



کتابخانه ثانیه



Kia-ac.ir



@Kia_ac



جزوه خلاصه شده حسابان

تهیه شده توسط

کارشناس ارشد ریاضی

شهریار حسین پور

تلفن تماس ۰۹۱۱۱۴۳۰۵۵۸

Mathshahryar۲۲.mihanblog.com

دانش آموزان عزیز بهترین منبع برای خواندن، کتاب
است لیکن جهت خلاصه برداری و کم بودن وقت برای
بعضی از دوستان! این مجموعه مطابق کتاب تهیه شده
است.

وجود اشتباه محتمل است به دقت خود شک نکنید!؟

$$a_n = a + (n - 1)d \quad d = a_n - a_{n-1} \quad \text{دنباله حسابی:}$$

$$a, b, c \quad \text{سه جمله متوالی} \quad 2b = a + c$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

دنباله هندسی:

$$a_n = aq^{n-1} \quad q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$a, b, c \quad \text{سه جمله متوالی} \quad b^2 = ac$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{تعداد جملات متناهی}$$

۱- در دنباله حسابی ... و ۱۴ و ۱۰ و ۶ و ۲ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۲۰۰ گردد؟

$$S_n > 200 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(2) + (n-1) \times 4) > 200$$

$$d = 6 - 2 = 4 \quad n(2 + 2n - 2) > 200 \rightarrow 2n^2 > 200$$

$$n^2 > 100 \quad n = 11$$

۲- در یک دنباله حسابی، جمله دوازدهم برابر ۳۵ و مجموع هشت جمله اول برابر ۱۰۰ می باشد دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} a_{12} = 35 &\rightarrow a + 11d = 35 \\ S_8 = 100 &\rightarrow \frac{8}{2}(2a + 7d) = 100 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + 11d = 35 \\ 2a + 7d = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - 22d = -70 \\ 2a + 7d = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -15d = -45 \\ d = 3 \end{cases}$$

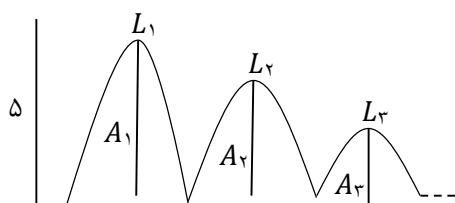
$$a + 11(3) = 3\Delta \rightarrow \alpha = 2$$

۲ و ۵ و ۸ و ...

۳- توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاع که رها شود، پس از برخورد با زمین $0/6$ ارتفاع اولیه بالا می رود.

فرض کنید این توپ از زمین به هوا پرتاب شود و تا ارتفاع ۵ متر بالا رود می خواهیم بدانیم از شروع پرتاب تا

زمان ایستادن چه مسافتی را طی می کند؟



چون هر دفعه ارتفاع کم می شود و تا لحظه ایستادن

نامتناهی است. لذا از جدول مجموع استفاده می شود.

$$A_1 = 5 \quad A_2 = 5 \times 0/6 = 3 \quad A_3 = 3 \times 0/6 = 1/2$$

$$L_1 = 10 \quad L_2 = 5 \quad L_3 = 3/2 \quad q = 0/6 \quad S_n = \frac{a}{1-q} \rightarrow S_n = \frac{10}{1-0/6} = 25$$

۳- در دنباله هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید.

$$\frac{1}{3} \text{ و } -\frac{1}{9} \text{ و } \frac{1}{27} \text{ و } -\frac{1}{81} \text{ و } \dots$$

دنباله نامتناهی است و $1 > \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} > 0$ یعنی می توان از حد مجموع استفاده نمود.

$$S_n = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

۴- در دنباله حسابی زیر مجموع ۲۰ جمله اول چیست؟

$$-5 \text{ و } 1 \text{ و } 7 \text{ و } \dots \quad S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \quad (\text{نوشته شود})$$

$$d = 1 - (-5) = 6 \quad S_{20} = \frac{20}{2}(2(-5) + 19(6)) = 10(-10 + 114) = 1040$$

$$a = -5$$

۵- جمله سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۸ و -۶۴ می باشد. مجموع چند جمله ی این دنباله با شروع از جمله اول برابر ۱۷۰- می شود.

