt{7}$

۲ $\sqrt{33}$

۱ $\sqrt{29}$

۱۲ در شکل زیر، نسبت مساحت دو ناحیه‌ی سایه‌زده شده کدام است؟



۴ ۹

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۶

۱۳ نیمساز AD مساحت مثلث ABC را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم می‌کند. اگر محیط مثلث ۱۵ و ضلع BC ، ۵ cm باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۴ ۲

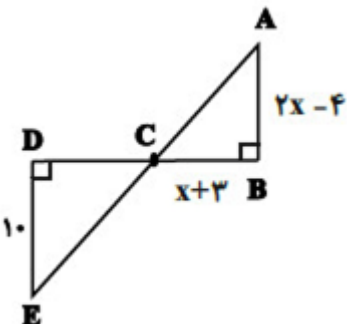
۳ $\frac{3}{2}$

۲ ۱

۱ $\frac{1}{2}$

۱۴ در شکل مقابل، نسبت محیط دو مثلث برابر $\frac{4}{5}$ است. اندازه‌ی CD کدام است؟

($EC > CA$)



۴ $11/25$

۳ $11/5$

۲ $10/25$

۱ $10/5$

۱۵ فرض کنید فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از هم برابر ۶ باشد. از A و B کمان‌هایی به شعاع k رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در ۲ نقطه قطع کنند. خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، عمودمنصف AB است، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

۴ ۳

۳ ۴

۲ ۱

۱ ۲

۱۶ در مثلثی به اضلاع ۵، ۵ و ۸، مجموع فاصله‌ی محل برخورد نیمسازهای داخلی از سه ضلع مثلث کدام است؟

۴ (۴)

۳/۷۵ (۳)

۳/۵ (۲)

۳/۲۵ (۱)

۱۷ اگر $\frac{5a+10}{a+5} = \frac{5b+6}{b+3}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟ ($b \neq 0$)

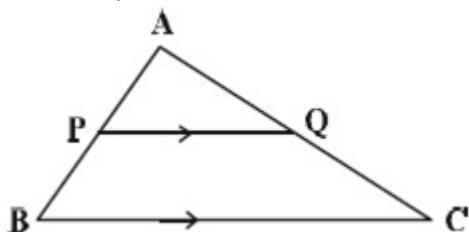
اطلاعات کافی نیست. (۴)

$\frac{5}{3}$ (۳)

$\frac{5}{7}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

۱۸ در شکل زیر $PQ \parallel BC$ ، $QC = AP + 1$ و $AQ = BP + 1$ است. اگر $BC = 10$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی PQ کدام است؟



$\frac{19}{2}$ (۴)

$\frac{17}{3}$ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH وتر را به دو قسمت به طول‌های ۲ و ۶ تقسیم می‌کند. طول میانه‌ی BM کدام است؟

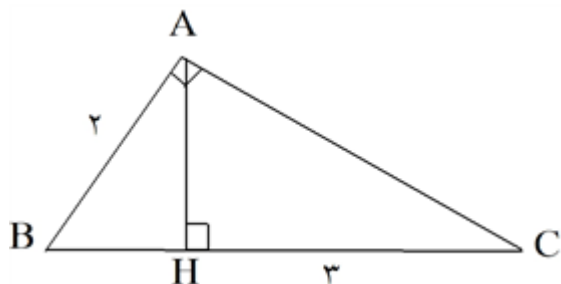
۶ (۴)

۴ (۳)

$2\sqrt{7}$ (۲)

$3\sqrt{6}$ (۱)

۲۰ در شکل روبه‌رو، نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟



۴ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۲۱ این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود را می‌نامیم.

مثال نقض (۴)

برهان خلف (۳)

استدلال استنتاجی (۲)

استدلال استقرایی (۱)

۲۲ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $AB = 12$ و $AH = 6$ ارتفاع وارد بر وتر است. اگر AM میانه‌ی وارد بر BC باشد، مقدار HM چه قدر است؟

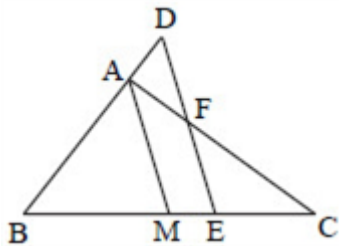
$6\sqrt{2}$ (۴)

$4\sqrt{3}$ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

۲۳ در مثلث ABC مطابق شکل، AM میانه است و $DE \parallel AM$ است. اگر DE ضلع AC را در نقطه‌ی F قطع کند به طوری‌که $\frac{EF}{AM} = \frac{7}{10}$ باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{DE}{AM}$ کدام است؟



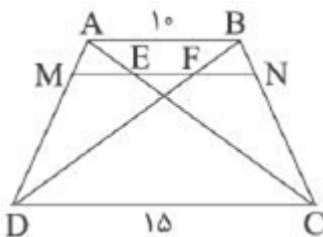
۱/۶ (۴)

۱/۲ (۳)

۱/۳ (۲)

۱/۴ (۱)

۲۴ در دوزنقه مقابل می‌دانیم $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{4}$ و $MN \parallel AB$ است. طول EF کدام است؟



۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

۲۵ حداکثر چند نقطه روی محیط مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد که از محل برخورد عمودمنصف اضلاع آن به یک فاصله باشد؟

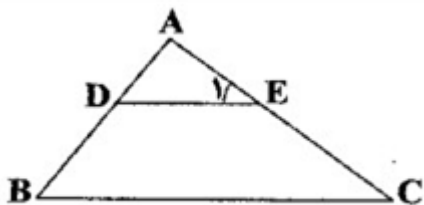
۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

۲۶ اگر در شکل زیر، $\widehat{E_1} = \widehat{C}$ و $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ باشد، مساحت مثلث ADE چند برابر مساحت چهارضلعی DECB است؟



