



نام و نام خانوادگی :

نام و نام خانوادگی :

نام درس :

پایه تحصیلی :

نام آموزشگاه :

نام دبیر :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۴/۲۹

عنوان آزمون : بانک تست ریاضی سال دهم

تجربی فصل ۶ شمارش_بدون شمارش

۱) رأس‌های مربع ABCD را به چند طریق می‌توان با سه رنگ سبز، آبی و قرمز رنگ کرد، به طوری که رأس‌هایی که به هم متصل هستند، هم‌رنگ نباشند؟ (استفاده از هر سه رنگ الزامی نیست.)

۱۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۶ (۱)

۲) تعداد جایگشت‌های ۳ شیء از $n + ۲$ شیء متمایز $۱۰/۵$ برابر جایگشت‌های ۲ شیء از n شیء متمایز است. n کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۹ (۱)

۳) در دنباله $a_n = \begin{cases} kn! & n \leq ۴ \\ ۲a_{n-۱} & n > ۴ \end{cases}$ ، مجموع پنج جمله اول برابر ۲۴۳ است. در این صورت واسطه حسابی جملات پنجم و هشتم کدام است؟

۶۷۸ (۴)

۶۴۸ (۳)

۶۵۸ (۲)

۶۶۸ (۱)

۴) به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۷ نفر توزیع کرد، به طوری که به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

۴۲ (۴)

۵۰۴۰ (۳)

۲۱ (۲)

۲۵۲۰ (۱)

۵) در یک آزمون ۴ گزینه‌ای شامل ۲۰ سؤال، اگر افراد مجبور باشند به ۵ سؤال اول حتماً پاسخ بدهند، چند پاسخنامه متفاوت وجود خواهد داشت؟

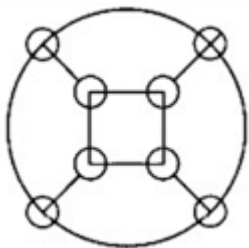
۱۰^۵ (۴)

۵۰^۵ (۳)

۱۰۰^۵ (۲)

۵۰۰^۵ (۱)

۶) ۷ نفر به چند طریق می‌توانند دور میز گردی به شکل زیر قرار گیرند؟



۴۸۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۲۵۲۰ (۲)

۱۰۰۸۰ (۱)

۷) در یک مراسم هر دانش‌آموز با ۲ همراه شرکت کرده است. اگر در این مراسم هفت دانش‌آموز شرکت کرده باشد، به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز و همراه‌های آن‌ها را در یک ردیف قرار داد، به طوری که هر دانش‌آموز بین دو همراهش قرار بگیرد؟

۱۰۰۸۰ (۴)

۳۳۶۰ (۳)

۱۶۸۰ (۲)

۱۳۴۴۰ (۱)

۸) یک آزمون چند گزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد دقیقاً به ۶ سؤال پاسخ دهد به صورتی که به حداقل ۴ سؤال از ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای و حداکثر به ۴ سؤال از ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای جواب دهد. او با چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۲۲۰×۲^۷ (۴)

۴۵۰×۲^۷ (۳)

۲۲۵×۲^۷ (۲)

۴۶۰×۲^۷ (۱)

۹ چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به طوری که مضرب ۶ باشند؟

۴ ۴۳۱

۳ ۳۴۱

۲ ۲۲۱

۱ ۱۳۱

۱۰ روی محیط دایره‌ای ۱۰ نقطه داریم، چند شکل سه‌ضلعی، چهارضلعی و پنج‌ضلعی متمایز می‌توان رسم کرد که رئوس آن این نقاط باشند؟

۴ ۶۲۰

۳ ۶۰۰

۲ ۵۸۲

۱ ۴۸۰

۱۱ چهار افسر و سه سرباز به چند طریق می‌توانند دور یک میز دایره‌ای بنشینند؟

۴ ۵۰۴۰

۳ ۷۲۰

۲ ۴۸۰

۱ ۳۶۰

۱۲ به چند طریق می‌توان از بین علی و محمد و ۸ نفر دیگر، ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری که از بین علی و محمد حداقل یکی انتخاب شده باشد؟