$$\frac{a_3}{a_6} = \frac{aq^2}{aq^5} = q^3 = \frac{-64}{8} = -8 \rightarrow q = -2$$

$$a_3 = 8 \rightarrow a(-2)^2 = 8 \rightarrow a = 2$$

$$S_n = -170 \rightarrow \frac{2((-2)^n - 1)}{-2 - 1} = -170 \rightarrow 2((-2)^n - 1) = 3 \times 170$$

$$(-2)^n - 1 = 255 \rightarrow (-2)^n = 256 \rightarrow n = 8$$

۶- ابتدا نیمی از مساحت مربعی را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می کنیم به همین ترتیب، پس از چند مرتبه حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

هر باز نصف مربع رنگ می شود پس قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شود.

$$\frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{8} \text{ و } \dots \text{ و } \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{99}{100}$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > \frac{99}{100} \rightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > -\frac{1}{100} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^{n+1} > 100 \rightarrow n = 7$$

۷- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیو اکتیو لایه های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. حداقل چندلایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد.

جواب مانند سؤال بالا می باشد.

$$\frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{8} \text{ و } \dots$$

$$S_n > \frac{99}{100} \rightarrow n = 7$$

۸- مجموع هشت جمله اول یک دنباله هندسی ۸۲ برابر مجموع چهار جمله اول آن است. قدر نسبت را مشخص کنید.

$$S_8 = 82S_4$$

$$\frac{q(q^8-1)}{q-1} = 82 \frac{q(q^4-1)}{q-1} \text{ با فرض } q \neq 1 \quad (q^4-1)(q^4+1) = 82(q^4-1)$$

$$q^4 + 1 = 82 \rightarrow q^4 = 81 \rightarrow q = 3$$

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری:

$$P(x) = q(x) \quad Q(x) + R(x)$$

باقی مانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

۱- در تقسیم بر $x - a$ ، باقی مانده همان $P(a) = R(a)$ است.

۲- درجه باقی مانده کمتر از درجه مقسوم علیه است.

مثال ۱: مقدار k را چنان تعیین کنید که چند جمله ای $P(x) = 2x^3 - kx^2 - x + 3$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد.

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow P(-1) = R(-1) = 2(-1)^3 - k(-1)^2 - (-1) + 3 = 0$$

$$2 - k + 2 = 0 \rightarrow k = 4$$

۲- مقادیر m و n را چنان بیابید که جمله ای $x^2 + mx + n$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد (یا بر $(x^2 - 2)$ بخش پذیر باشد).

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow P(2) = R(2) = 2^2 + m(2) + n = 0 \quad 2m^0 + n = -4$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow P(-1) = R(-1) = (-1)^2 + m(-1) + n = 0 \quad n - m = -1$$

$$\begin{cases} 2m + n = -4 \\ m - n = +1 \end{cases} \quad 2m = -3 \quad m = -1 \quad n - (-1) = -1 \quad n = -2$$

۳ a را چنان بیابید که یگ جواب معادله $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ باشد سپس جواب های دیگر معادله را بدست آورید.

$$x = 2 \rightarrow 2^3 - 2(2)^2 + a(2) + 2 = 0 \rightarrow 8 - 8 + 2a + 2 = 0 \rightarrow a = -1$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

	۱	-۲	-۱	۲
۲	۱	۰	-۱	۰

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

۴ اگر باقی مانده ی تقسیم چند جمله ای $x + 2$ و $x - 3$ به ترتیب ۱ و ۲ باشد باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - x - 6$ چیست؟

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

$$P(x) = (x - 3)(x + 2)Q(x) + ax + b$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow P(3) = R(3) = 3a + b = 2$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow P(-2) = R(-2) = -2a + b = 1$$

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \quad \Delta a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{5} \quad b = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

بسط دو جمله ای:

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots + b^n$$

$$\text{جمله } (k+1)\text{ام} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

۱- حاصل عبارت $(1 - \frac{2}{x})^5$ چیست؟

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right)^5 = 1 - 5(1)^4 \left(\frac{2}{x}\right) + \frac{5(5-1)}{2!} (1)^3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 - \frac{5(5-1)(5-2)}{3!} (1)^2 \left(\frac{2}{x}\right)^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!} \times 1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 + \left(\frac{2}{x}\right)^5 = 1 - \frac{10}{x} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^3} + \frac{90}{x^4} + \frac{32}{x^5}$$