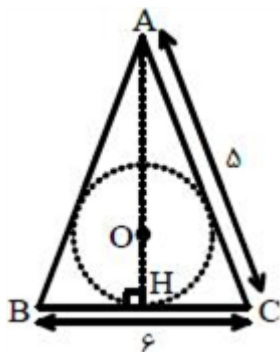
$\frac{4}{21}$ (۴)

$\frac{21}{4}$ (۳)

$\frac{25}{4}$ (۲)

$\frac{4}{25}$ (۱)

۲۷ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، AH ارتفاع و O محل برخورد نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است، در این‌صورت اندازه OH کدام است؟



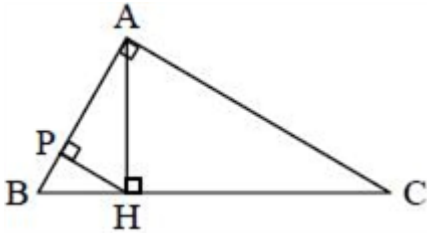
۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱/۵ (۱)

۲۸ در شکل زیر طول وتر ۱۳ واحد و دو قطعه‌ای که توسط ارتفاع وارد بر وتر روی وتر جدا می‌کند به نسبت ۴ به ۹ است. طول BP چه قدر است؟



۴ $\frac{16}{\sqrt{52}}$

۳ $\frac{36}{\sqrt{52}}$

۲ $\frac{81}{\sqrt{117}}$

۱ $\frac{36}{\sqrt{117}}$

۲۹ اگر $\frac{3}{2} = \frac{6x + 3y}{5x - 2y}$ باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۴ $\frac{1}{6}$

۳ $\frac{1}{4}$

۲ ۶

۱ ۴

۳۰ در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{2}{3}$ نسبت اضلاع متناظر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

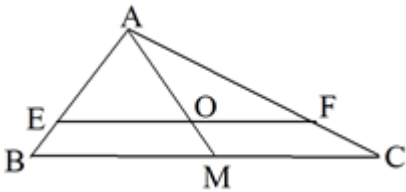
۴ $2/75$

۳ ۳

۲ $2/25$

۱ $1/5$

۳۱ در مثلث زیر $BE = \frac{1}{4}AB$ ، $EF \parallel BC$ و AM میانه‌ی وارد بر BC است. مساحت مثلث AOE چند برابر مساحت ذوزنقه‌ی OMCF می‌باشد؟



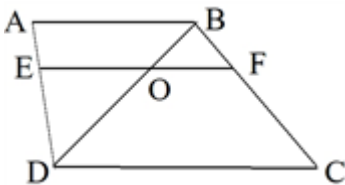
۴ $\frac{9}{5}$

۳ $\frac{9}{14}$

۲ $\frac{18}{7}$

۱ $\frac{9}{7}$

۳۲ چهارضلعی ABCD ذوزنقه و EF موازی قاعده‌های آن است. اگر $BF = \frac{1}{3}BC$ ، $DC = 5$ و $AB = 3$ باشد، اختلاف OE و OF کدام است؟



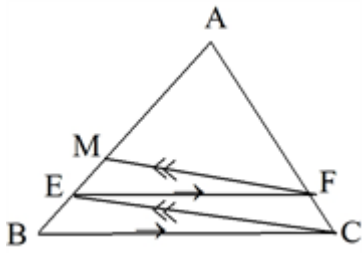
۴ $\frac{1}{2}$

۳ $\frac{1}{3}$

۲ $\frac{1}{6}$

۱ صفر

۳۳ در مثلث شکل زیر $EF \parallel BC$ و $FM \parallel CE$ می‌باشد. اگر $EM = \frac{5}{6}EB = 5$ باشد، طول AB کدام است؟



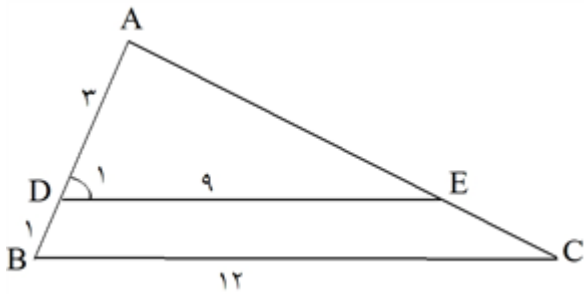
۳۱ (۴)

۳۰ (۳)

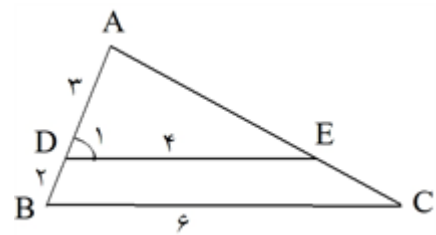
۳۶ (۲)

۲۵ (۱)

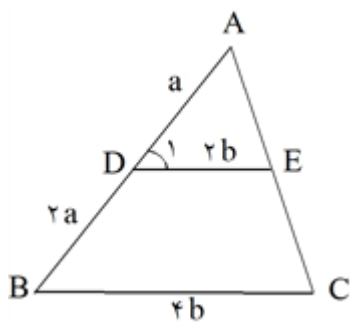
۳۴ در کدامیک از شکل‌های زیر، زاویه‌های $\widehat{B}$ و $\widehat{D}$ با هم برابرند؟



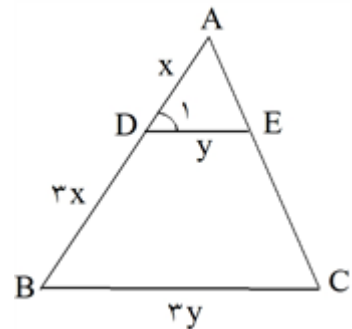
(۲)



(۱)

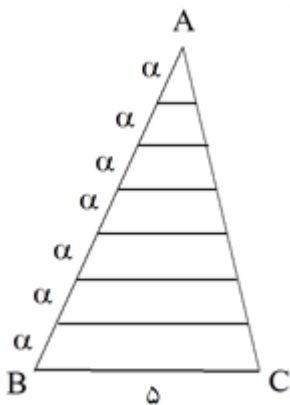


(۴)