۴ ۱۴۰

۳ ۱۱۲

۲ ۱۰۵

۱ ۵۶

۱۳ اگر $\frac{P(3n-1, 2)}{55} = 2$ باشد، آن‌گاه $P\left(\frac{3}{2}n, 3\right)$ کدام است؟

۴ ۶۰

۳ ۱۲۰

۲ ۴۸

۱ ۲۴

۱۴ ۴ کتاب ادبی، ۳ کتاب علمی و ۲ کتاب داستانی را می‌خواهیم در یک ردیف قفسه‌ی کتابخانه بچینیم. اگر قرار باشد که کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند، این کار به چند طریق می‌تواند انجام شود؟

۴ ۷۲

۳ ۱۷۲۸

۲ ۱۵۱۸

۱ ۹۶

۱۵ از بین ۵ کارمند مرد و ۳ کارمند زن، به چند طریق می‌توان یک گروه سه‌نفری انتخاب کرد به طوری که رئیس گروه منتخب مرد باشد؟

۴ ۱۱۵

۳ ۱۰۵

۲ ۹۵

۱ ۸۵

۱۶ در یک قفسه‌ی کتاب، ۵ کتاب ریاضی و ۷ کتاب ادبیات وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۵ کتاب را از این قفسه انتخاب کرد به طوری که تعداد کتاب‌های ریاضی کمتر باشد؟

۴ ۵۳۶

۳ ۳۵۰

۲ ۵۴۶

۱ ۵۱۵

۱۷ اگر داشته باشیم $\binom{n}{26} = \frac{1}{2} \binom{n}{25}$ آن‌گاه حاصل $\frac{n^2 + n}{n^2 - 1}$ کدام است؟

۴ $\frac{36}{35}$

۳ $\frac{28}{27}$

۲ $\frac{38}{37}$

۱ $\frac{26}{25}$

۱۸ در صورتی که تمامی اعداد ۵ رقمی تشکیل شده با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ را به ترتیب نزولی مرتب کنیم، ۳۲۰۴۷ چندمین عدد خواهد بود؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۴ ۶۶

۳ ۶۵

۲ ۳۲

۱ ۶۷

۱۹ تعداد حالت‌هایی که ۳ دوست در سه فصل و سه روز متفاوت از هفته به دنیا آمده باشند، چقدر است؟

۴ $2 \times 7!$

۳ $2 \times 6!$

۲ $7!$

۱ ۱۹۶۵۶

۲۰ اگر $C(m, n-1) = C(m, 10-n)$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه $\frac{m+1}{2}$ عضوی کدام است؟

۴ ۱

۳ ۱۰

۲ ۲۰

۱ ۴

۲۱) افراد A و B و C به همراه ۷ نفر دیگر در جایگاه‌های متوالی ۱ تا ۱۰ قرار می‌گیرند. نسبت حالتی که A بلافاصله بعد از B قرار می‌گیرد به تعداد حالتی که A و B و C کنار هم (با ترتیب دل‌خواه) قرار می‌گیرند، کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

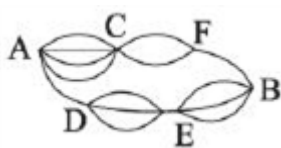
۲۲) با ارقام ۱ تا ۵، همهٔ اعداد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام را می‌نویسیم و از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. دو رقم سمت چپ عدد پنجاهم کدام است؟

- ۱) ۳۲ ۲) ۳۱ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

۲۳) جواب معادلهٔ $\frac{(n+4)!}{(n+1)!} = 63n + 189$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۴) در شکل زیر به چند روش مختلف می‌توان از نقطهٔ A به B رسید به‌طوری که از هیچ نقطه‌ای بیش از یک‌بار عبور نکنیم؟



- ۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۲۵) حاصل $1 + 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + 200 \times 200!$ کدام است؟

- ۱) $400!$ ۲) $201!$ ۳) $202!$ ۴) $202 \times 200!$

۲۶) با ارقام ۲، ۰، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که شامل ۲، ۳ نباشند؟

- ۱) ۱۸ ۲) ۴۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۲۷) با حروف کلمهٔ «MONIAZ» چند کلمهٔ سه یا چهارحرفی می‌توان ساخت؟

- ۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۸۰

۲۸) با حروف کلمهٔ «سیاهکل» چند کلمهٔ ۶ حرفی بدون توجه به معنی و مفهوم می‌توان نوشت به شرطی که حروف «ی» و «س» کنار هم باشند ولی حروف «ه» و «ک» کنار هم نباشند؟

- ۱) ۲۴۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۹۰ ۴) ۱۶۴

۲۹) با حروف کلمه‌ی «مثلثات» چند کلمه‌ی چهارحرفی می‌توان ساخت؟

- ۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۹۲

۳۰) اگر $p(n, 2) - c(n, 2) = 36$ باشد، مقدار $\binom{n}{6}$ کدام است؟

- ۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۸۴

۳۱) اگر جواب معادله‌ی $P(n, 2) + 36 = \binom{2n}{2}$ تعداد اعضای مجموعه‌ی A باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی حداکثر سه عضوی دارد؟

- ۱) ۲۰ ۲) ۶۴ ۳) ۴۲ ۴) ۳۶

۳۲

۴ دستگاه پراید و ۳ دستگاه سمند به چند طریق می‌توانند پشت سر هم پارک کنند به طوری که پرایدها کنار هم باشند؟

۱ $(4!)^2$ ۲ $2(4!)$ ۳ $(4!)$ ۴ $4(4!)$

۳۳

به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی متفاوت و ۱ کتاب فیزیک را در یک قفسه کنار هم قرار داد؟

۱ $4!$ ۲ 4^4 ۳ $5!$ ۴ 5^4

۳۴

اگر $1 = (x^2 - x^2)!$ ، آنگاه برای x چند مقدار وجود دارد؟

۱ ۱

۲ ۲

۳ ۳

۴ ۴

۳۵

از میان ۴ دارو ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی، به چند طریق می‌توان یک کمیته داوران ۵ نفره تشکیل داد به طوری که در این کمیته حداقل ۲ داور ایرانی حضور داشته باشد؟

۱ ۶۵

۲ ۱۰۵

۳ ۲۱۰

۴ ۶۰

۳۶

چند عدد ۴ رقمی شامل تنها یک رقم ۲ و یک رقم ۳ موجود است، به طوری که رقم ۲ قبل از رقم ۳ آمده باشد؟

۱ ۲۴۸

۲ ۱۹۲

۳ ۳۰۴

۴ ۳۶۰

۳۷

یک اتوبوس با ۱۰ مسافر در ۱۲ ایستگاه توقف می‌کند و همه مسافریں در این ایستگاه‌ها از اتوبوس پیاده می‌شوند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱ ۱۲۰

۲ 10^{12} ۳ 12^{10}

۴ ۱۴۴

۳۸

چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت به طوری که ارقام آن یک‌درمیان زوج و یا فرد باشند؟ (تکرار مجاز است.)

۱ ۷۲۰

۲ ۸۷۰

۳ ۱۱۲۵

۴ ۱۳۴۵۹

۳۹

از هر یک از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و تبریز ۵ نفر در یک جمع حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۳ نفر از بین این افراد انتخاب کرد. طوری که ۲ نفر آن‌ها از یک شهر و نفر سوم از شهر دیگری باشد؟

۱ ۷۵۰

۲ ۶۰۰

۳ ۵۰۰

۴ ۴۵۰

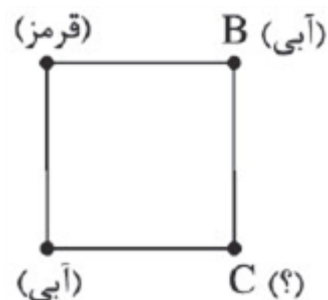
۴۰

حاصل عبارت $\binom{10}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}$ کدام است؟

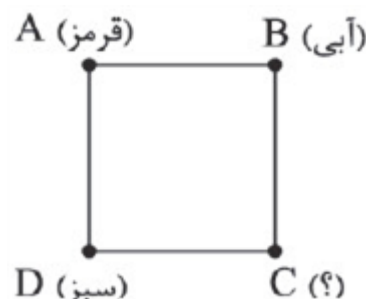
۱ $\binom{11}{3}$ ۲ $\binom{12}{3}$ ۳ $\binom{11}{4}$ ۴ $\binom{11}{9}$

۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر رنگ آمیزی را از رأس A شروع کنیم، ۳ انتخاب داریم. فرض کنید رأس A را با رنگ قرمز رنگ آمیزی کرده ایم. در این صورت دو حالت مختلف به وجود می آید:
الف) B و D هم رنگ باشند، یعنی هر دو به رنگ آبی یا هر دو به رنگ سبز باشند. مثلاً هر دو را با آبی رنگ آمیزی می کنیم. حال برای C دو انتخاب وجود دارد: قرمز یا سبز.