۲- جمله سوم بسط دو جمله ای $\left(4x - \frac{1}{x}\right)^7$ چیست؟

$$\binom{7}{2} (4x)^{7-2} \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{7 \times 6}{2} \times 1024x^5 \times \frac{1}{x^2} = 21504x^3$$

۳- عبارت $(2x + 3y)^6$ را بسط دهید.

$$\begin{aligned} (2x + 3y)^6 &= 64x^6 + 6(2x)^5(3y) + \frac{6 \times 5}{2} (2x)^4(3y)^2 + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} (2x)^3(3y)^3 \\ &+ \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!} (2x)^2(3y)^4 + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5!} (2x)(3y)^5 + 729y^6 \end{aligned}$$

۷۲ لیتر آب میوه و ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند. حداقل تعداد شیشه ها را تعیین کنید.

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$40 = 2^3 \times 5 \quad \text{م.م.ب} = 2^3 = 8 \quad \frac{72}{8} = 9 \quad \frac{48}{8} = 6 \quad \frac{40}{8} = 5$$

$$48 = 2^3 \times 6 \quad \text{شیشه} = 9 + 6 + 5 = 20 \quad \text{جواب}$$

معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta > 0 \quad \text{دو جواب} \quad \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \quad \text{ریشه مضاعف} \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \quad \text{ریشه نداریم}$$

$$a + b + c = 0 \rightarrow x = 1 \text{ و } x = \frac{c}{a}$$

$$a + c = b \rightarrow x = -1 \text{ و } x = -\frac{c}{a}$$

α و β ریشه های معادله درجه دوم باشند.

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - 2\alpha\beta$$

$$\alpha\beta = P = \frac{c}{a} \quad \alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$X^r - SX + P = 0$$

سهمی:

$$y = ax^r + bx + c$$

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{محور تقارن}$$

$$S \begin{cases} -\frac{b}{2a} & a > 0 & \min \\ \frac{\Delta}{4a} & a < 0 & \max \end{cases}$$

۱- معادله های زیر را حل کنید.

$$1) (x^r - 1)^r + (x^r - 1)^r - 2 = 0$$

$$((x^r - 1)^r + 2)((x^r - 1)^r - 1) = 0$$

$$(x^r - 1)^r + 2 \neq 0 \quad (x^r - 1)^r - 1 = 0 \rightarrow (x^r - 1)^r = 1 \rightarrow \begin{cases} x^r - 1 = 1 \rightarrow x^r = 2 \\ x = \pm\sqrt[r]{2} \\ x^r - 1 = -1 \rightarrow x^r = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$۲) \left(\frac{x^2}{3} - ۲\right)^2 - ۷\left(\frac{x^2}{3} - ۲\right) + ۶ = ۰$$

$$\left(\frac{x^2}{3} - ۲ - ۶\right)\left(\frac{x^2}{3} - ۲ - ۱\right) = ۰ \begin{cases} \frac{x^2}{3} = ۸ \rightarrow x^2 = ۲۴ \rightarrow x = \pm\sqrt{۲۴} \\ \frac{x^2}{3} = ۳ \rightarrow x^2 = ۹ \rightarrow x = \pm ۳ \end{cases}$$

۳- بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید.

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4^2 - 4(-1)(1))}{4 \times -1} = \frac{-(16 + 4)}{-4} = ۵$$

یا

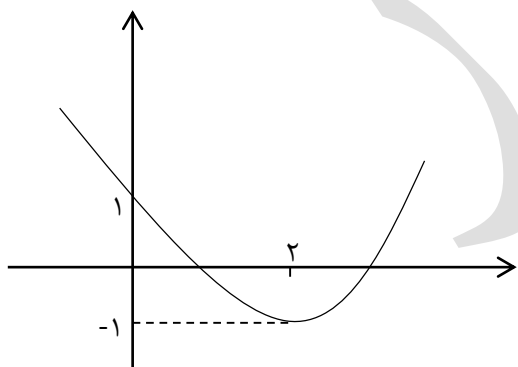
$$x = -\frac{4}{2(-1)} = ۲ \quad f(۲) = -(۲)^2 + 4(۲) + 1 = -4 + 9 = ۵$$

۴- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $۳ \pm ۲\sqrt{۲}$ باشد.

$$S = ۳ + ۲\sqrt{۲} + ۳ - ۲\sqrt{۲} = ۶ \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = ۰$$

$$P = (۳ + ۲\sqrt{۲})(۳ - ۲\sqrt{۲}) = ۹ - ۸ = ۱$$

۵- در شکل مقابل نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را تعیین کنید.