(۳)

۳۵ در شکل روبه‌رو، در مثلث ABC شش پاره‌خط موازی قاعده‌ی BC رسم شده است، به گونه‌ای که فاصله‌ی هر کدام از این خطوط موازی از خط مجاور، برابر α است. اگر طول قاعده‌ی BC برابر ۵ باشد، مجموع طول این شش پاره‌خط کدام است؟



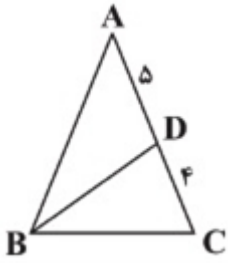
۱۰ (۴)

۱۵ (۳)

۳ (۲)

۲۰ (۱)

۳۶ در مثلث زیر $AB = AC$ و $BD = BC$ می‌باشد. محیط مثلث BDC کدام است؟



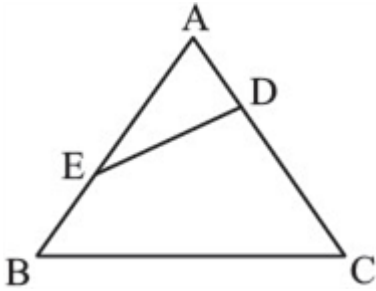
۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۰ (۱)

۳۷ در چهارضلعی $BCDE$ ، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ ، آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



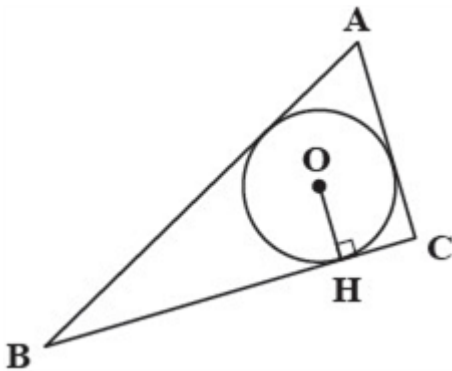
۰/۸۰ (۴)

۰/۷۲ (۳)

۰/۶۴ (۲)

۰/۵۶ (۱)

۳۸ در شکل روبه‌رو، دایره به مرکز O و شعاع OH بر هر سه ضلع مثلث ABC مماس است. نقطه O محل تقاطع در مثلث ABC است.



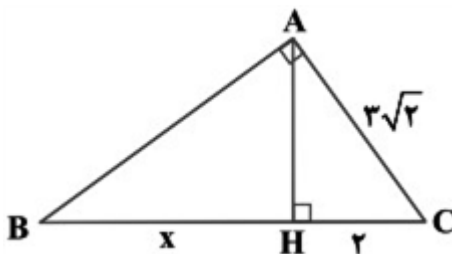
ارتفاع‌ها (۴)

عمودمنصف‌ها (۳)

میانه‌ها (۲)

نیمسازها (۱)

۳۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. با توجه به اندازه‌های داده شده، اندازه BH کدام است؟



$۴\sqrt{۲}$ (۴)

$۶\sqrt{۲}$ (۳)

۹ (۲)

۷ (۱)

۴۰ داخل مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر هر سه ضلع آن مماس باشد. اگر O مرکز این دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

- ۱ قطر دایره برابر ضلع کوچک‌تر مثلث است.
- ۲ نقطه‌ی O محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.
- ۳ قطر دایره برابر ضلع بزرگ‌تر مثلث است.
- ۴ نقطه‌ی O محل برخورد سه عمودمنصف اضلاع مثلث است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث شکل به حالت دو زاویه متشابه هستند:

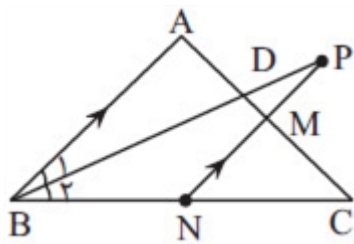
$$\Rightarrow \frac{2}{2+4} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DL \Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle DML \Rightarrow \frac{AM}{ML} = \frac{BM}{MD} \\ BN \parallel AD \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle BMN \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{MN}{AM} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{ML} = \frac{MN}{AM}$$

$$AM^2 = MN \times ML = MN \times (MN + NL) \Rightarrow AM^2 = 2 \times 8 = 16 \xrightarrow{AM > 0} AM = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا رابطه تالس را در مثلث ABC می‌نویسیم:



$$\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{MA} = 1 \Rightarrow CN = BN$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel NP \\ BP \text{ مورب} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{P} = \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{B}_1 \end{array} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{P} \Rightarrow BN = NP \quad (1)$$

چون $CN = BN = NP$ بنابراین مثلث BNP متساوی الساقین می‌باشد.

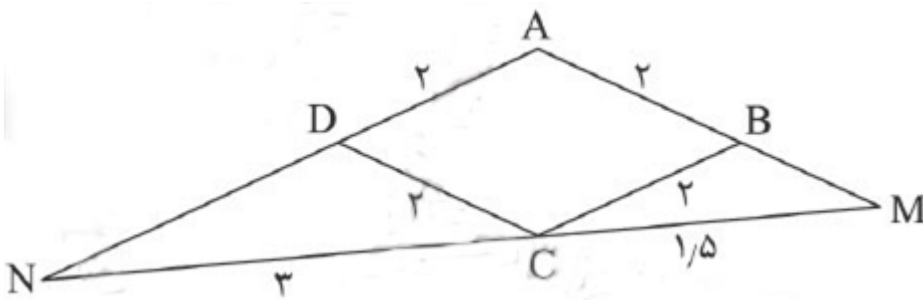
$$BC = BN + CN = 2BN \xrightarrow{(1)} 2NP = 2(PM + MN)$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{CM}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AB$$