پس در این حالت برای رأس های B، C و D، $2 \times 2 = 4$ انتخاب وجود دارد.
ب) B و D غیر هم رنگ باشند، در این صورت برای این دو رأس دو انتخاب وجود دارد: یا B آبی می شود و D سبز و یا برعکس. یکی از حالات را بررسی می کنیم:



همان طور که دیده می شود، در این صورت C باید اجباراً با رنگ قرمز رنگ آمیزی شود. بنابراین در این حالت برای رأس های B، C و D، $2 \times 1 = 2$ انتخاب وجود دارد.
بنابراین اگر رأس A قرمز باشد، باقی رأس های مربع به $4 + 2 = 6$ طریق رنگ می شوند.
از طرفی برای خود رأس A، ۳ انتخاب داشتیم، پس تعداد کل انتخاب ها برابر است با:

$$3 \times 6 = 18$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲

$$P(n+2, 3) = 10/5 \times P(n, 2) \Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n+2-3)!} = 10/5 \times \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$(n+2)(n+1)n = 10/5 \times n(n-1) \Rightarrow (n+2)(n+1) = 10/5(n-1)$$

$$n^2 + 3n + 2 = 10/5n - 10/5 \Rightarrow n^2 - 7/5n + 12/5 = 0 \Rightarrow 5n^2 - 7n + 12 = 0$$

$$n = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 5 \times 12}}{2 \times 5} = \frac{7 \pm 5}{10} \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = \frac{1}{5} \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموع ۵ جمله اول دنباله برابر است با:

۳

$$k + 2k + 6k + 24k + 48k = 243 \Rightarrow 81k = 243 \Rightarrow k = 3$$

بنابراین جمله چهارم $3 \times 4! = 72$ است و پس از آن، هر جمله ۲ برابر جمله قبلی است. پس جمله پنجم ۱۴۴ و جمله هشتم $144 \times 2 \times 2 \times 2$ است.

$$\frac{144 \times 8 + 144}{2} = \frac{144 \times 9}{2} = 72 \times 9 = 648$$

واسطه حسابی این دو جمله برابر است با:

۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید ۵ نفر را به ترتیب برای توزیعی کتاب ها انتخاب کرد:

$$P(7, 5) = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴ حالت وجود دارد (حالت جواب ندادن هم اضافه می‌شود).

$$\overbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}^{15 \text{ تا}} \times \overbrace{5 \times \dots \times 5}^{15 \text{ تا}} = 4^{15} \times 5^{15} = 4^5 \times (5^3)^5 = (4 \times 5^3)^5 = (4 \times 125)^5 = (500)^5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ۴ نفر برای میز داخلی انتخاب کرده و سپس کنار هم قرار می‌دهیم.

$$\binom{8}{4} \times 3! \times 4! = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!} \times 3! \times 4! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 6 = 10080$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر دانش‌آموز به ۲ طریق بین ۲ همراهش قرار می‌گیرد و ۴ دانش‌آموز و همراه‌های آن‌ها به

۴! حالت می‌توانند در یک ردیف باشند و به تعداد $\binom{7}{4}$ حالت می‌توان ۴ دانش‌آموز انتخاب کرد.

$$\binom{7}{4} \times 4! \times 2^4 = 35 \times 24 \times 16 = 13440$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای پاسخ به ۶ سؤال حالت‌های زیر را می‌بایست بررسی کنیم:

$$(2 \text{ سؤال } 4 \text{ گزینه‌ای}) \Rightarrow \binom{5}{4} \times 2^4 \times \binom{10}{2} \times 4^2$$