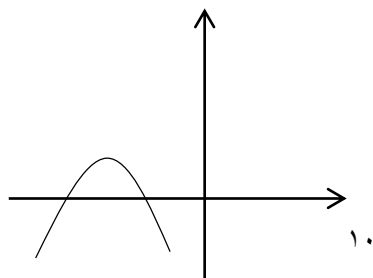
$$x = ۲ \rightarrow \frac{-b}{2a} = ۲ \rightarrow b = -4a$$

$$\begin{cases} ۱ & -1 = 4a + 2b + c \\ -۱ & \Rightarrow 4a - 8a + 1 = -1 \rightarrow -4a = -2 \\ & a = \frac{1}{2} \\ & b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۰ \\ ۱ \end{cases} \quad 1 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 1$$

۶- در شکل زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد

جوابهای معادله $ax^2 + bx + c = ۰$ را تعیین کنید.



دارد $\max a < 0$

دو ریشه منفی اند $\frac{c}{a} > 0 \rightarrow c < 0$

دو ریشه منفی اند $\frac{b}{a} > 0 \rightarrow b < 0$

۷- اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد معادله ای بنویسید که ریشه های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\alpha} & S &= x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5/4}{-5/4} = -1 \\ \text{روش اول} & & P &= x_1 \times x_2 = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-5/4} = -\frac{4}{5} \\ x_2 &= \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

$$\left(x^2 - (-1)x - \frac{4}{5} = 0\right) \times 5 \rightarrow 5x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{روش دوم} \quad x &= \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{1}{x} \rightarrow \left(4\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right) - 5 = 0\right) \times x^2 \\ 4 - 5x - 5x^2 &= 0 \rightarrow 5x^2 + 5x - 4 = 0 \end{aligned}$$

۸- اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشد بودن حل معادله حاصل $\frac{\alpha}{\beta^2+1} + \frac{\beta}{\alpha^2+1}$ را بیابید.

$$\frac{\alpha^3 + \alpha + \beta^3 + \beta}{\beta^2 \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + 1} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha + \beta}{(\alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1} \quad \begin{aligned} \alpha + \beta &= 3 \\ \alpha\beta &= -5 \end{aligned}$$

$$= \frac{3^3 - 3(-5)(3) + 3}{(-5)^2 + (3)^2 - 2(-5) + 1} = \frac{27 + 45 + 3}{25 + 9 + 10 + 1} = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}$$

۹- m را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله $mx^2 - 4x + 15$ سه برابر ریشه ی دیگر باشد.

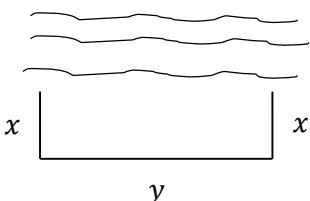
$$\alpha = 3\beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{4}{m} \rightarrow 3\beta + \beta = \frac{4}{m} \rightarrow 4\beta = \frac{4}{m} \rightarrow \beta = \frac{1}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{m}$$

$$\alpha \beta = \frac{1}{m} \rightarrow \frac{3}{m} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \rightarrow m^2 = 3m$$

$$m(m - 3) = 0 \begin{cases} m = 0 & \text{غ ق ق} \\ m = 3 \end{cases}$$

۱۰- بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که با ۱۰۰ متر نرده می توان محصور کرد چقدر است.



$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

$$S = xy = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

$$x = -\frac{100}{2(-2)} = 25 \rightarrow y = 100 - 2(25) = 50$$

$$S = 25 \times 50 = 1250$$

معادلات گویا و اصم :

معادلات زیر را حل نمایید .

$$11) \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4} \right) x(x+2)(x-2)$$

$$3x(x-2) + 2(x^2-4) = 4x^2-4x$$

$$3x^2 - 6x + 2x^2 - 4 = 4x^2 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Delta = (-2)^2 - 4(1)(-4) = 4 + 16 = 20$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{20}}{2 \times 1} \begin{cases} \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} & \text{ق ق} \\ \frac{2-2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5} & \text{ق ق} \end{cases}$$