از تعمیم تالس داریم:

$$BC = 2\left(PM + \frac{AB}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left\{ \begin{array}{l} BC \parallel AN \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{MC}{NC} \Rightarrow \frac{BM}{2} = \frac{1/5}{2} \Rightarrow BM = 1 \\ DC \parallel AM \Rightarrow \frac{ND}{AD} = \frac{NC}{MC} \Rightarrow \frac{ND}{2} = \frac{3/5}{1/5} \Rightarrow ND = 6 \end{array} \right.$$

$$\widehat{AMN} \text{ مثلث } \triangle P_{AMN} = 4/5 + 3 + 6 = 13/5$$

۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به گزینه‌ها که دقت کنیم چون همگی بالای یک هستند، پس مثلث با اضلاع b ، ۴ و ۳ را در صورت کسر می‌گذاریم.

$$k = \frac{3}{1} = \frac{4}{a} = \frac{b}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \Rightarrow b = 6 \Rightarrow k = 3 \text{ باشد دو مثلث تشابه}$$

$$k = \frac{3}{2} = \frac{4}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2} \text{ باشد دو مثلث تشابه}$$

$$k = \frac{3}{a} = \frac{4}{2} = \frac{b}{1} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = 2 \Rightarrow k = 2 \text{ باشد دو مثلث تشابه}$$

$$k = \frac{4}{1} = \frac{3}{a} = \frac{b}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}, b = 8$$

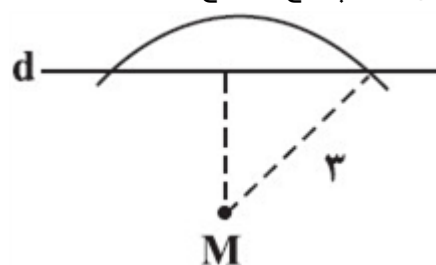
در سه قسمت اول نامساوی‌ها در مثلث درست بوده و هیچ مشکلی در رسم مثلث نیست اما در آخرین حالت با سه عدد $\left(1, 2, \frac{3}{4}\right)$ که طول سه ضلع مثلث کوچک‌تر می‌باشند نمی‌توانیم مثل داشته باشیم، چرا که مجموع دو ضلع مثلث باید

$$از ضلع سوم بیشتر باشد. $1 + \frac{3}{4} < 2 \times$$$

پس $k = 4$ نمی‌تواند نسبت تشابه این دو مثلث باشد.

۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$-x^2 + 4x + (m + 1) < 3$$

$$-x^2 + 4x + (m - 2) < 0 \Rightarrow m \begin{cases} \Delta < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow 16 + 4(m - 2) < 0 \Rightarrow 4m < -8 \Rightarrow m < -2$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow (x + 2)^2 = 9x$$

$$x^2 + 4x + 4 - 9x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

اگر $x = 1$ باشد، آن‌گاه:

$$y^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \xrightarrow{y > 0} y = \sqrt{10} \Rightarrow x + y = 1 + \sqrt{10}$$

اگر $x = 4$ باشد، آن‌گاه:

$$y^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 \xrightarrow{y > 0} y = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow x + y = 4 + 2\sqrt{13}$$

۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر بخواهیم در صورت سؤال طرفین - وسطین انجام دهیم به معادله درجه ۴ می‌رسیم که پیچیده و طولانی می‌شود. با تفصیل نسبت در صورت داریم:

$$\frac{3x^2 - 11x + 12 - (x^2 - 3x + 3)}{x^2 - 3x + 3} = \frac{5x^2 - 12x + 8 - (2x^2 - 7)}{2x^2 - 7}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 3x + 3} = \frac{3x^2 - 12x + 15}{2x^2 - 7} \Rightarrow \frac{2(x^2 - 4x + 5)}{x^2 - 3x + 3} = \frac{3(x^2 - 4x + 5)}{2x^2 - 7}$$

دلتای عبارت $x^2 - 4x + 5 = 0$ منفی است. پس ریشه‌ی حقیقی ندارد و آن را از طرفین ساده می‌کنیم.

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 3} = \frac{3}{2x^2 - 7} \Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 3x^2 - 12x + 14$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 23 = 0 \Rightarrow \Delta = 9^2 - 4(-23) > 0$$

$$S = -\frac{9}{1} = -9 \text{ و } P = -\frac{23}{1} = -23$$

پس این معادله، ۲ ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. دقت کنید که هیچ کدام از ریشه‌های فوق، ریشه هیچ مخرجی نخواهند بود. پس هر دو قابل قبول است.

۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه دو مثلث DOF و DOA در رأس D مشترک بوده و قاعده‌های AO و OF در یک راستا هستند، داریم:

$$\frac{S_{\triangle DOF}}{S_{\triangle DOA}} = \frac{OF}{AO} = \frac{DB}{DA} = \frac{3}{1} = 3 \quad (*)$$

از طرفی چون $\frac{DO}{BF} = \frac{OE}{FC}$ ، طبق خواص تناسب داریم:

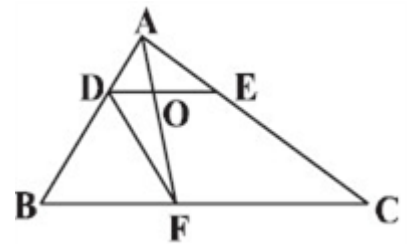
$$\frac{DO}{OE} = \frac{BF}{FC} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{DO}{DE} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle DOA}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{2}{4} \quad (**)$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DA}{BA}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad (***)$$

مثلث ADE نیز با مثلث ABC متشابه است و داریم:

در نهایت داریم:

$$\frac{S_{\triangle DOF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle DOF}}{S_{\triangle DOA}} \times \frac{S_{\triangle DOA}}{S_{\triangle ADE}} \times \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \overset{(*)}{3} \times \overset{(**)}{\frac{2}{4}} \times \overset{(***)}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{40} = 7.5\%$$



۱۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{CEB} = \widehat{CDB} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ADC}$$

$$\left. \begin{matrix} \widehat{AEB} = \widehat{ADC} \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \triangle AEB \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{x+2}{18}$$

$$\Rightarrow x(x+2) = 36 \Rightarrow x^2 + 2x - 36 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$CF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{12} = \frac{4}{12} = \frac{DF}{DF+8}$$