یا

$$(1 \text{ سؤال } 4 \text{ گزینه‌ای}) \Rightarrow \binom{5}{5} \times 2^5 \times \binom{10}{1} \times 4^1$$

$$(5 \text{ سؤال } 2 \text{ گزینه‌ای}) \Rightarrow 225 \times 2^6 \times 4^2 + 10 \times 2^5 \times 4^1 = 450 \times 2^7 + 10 \times 2^7 = 460 \times 2^7$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\overbrace{\quad \quad \quad}^{2} \\ 2 \text{ تا } (10 - n), 1 \text{ تا } n$$

$$\text{مجموع ارقام} = 2(10 - n) + n + 2 = 22 - n \xrightarrow{\text{بخت‌پذیرند بر ۳}} n = 1, 4, 7, 10$$

$$\Rightarrow \binom{10}{1} + \binom{10}{4} + \binom{10}{7} + \binom{10}{10} = 10 + 210 + 120 + 1 = 341$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای رسم هر n ضلعی محدب، باید n نقطه از ۱۰ نقطه‌ی روی دایره را انتخاب کنیم:

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 330 + 252 = 582$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\binom{11}{4}}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهار افسر و سه سرباز مجموعاً ۷ نفر هستند که تعداد جایگشت‌های دایره‌ای آن‌ها برابر

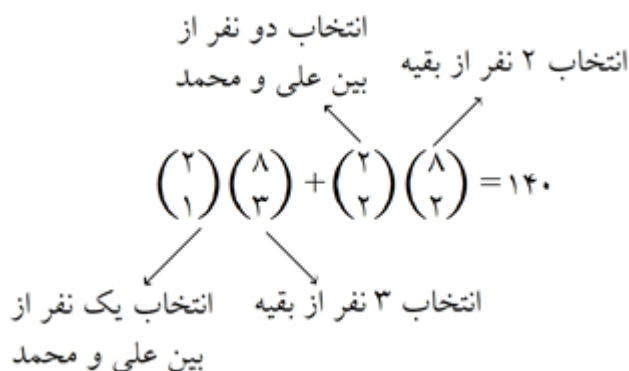
است با:

$$(7 - 1)! = 6! = 720$$

نکته: تعداد جایگشت‌های دایره‌ای (دوری) n شیء متمایز برابر $(n - 1)!$ است.

۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(3n-1, 2) = 2 \times 55 \Rightarrow \frac{(3n-1)!}{(3n-3)!} = 110 \Rightarrow \frac{(3n-1)(3n-2)(3n-3)!}{(3n-3)!} = 110$$

$$\Rightarrow (3n-1)(3n-2) = 110 \Rightarrow 9n^2 - 9n + 2 = 110 \Rightarrow 9n^2 - 9n - 108 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 12 = 0 \Rightarrow (n-4)(n+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=4 \text{ ق ق} \\ n=-3 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{n=4} p\left(\frac{3}{2}n, 2\right) = p(6, 2) = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سه موضوع ادبی، علمی و داستانی به ۳! جایگشت دارند و کتاب‌های ادبی در کنار هم به ۴!، به همین ترتیب علمی ۳! و داستانی ۲! جایگشت دارند. بنابراین:

$$3! \times 4! \times 3! \times 2! = 6 \times 24 \times 6 \times 2 = 1728$$

۱۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تعداد راه‌های انتخاب ۱ مرد به عنوان رئیس گروه $= \binom{5}{1} = 5$

تعداد راه‌های انتخاب ۲ نفر دیگر از بین ۷ (۴ + ۳) نفر باقی‌مانده $= \binom{7}{2}$

$$= \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = 21$$

طبق اصل ضرب $= 5 \times 21 = 105$

۱۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد حالت‌های مختلف که کتاب‌های ریاضی کم‌ترند را محاسبه می‌کنیم:

صفر کتاب ریاضی + پنج کتاب ادبیات $\Rightarrow \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$

یک کتاب ریاضی + چهار کتاب ادبیات $\Rightarrow \binom{7}{4} \binom{5}{1} = \frac{7!}{3!4!} \times 5 = 175$

دو کتاب ریاضی + سه کتاب ادبیات $\Rightarrow \binom{7}{3} \binom{5}{2} = \frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!}{2!3!} = 350$