۲) مجموعه جواب معادله $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1}$ برابر است با :

$$\left(\frac{x}{x-3} + \frac{2}{x-1} = 5\right) (x-3)(x-1)$$

$$x^2 - x + 3x - 9 = 5(x^2 - 4x + 3) = 5x^2 - 20x + 15$$

$$4x^2 - 22x + 24 = 0 \rightarrow 2(2x^2 - 11x + 12) = 0$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4(2)(12) = |21| - 96 = 25$$

$$\frac{11 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{16}{4} = 4 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

-۳

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = 2$$

$$(\sqrt{1+x} = 2 + \sqrt{x})^2$$

$$1+x = 2 + x + 2\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} = -1 \quad \text{غ ق ق}$$

-۴ عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن برابر ۲۰ باشد.

$$x - \sqrt{x} = 20 \rightarrow (x - 20 = \sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 - 40x + 400 = x$$

$$x^2 - 41x + 400 = 0 \rightarrow (x-16)(x-25) = 0$$

$$x = 16 \quad x = 25$$

-۵

$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} + x^2 - 5x = 19$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} + x^2 - 5x + 3 = 12$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} = t \rightarrow x^2 - 5x + 3x = t^2$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t+4)(t-3) = 0 \begin{cases} t = -4 \rightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 3} = -4 \text{ غ ق} \\ t = 3 \rightarrow (\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 3)^2 \rightarrow x^2 - 5x + 3 = 9 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ x = -1 \end{cases}$$

۶- نقطه ای روی خط $y = 2x$ بیابید که از دو نقطه $A(1,1)$ و $B(3,-1)$ به یک فاصله باشد.

$$M \begin{matrix} x \\ 2x \end{matrix} \quad |AM| = |BM| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (2x-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (2x+1)^2}$$

$$(\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 4x + 1})^2$$

$$5x^2 - 6x + 2 = 5x^2 - 2x + 10 \quad -4x = 8 \rightarrow x = -2$$

-۷

$$\sqrt{x + \sqrt{x-1}} - \sqrt{2x-2} = 0$$

$$(\sqrt{x + \sqrt{x-1}} - \sqrt{2x-2})^2 \rightarrow x + \sqrt{x-1} = 2x - 2$$

$$(\sqrt{x-1} = x-2)^2 \rightarrow x-1 = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(5) = 25 - 20 = 5 \quad \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

۸- 150 kg محلول آب نمک ۴ درصدی در اختیار داریم. چند کیلوگرم نمک به آن اضافه کنیم تا محلول حاصل ۱۰ درصد شود؟

$$\frac{4}{100} \times 150 = 6 \text{ kg}$$

$$\frac{6+x}{150+x} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \rightarrow 60 + 10x = 150 + x \\ 9x = 90 \rightarrow x = 10 \text{ kg}$$

۹- در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر باهم کار می کنند، کار نیشاکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می کرد هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را چند روزه تمام می کنند.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \quad \text{کارگر اول ۳۰}$$

$$\text{کارگر دوم ۴۵}$$

$$\frac{x+15+x}{x(x+15)} = \frac{1}{18} \rightarrow 36x + 270 = x^2 + 15x$$

$$x^2 - 21x - 270 = 0 \rightarrow (x - 30)(x + 9) = 0 \begin{cases} x = 30 \\ x = -9 \end{cases}$$

۱۰- $P(x)$ یک چند جمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۲ است. $P(x)$ را به گونه ای تعیین کنید

$$\text{که } P(1) = 4 \text{ و } P(2) = 13$$

$$P(x) = 2x^2 + ax + b$$

$$\begin{aligned} P(1) &= 2(1)^2 + a(1) + b = 4 \rightarrow \bar{a} + \bar{b} = \bar{4} \\ P(2) &= 2(2)^2 + a(2) + b = 13 \rightarrow 2a + b = 5 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

۱۱- نامعادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$۲) |x| < x^2$$

$$y_1 = |x|$$

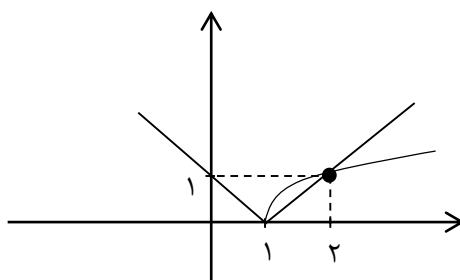
$$y_2 = x^2$$

از برخورد y_1 و y_2 نقاط $x = 2$ بدست می آید چون $y_1 < y_2$.