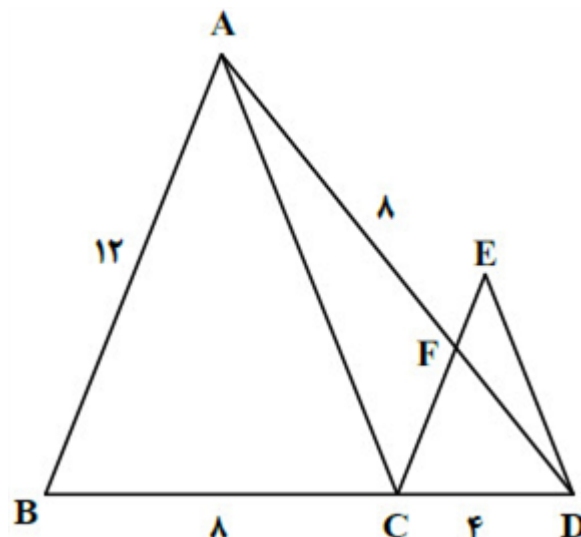
$$\Rightarrow CF = 4, DF = 4$$

مثلث‌های $\triangle ABD$ و $\triangle CDF$ متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

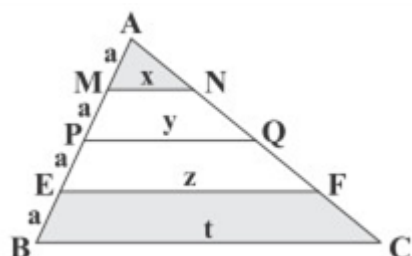
$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \times AB \times CB \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow AC^2 = 112 \Rightarrow AC = 4\sqrt{7}$$

$$\frac{ED}{AC} = \frac{FD}{AF} \Rightarrow \frac{ED}{4\sqrt{7}} = \frac{4}{8} \Rightarrow ED = 2\sqrt{7}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

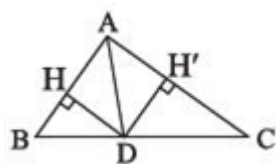


$$S_{EFCB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF} \quad (*)$$

مثلث‌های ABC ، AEF و AMN با هم متشابه هستند، لذا داریم:

$$\begin{cases} \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AB}{AM}\right)^2 = \left(\frac{ra}{a}\right)^2 = 16 \\ \frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AE}{AM}\right)^2 = \left(\frac{ra}{a}\right)^2 = 9 \end{cases} \quad (**)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{EFCB}}{S_{\triangle AMN}} \stackrel{(*)}{=} \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMN}} - \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AMN}} \stackrel{(**)}{=} 16 - 9 = 7$$



$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} AB \cdot DH}{\frac{1}{2} AC \cdot DH'} = \frac{2}{3}$$

D روی نیمساز است $\Leftrightarrow DH = DH'$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2x \\ AC = 3x \end{cases}$$

$$AB + AC + BC = 15 \xrightarrow{BC=5} AB + AC = 10$$

$$\Rightarrow 2x + 3x = 10 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{aligned} AB &= 4 \\ AC &= 6 \Rightarrow AC - AB = 2 \end{aligned}$$

$$\text{نسبت اضلاع دو مثلث} = \text{نسبت محیط دو مثلث} \xrightarrow{EC > CA} \frac{4}{5} = \frac{2x - 4}{10} = \frac{x + 3}{CD}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{2x - 4}{10} \Rightarrow 10x - 20 = 40 \rightarrow 10x = 60 \rightarrow x = 6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{x + 3}{CD} \Rightarrow 4CD = 45 \Rightarrow CD = 11 \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که دو کمان یکدیگر را قطع می کنند، پس باید شعاع کمان ها بیش تر از

نصف طول پاره خط باشد؛ لذا k باید از $\frac{6}{2}$ بیش تر باشد. یعنی بزرگ تر از ۳ باشد پس $k = 4$ می تواند باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. x فاصله ی محل برخورد نیمسازهای داخلی با هر ضلع مثلث می باشد. (چون O نقطه ی

مشترک روی نیمسازها است، پس فاصله ی آن تا سه ضلع برابر x است.)

چون مثلث متساوی الساقین است AM علاوه بر نیمساز، میانه و عمودمنصف هم هست و نقطه ی برخورد نیمسازها روی

$$\xrightarrow{\text{رابطه فیثاغورس}} AM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \quad \text{عمودمنصف AM است.}$$

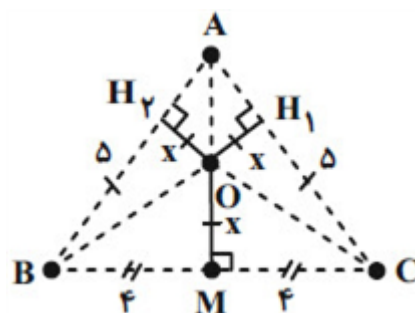
مساحت را می توان از دو طریق پیدا کرد و مقدار x را یافت. پس:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC \times AM}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (AB \times x + AC \times x + BC \times x) = 12 \Rightarrow S = \frac{1}{2} (5x + 5x + 8x) = 12$$

$$\Rightarrow 18x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$\text{مجموع خواسته شده} = 3x = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$



۱۷

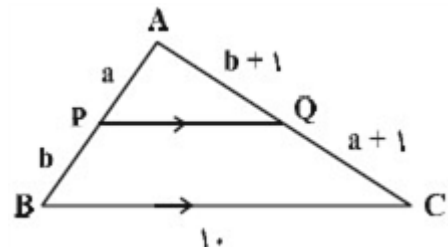
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌توان از راه‌های مختلفی تناسب را ساده کرد، اما ساده‌تر از همه، همان طرفین وسطین است.

$$\frac{5a+10}{a+5} = \frac{5b+6}{b+3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \cancel{5ab} + 15a + 10b + \cancel{30} = \cancel{5ab} + 25b + 6a + \cancel{30}$$

$$\Rightarrow 15a - 6a = 25b - 10b \Rightarrow 9a = 15b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{15}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

۱۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض مسئله داریم:



$$\frac{a}{b} = \frac{b+1}{a+1}$$

$$a^2 + a = b^2 + b \Rightarrow a^2 - b^2 + a - b = 0 \Rightarrow (a-b)(a+b+1) = 0 \quad \text{و لذا:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b = -1 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

بنابراین $a = b$ لذا PQ از وسط دو ضلع مثلث می‌گذرد لذا طول آن نصف ضلع سوم مثلث یعنی ۵ می‌باشد.