تعداد حالات مطلوب: $21 + 175 + 350 = 546$

۱۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\binom{n}{26} = \frac{1}{2} \binom{n}{25} \Rightarrow \frac{n!}{26!(n-26)!} = \frac{1}{2} \times \frac{n!}{25!(n-25)!} \Rightarrow \frac{25!(n-25)!}{26!(n-26)!} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{25!(n-26)!}{26 \times 25!(n-26)!} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n-26}{26} = \frac{1}{2} \Rightarrow n-26 = 13 \Rightarrow n = 39$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 + n}{n^2 - 1} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n}{n-1} = \frac{38}{37}$$

۱۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا تعداد اعداد ۵ رقمی بزرگتر از ۳۲۰۴۷ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 ۱) & \frac{۲}{\{۴, ۷\}} \times \underbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{= ۲۴} = ۴۸ \\
 ۲) & \frac{۱}{\{۳\}} \times \frac{۲}{\{۴, ۷\}} \times \underbrace{۳ \times ۲ \times ۱}_{= ۶} = ۱۲ \\
 ۳) & \frac{۱}{\{۳\}} \times \frac{۱}{\{۲\}} \times \frac{۲}{\{۴, ۷\}} \times \underbrace{۲ \times ۱}_{= ۲} = ۴ \\
 ۴) & \frac{۱}{\{۳\}} \times \frac{۱}{\{۲\}} \times \frac{۱}{\{۰\}} \times \frac{۱}{\{۷\}} \times ۱ = ۱
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} ۶۵$$

پس ۳۲۰۴۷ عدد ۶۶ ام خواهد بود.

۱۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد کل حالتها برابر است با:

روز فصل
هفته

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \frac{۴ \times ۷}{\text{نفر اول}} \times \frac{۳ \times ۶}{\text{نفر دوم}} \times \frac{۲ \times ۵}{\text{نفر سوم}} = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷! \end{array}$$

۲۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned}
 \text{می دانیم: } \binom{m}{k} &= \binom{m}{m-k} \Rightarrow \binom{m}{n-1} = \binom{m}{10-n} \\
 \Rightarrow (n-1) + (10-n) &= m \Rightarrow m = 9 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\
 \text{جواب} &= \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4}{3} = 10
 \end{aligned}$$

۲۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۹! $\Rightarrow BA, C, \dots$ بلافاصله بعد از B

جایگشت داخلی $C, B, A \leftarrow ۸! \times ۳! \Rightarrow \boxed{A, B, C}, \dots$ کنار هم

$$\text{جواب} = \frac{۹!}{۸! \times ۳!} = \frac{۹ \times ۸!}{۸! \times ۳ \times ۲} = \frac{۳}{۲}$$

۲۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

کل اعداد $۱۲۰ = ۵! = ۲۴ = ۴!$ عدد آن با ۱ و $۲۴ = ۴!$ عدد بعدی با ۲ و ... شروع می‌شود لذا عدد پنجاهم با ۳۱ شروع می‌شود.

۲۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned}
 \frac{(n+۴) \cancel{(n+۳)} (n+۲) \cancel{(n+۱)}!}{\cancel{(n+۱)}!} &= ۶۳ \cancel{(n+۳)} \\
 \Rightarrow (n+۴)(n+۲) &= ۹ \times ۷ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n+۴ = ۹ \Rightarrow n = ۵
 \end{aligned}$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مسیرهای عبوری از D یا مسیرهای عبوری از C : مسیرهای ممکن

$$17 = 1 \times 3 \times 3 + 4 \times 2 \times 1 = \text{تعداد مسیرها}$$

۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 + 1! = 2 = 2!$$

$$2! + 2 \times 2! = 2!(1 + 2) = 3 \times 2! = 3!$$

$$3! + 3 \times 3! = 3!(1 + 3) = 4 \times 3! = 4!$$

.

$$200! + 200 \times 200! = 200!(1 + 200) = 201 \times 200! = 201!$$

۲۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اعداد ۲ و ۳ را کنار می‌گذاریم. حال با ارقام ۰, ۴, ۵, ۶ اعداد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌نویسیم. بدیهی است که رقم سمت چپ نباید صفر باشد.