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow PQ = \frac{10}{2} = 5$$

۱۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AB = 4$$

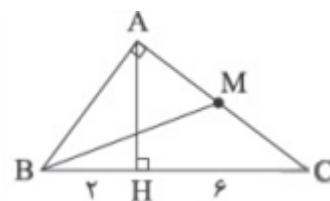
$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow AC^2 = 6 \times 8 = 48 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

چون BM مینه است، پس $AM = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{3}$ می‌باشد.

برای پیدا کردن طول BM در مثلث ABM فیثاغورس می‌نویسیم:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 \Rightarrow BM^2 = 16 + (2\sqrt{3})^2 = 16 + 12 = 28$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



۲۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $AB^2 = BH \times BC$ ، پس:

$$4 = BH(BH + 3) \Rightarrow BH^2 + 3BH - 4 = 0$$

$$(BH + 4)(BH - 1) = 0 \xrightarrow{BH > 0} BH = 1$$

دو مثلث ABH و ACH دارای ارتفاع یکسان (AH) هستند، پس نسبت مساحت آنها برابر با نسبت قاعده‌های آنها:

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABH}} = \frac{CH}{BH} = \frac{3}{1} = 3$$

۲۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۲

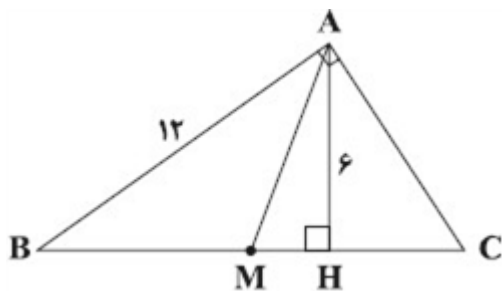
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(BH)^2 = (AB)^2 - (AH)^2 = 144 - 36 \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

$$(AH)^2 = BH \cdot HC \Rightarrow 36 = 6\sqrt{3} \times HC \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}$$

$$BC = BH + HC = 8\sqrt{3}, BM = \frac{BC}{2} = 4\sqrt{3}$$

با توجه به شکل زیر داریم:



$$HM = BH - BM = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

۲۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این که AM میانه است پس BM = MC و بنا به قضیه‌ی تالس داریم:

$$\triangle AMC : EF \parallel AM \Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{CE}{CM} \quad (1)$$

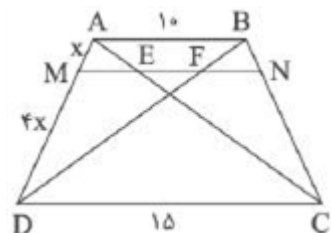
$$\triangle BDE : AM \parallel DE \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{BE}{CM} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{CE}{CM} + \frac{BE}{CM} \Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{BC}{CM} \Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{2CM}{CM} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{10} + \frac{DE}{AM} = 2 \Rightarrow \frac{DE}{AM} = 1 \frac{4}{5}$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال، $MN \parallel AB \parallel CD$ است. از تالس کمک می‌گیریم:



$$\triangle ADC : ME \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{ME}{DC} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{ME}{15} \Rightarrow ME = 3$$

$$\triangle ADB : MF \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{MF}{AB} \Rightarrow \frac{4x}{15} = \frac{MF}{10} \Rightarrow MF = 8$$

طول EF برابر است با:

$$EF = MF - ME = 8 - 3 = 5$$

۲۵

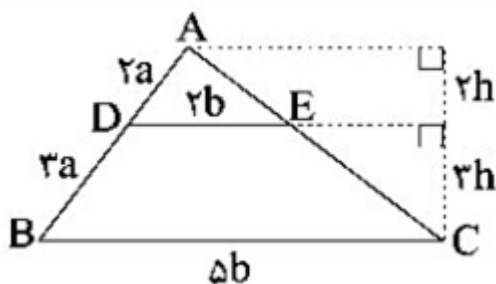
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل در مثلث ABC نقطه O محل برخورد عمودمنصف‌ها است. دایره‌هایی به مرکز O و شعاع‌های متفاوت رسم کرده‌ایم. این دایره‌ها نهایتاً مثلث را در ۶ نقطه قطع می‌کنند.



۲۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

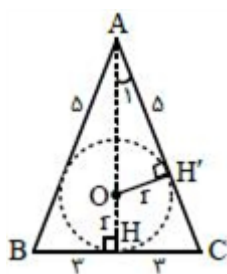
از آنجا که $\widehat{E} = \widehat{C}$ ، طبق قضیه‌ی خطوط موازی، داریم که $BC \parallel DE$. در نتیجه طبق قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها، مثلث ADE با مثلث ABC متشابه است، پس:



$$\frac{S_{(ADE)}}{S_{(DECB)}} = \frac{\frac{1}{2} \times rh \times rb}{\frac{1}{2} \times rh \times db} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

۲۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث‌های AOH' و ACH با هم متشابه‌اند چون:



$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A} \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{OH'}{HC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{r}{r} = \frac{r-r}{\delta} \Rightarrow \delta r = 12 - 3r \Rightarrow 4r = 12 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

دقت کنید که $AH = 4$ از رابطه فیثاغورس به دست آمده است.

۲۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{BH}{HC} = \frac{r}{a} \Rightarrow BH = rx, HC = ax \Rightarrow ax + rx = 13 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} BH = 4 \\ CH = 9 \end{cases}$$

$$\triangle ABC : AH^2 = BH \times CH = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC: $AB = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$ و همچنین:

$$BH^2 = BP \cdot AB \Rightarrow 16 = BP \cdot \sqrt{52} \Rightarrow BP = \frac{16}{\sqrt{52}}$$

۲۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{rx + 3y}{5x - 2y} = \frac{3}{2} \Rightarrow 15x - 6y = 12x + 6y$$

$$3x = 12y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{12}{3} = 4$$

۳۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه k ، نسبت اضلاع متناظر برابر k و نسبت مساحت‌ها برابر k^2 است.فرض کنیم نسبت برابر k باشد، در این صورت طبق فرض و با توجه به نکته بالا داریم:

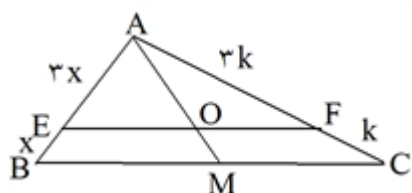
$$k^2 = \frac{r}{3} \times k \Rightarrow k = \frac{r}{3}$$

پس نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{9}{9} = 1/25$$

۳۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث ABM، OE || BM، در نتیجه:



$$\frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle ABM}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{r_x}{r_x + r_k}\right)^2 = \frac{r_x^2}{r_x^2 + 2r_x r_k + r_k^2} = \frac{r_x^2}{(r_x + r_k)^2} = \frac{r_x^2}{r^2} \Rightarrow S_{\triangle AOE} = \frac{r_x^2}{r^2} \times \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{r_x^2}{r^2} S_{\triangle ABC} \quad (1)$$

به طور مشابه:

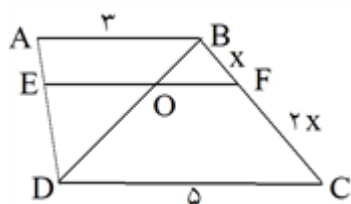
$$\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle AMC}} = \left(\frac{r_x}{r_k}\right)^2 = \frac{r_x^2}{r_k^2} \Rightarrow S_{\triangle OMC} = \frac{r_k^2}{r_k^2} S_{\triangle AMC} \Rightarrow S_{\triangle OMC} = \frac{r_k^2}{r_k^2} \left(\frac{1}{2} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{r_k^2}{r^2} S_{\triangle ABC} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle OMC}} = \frac{\frac{r_x^2}{r^2}}{\frac{r_k^2}{r^2}} = \frac{r_x^2}{r_k^2} = \frac{r_x^2}{r^2}$$

۳۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعمیم تالس در ذوزنقه:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$$



$$\triangle DAB : OE \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{OE}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{r}{r+5} \Rightarrow OE = \frac{r}{r+5} AB = r$$

$$\triangle BDC : OF \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{OF}{DC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{OF}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow OF = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow OE - OF = r - \frac{5}{3} = \frac{6 - 5}{3} = \frac{1}{3}$$

۳۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \\ \triangle AEC : MF \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{ME} = \frac{AF}{FC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AM}{ME} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$EM = \frac{5}{6} EB = 5 \Rightarrow \begin{cases} ME = 5 \\ EB = 6 \end{cases} \quad (2)$$

بنابراین با فرض $AM = x$ داریم:

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{5+x}{6} = \frac{x}{5} \Rightarrow 6x = 5(5+x) \Rightarrow 6x = 25 + 5x \Rightarrow 6x - 5x = 25 \Rightarrow x = 25$$

$$\Rightarrow AB = x + 5 + 6 = 25 + 11 = 36$$

۳۴

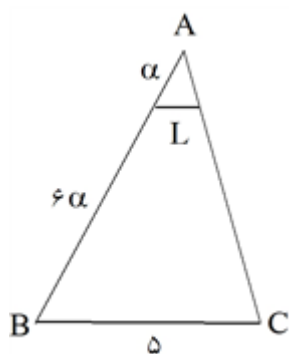
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای این که $\widehat{B} = \widehat{D}$ باشد، طبق قضیه ی خطوط موازی باید $BC \parallel DE$ باشد، که برای بررسی این موضوع هم از عکس قضیه ی تالس باید استفاده کنیم.

$$\frac{3}{3+1} = \frac{9}{12} \Rightarrow BC \parallel DE \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{B}$$

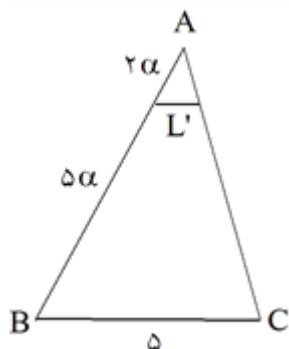
در گزینه ی ۲، این قضیه برقرار است، زیرا:

پس در گزینه ی ۲، $BC \parallel DE$ و در نتیجه $\widehat{D} = \widehat{B}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید تعمیم قضیه‌ی تالس را یکی یکی برای هر کدام از ۶ پاره‌خط نوشت.



برای پاره‌خط اول : $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{L}{\delta} \Rightarrow L = \frac{1}{\sqrt{}} \times 5$



برای پاره خط دوم : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{L'}{\delta} \Rightarrow L' = \frac{2}{\sqrt{}} \times 5$

به شکل مشابه:

طول پاره‌خط سوم: $\frac{3}{\sqrt{}} \times 5$

طول پاره‌خط چهارم: $\frac{4}{\sqrt{}} \times 5$

طول پاره‌خط پنجم: $\frac{5}{\sqrt{}} \times 5$

طول پاره‌خط ششم: $\frac{6}{\sqrt{}} \times 5$

مجموع طول پاره‌خط ها = $\frac{(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)}{\sqrt{}} \times 5 = \frac{21}{\sqrt{}} \times 5 = 15$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}, BD = BC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{BDC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDC (\text{ز.ز}) \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{BC} = \frac{BC}{4} \Rightarrow BC^2 = 36 \Rightarrow BC = 6 \Rightarrow BD = 6 \Rightarrow \text{محیط } \triangle BCD = 16$$

$$\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{D}_1 = 180^\circ : \text{طبق فرض} \\ \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ : \text{طبق شکل} \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}_2$$