$$18 = 3 \times 3 \times 2 \times 1 = \text{تعداد حالات}$$

۲۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وقتی به حروف یک کلمه در صورت سؤال اشاره می‌شود، تکرار مجاز نیست. حروف کلمه MONIAZ همگی متفاوت هستند، پس داریم:

$$6 \times 5 \times 4 + 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 120 + 360 = 480$$

تعداد چهار حرفی ها + تعداد سه حرفی ها

۲۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای حل از مفهوم مجموعه متمم استفاده می‌کنیم. حالتی را که هم (ی س) کنار هم هستند و هم (ه ک) کنار هم هستند را از حالتی که (ی س) کنار هم هستند کم می‌کنیم.

$$96 = 4! \times 2! \times 2! = \text{تعداد حالات} \Rightarrow \text{ا ل (ه ک) (ی س)}$$

$$240 = 5! \times 2! = \text{تعداد حالات} \Rightarrow \text{ا ل ه ک (ی س)}$$

$$144 = 240 - 96 = \text{تعداد حالات مورد نظر}$$

توجه کنید برای مثال در حالتی که (ی س) کنار هم هستند، این دو حرف را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. این بسته با چهار حرف دیگر تشکیل ۵ شیء می‌دهند که ۵ جایگشت دارند. ضمناً (ی و س) هم در داخل بسته ۲ جایگشت دارند. پس تعداد حالت‌ها برابر با $5! \times 2!$ می‌شود.

۲۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حرف «ث» دو بار تکرار شده است، باید ۲ حالت بررسی کنیم:

حالت اول: کلمات بدون حرف تکراری:

یعنی باید با حروف «م»، «ث»، «ل»، «ا» و «ت» کلمات چهارحرفی بسازیم:

$$P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

حالت دوم: کلمات با ۲ بار حرف «ث»:

ابتدا باید دو حرف دیگر را از بین ۴ حرف «م»، «ل»، «ا»، «ت» انتخاب کنیم، سپس این ۲ حرف جدید و ۲ حرف «ث»، جایگشت دارند:

$$\binom{4}{2} \times \frac{4!}{2!} = 6 \times \frac{24}{2} = 72$$

بنابراین طبق اصل جمع، در مجموع $120 + 72 = 192$ کلمه‌ی چهارحرفی داریم.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۰

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = 36 \Rightarrow n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow \binom{9}{6} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های حداکثر k عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی ($k \leq n$) از

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k}$$

رابطه‌ی زیر به دست می‌آید: ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$P(n, 2) + 36 = \binom{2n}{2} \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + 36 = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} + 36 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-2)!}$$

$$= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-2)!} \Rightarrow n(n-1) + 36 = n(2n-1) \Rightarrow n^2 - n + 36 = 2n^2 - n$$

$$\Rightarrow n^2 = 36 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین مجموعه‌ی A ، شش‌عضوی است و تعداد زیرمجموعه‌های حداکثر سه‌عضوی یک مجموعه‌ی شش‌عضوی برابر

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 1 + 6 + 15 + 20 = 42 \quad \text{است با:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. پرایدها را در یک بسته قرار می‌دهیم و با ۳ سمنده جایگشت می‌دهیم: ۳۲

جایگشت سمندها با بسته

$$\uparrow$$

$$4! \times 4! = (4!)^2$$

↓
جایگشت پرایدها

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$4 + 1 = 5 \Rightarrow 5! = \text{جایگشت شی} = 5!$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: طبق تعریف فاکتوریل داریم $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. قرارداد ۳۴

$$0! = 1 \quad \text{می‌کنیم:}$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$(2x - x^2)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 2 \\ \text{یا} \\ 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

بنابراین ۳ مقدار برای x وجود دارد.