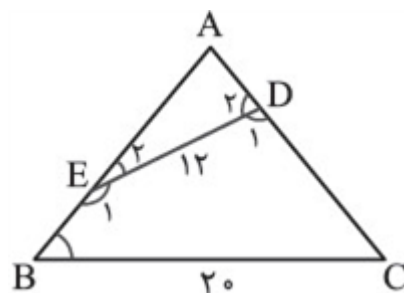
چون $\widehat{A} = \widehat{A}$ و $\widehat{B} = \widehat{D}_2$ پس دو مثلث ABC و ADE، طبق حالت تساوی زاویه‌ها با هم متشابهند و داریم:

$$k = \frac{DE}{BC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \text{ (نسبت تشابه)}$$

$$\frac{S(\triangle ADE)}{S(\triangle ABC)} = k^2 \Rightarrow \frac{S(\triangle ADE)}{S(\triangle ABC)} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S(\triangle ABC) - S(\triangle ADE)}{S(\triangle ABC)} = \frac{25 - 9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S(\triangle BCDE)}{S(\triangle ABC)} = \frac{16}{25} = \frac{64}{100} = 0.64$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر فاصله نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه یکسان باشد، آن نقطه بر روی نیمساز زاویه قرار دارد.

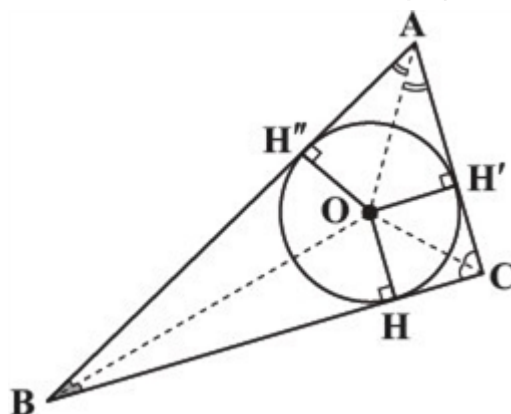
در شکل روبه‌رو $OH = OH' = OH''$ ، زیرا همگی برابر شعاع دایره هستند. حال از تساوی $OH = OH''$ نتیجه می‌شود

نقطه O بر روی نیمساز زاویه C قرار دارد. به همین ترتیب از تساوی $OH' = OH''$ نتیجه می‌شود نقطه O بر روی

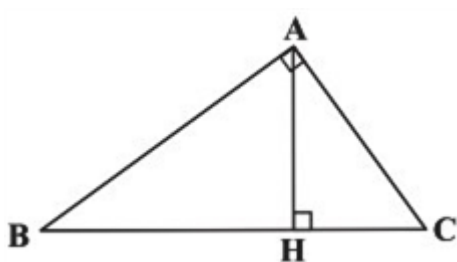
نیمساز زاویه A نیز قرار دارد.

همچنین از تساوی $OH = OH'$ نتیجه می‌شود نقطه O بر روی نیمساز زاویه B قرار دارد. بنابراین نقطه O محل تقاطع

نیمسازهای مثلث ABC است.

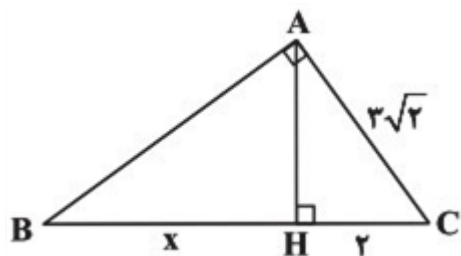


نکته (روابط طولی در مثلث قائم الزاویه): در مثلث قائم الزاویه ABC روابط زیر برقرارند:



- ۱) $AB^2 = BH \cdot BC$
- ۲) $AC^2 = CH \cdot BC$
- ۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- ۴) $AH^2 = BH \cdot CH$
- ۵) $AH \cdot BC = AC \cdot AB$

با استفاده از رابطه شماره ۲ داریم:

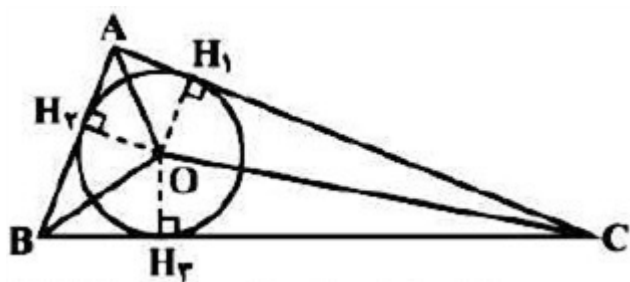


$$AC^2 = CH \times BC \xrightarrow[\substack{CH=2 \\ AC=2\sqrt{2}}]{} (2\sqrt{2})^2 = 2 \times (x + 2)$$

$$\Rightarrow 18 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز دایره از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، بنابراین محل برخورد سه نیمساز داخلی

مثلث است.



$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = r$$

1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4
5	1	2	3	4
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4
8	1	2	3	4
9	1	2	3	4
10	1	2	3	4
11	1	2	3	4
12	1	2	3	4
13	1	2	3	4
14	1	2	3	4
15	1	2	3	4
16	1	2	3	4
17	1	2	3	4
18	1	2	3	4
19	1	2	3	4
20	1	2	3	4
21	1	2	3	4
22	1	2	3	4
23	1	2	3	4
24	1	2	3	4
25	1	2	3	4
26	1	2	3	4
27	1	2	3	4
28	1	2	3	4
29	1	2	3	4
30	1	2	3	4
31	1	2	3	4
32	1	2	3	4

33	1	2	3	4
34	1	2	3	4
35	1	2	3	4
36	1	2	3	4
37	1	2	3	4
38	1	2	3	4
39	1	2	3	4
40	1	2	3	4