۳۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته (ترکیب): به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز برابر است با:

راه حل اول: برای اینکه حداقل ۲ داور ایرانی داشته باشیم، باید تعداد حالاتی که ۲ داور ایرانی، ۳ داور ایرانی و ۴ داور ایرانی داریم را با هم جمع کنیم:

$$\begin{array}{c} \text{۳ غیر ایرانی} \quad \text{۲ غیر ایرانی} \quad \text{۱ غیر ایرانی} \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \binom{4}{2} \times \binom{5}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{5}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{5}{1} = 60 + 40 + 5 = 105 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \text{۲ ایرانی} \quad \text{۳ ایرانی} \quad \text{۴ ایرانی} \end{array}$$

راه حل دوم: تعداد کل حالت‌های تشکیل کمیته ۵ نفره برابر است با:

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

تعداد حالت‌هایی که کمتر از ۲ داور ایرانی در کمیته حضور دارند برابر است با:

$$\binom{4}{0} \times \binom{5}{5} + \binom{4}{1} \times \binom{5}{4} = 1 + 20 = 21$$

$$126 - 21 = 105$$

بنابراین تعداد حالت‌هایی که حداقل ۲ داور ایرانی در کمیته حضور دارند برابر است با:

۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سه حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) ۲ در جایگاه هزارگان بیاید. در این صورت برای انتخاب جای رقم ۳، سه حالت داریم و برای ۲ جایگاه دیگر هر کدام ۸ حالت داریم، پس تعداد این اعداد می‌شود:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 64 \xrightarrow{\text{سه حالت برای ۳}} 64 \times 3 = 192$$

(۲) ۲ در جایگاه صدگان بیاید. در این صورت برای رقم ۳، دو حالت و برای ۲ جایگاه دیگر به ترتیب ۷ و ۸ حالت داریم، پس این تعداد نیز برابر می‌شود با:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 56 \xrightarrow{\text{دو حالت برای ۳}} 56 \times 2 = 112$$

(۳) ۲ در جایگاه دهگان بیاید. در این صورت برای رقم ۳، یک حالت و برای رقم‌های دیگر ۷ و ۸ حالت داریم، پس جواب برابر می‌شود با:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 56$$

$\{2\} \quad \{3\}$

پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$192 + 112 + 56 = 360$$

۳۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

هر کدام از ۱۰ مسافر می‌توانند در هر کدام از ۱۲ ایستگاه پیاده شوند و به عبارت دیگر هر مسافر ۱۲ حالت برای پیاده شدن دارد. بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{12 \times 12 \times \dots \times 12}_{10 \text{ تا}} = 12^{10}$$

۳۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو حالت داریم:

فرض می‌کنیم که عدد ۴ رقمی با هزارگان زوج (غیر صفر) شروع شود. در این صورت باید در جایگاه‌های صدگان، دهگان، و یکان به ترتیب ارقام فرد، زوج و فرد قرار بگیرد. یعنی تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\underbrace{\text{ارقام زوج}}_4 \underbrace{\text{ارقام فرد}}_5 \underbrace{\text{ارقام زوج}}_5 \underbrace{\text{ارقام فرد}}_5 \Rightarrow 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

(۲) فرض کنیم که عدد با هزارگان فرد شروع شود. در این صورت سایر جایگاه‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$\underbrace{\text{ارقام فرد}}_5 \underbrace{\text{ارقام زوج}}_5 \underbrace{\text{ارقام فرد}}_5 \underbrace{\text{ارقام زوج}}_5 \Rightarrow 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

بنابراین بنابر اصل جمع کل حالت‌های ممکن برابر است با: $500 + 625 = 1125$

۳۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا شهری که ۲ نفر از آن باید انتخاب شوند را به $\binom{4}{1}$ حالت و سپس شهر نفر سوم را به $\binom{3}{1}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

دو نفر هم‌شهری به $\binom{5}{2}$ حالت و نفر سوم نیز به $\binom{5}{1}$ حالت انتخاب می‌شود. پس تعداد حالات برابر می‌شود با:

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 4 \times 3 \times 10 \times 5 = 600$$

۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته (قاعده‌ی پاسکال): $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

اکنون با جای‌گذاری $\binom{4}{4}$ به جای $\binom{3}{3}$ و استفاده متوالی از قاعده‌ی پاسکال داریم:

$$\underbrace{\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \dots + \binom{10}{3}}_{\binom{5}{4}} = \underbrace{\binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \dots + \binom{10}{3}}_{\binom{6}{4}} = \underbrace{\binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{10}{3}}_{\binom{7}{4}} + \dots$$

$$\binom{10}{3} = \dots = \binom{11}{4}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