مجموعه جواب $[2, +\infty]$

$$۳) \sqrt{x-1} \leq |x-1|$$

$$y_1 = \sqrt{x-1}$$



$$y_2 = |x - 1|$$

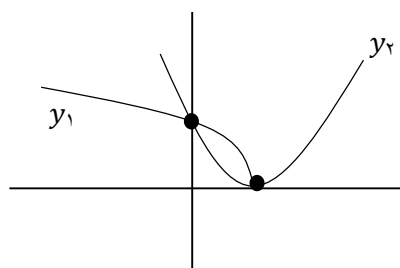
۱۲- معادله زیر را به روش هندسی حل نمایید.

$$\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$$

$$\sqrt{1-x} = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$y_1 = \sqrt{1-x}$$

$$y_2 = (x-1)^2$$



با توجه به نمودار از برخورد y_1 و y_2 در طول $x = 0$ و $x = 1$ بدست می آید. جواب: $\{0, 1\}$

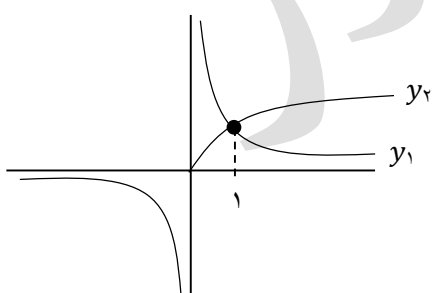
۱۳- برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید.

$$۱) |ab| = |a||b|$$

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a||b|$$

$$۲) |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\begin{aligned} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{aligned} \rightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$



۱۴) نامعادله $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$ را به روش هندسی حل نمایید.

نقطه تقاطع y_1 و y_2 ، نقطه $x = 1$

است و چون $y_1 < y_2$ جواب $(1, +\infty)$

$$y_1 = \frac{1}{x} \text{ و } y_2 = \sqrt{x}$$

$$x \geq 0$$

۱۵- نامعادله $|x + 2| < |x - 1|$ را حل نمایید.

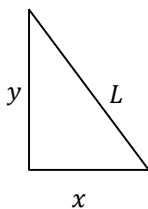
$$[x + 2]^2 < [x - 1]^2 \rightarrow (x + 2)^2 - (x - 1)^2 < 0$$

$$(x + 2 + x - 1)(x + 2 - x + 1) < 0$$

$$(2x + 1)(3) < 0 \rightarrow 2x + 1 < 0 \rightarrow 2x < -1 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

« تابع »

۱- مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۴ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن x به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2}xy = 4$$

$$xy = 8 \rightarrow y = \frac{8}{x} \quad L^2 = x^2 + y^2$$

$$L(x) = x^2 + \frac{64}{x^2}$$

۲- آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ باهم مساویند؟ چرا؟

$$D_f: 1 + \sqrt{1+x^2} \neq 0 \Rightarrow D_f: \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_f = D_g \quad \Rightarrow f = g$$

$$D_g: \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2(1-\sqrt{1+x^2})}{1-1-x^2} = \sqrt{1+x^2} - 1 = g(x)$$

۳- آیا دو تابع زیر باهم مساویند؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-9x^2}{1+3x} & x \neq \frac{1}{3} \\ 2 & x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$g(x) = 1 - 3x$$

$$D_f = D_g = IR \begin{cases} x \neq -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} f(x) &= \frac{(1-3x)(1+3x)}{1+3x} = 1-3x = g(x) \\ g(x) &= 1-3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1+1 = 2 = f(x) \end{aligned}$$

لذا $f = g$

۳- a را چنان تعیین کنید که دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ a & x = 3 \end{cases}$ و $g(x) = x+3$ باهم مساوی باشند.

$$g(3) = 3+3 = 6$$

$$f(3) = a \Rightarrow a = 6$$

۴- تابع $y = |1-x| - 3$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار، بر آن را معلوم کنید.

$$y = \begin{cases} x-1-3 = x-4 & x \geq 1 \\ 1-x-3 = -x-2 & x < 1 \end{cases}$$

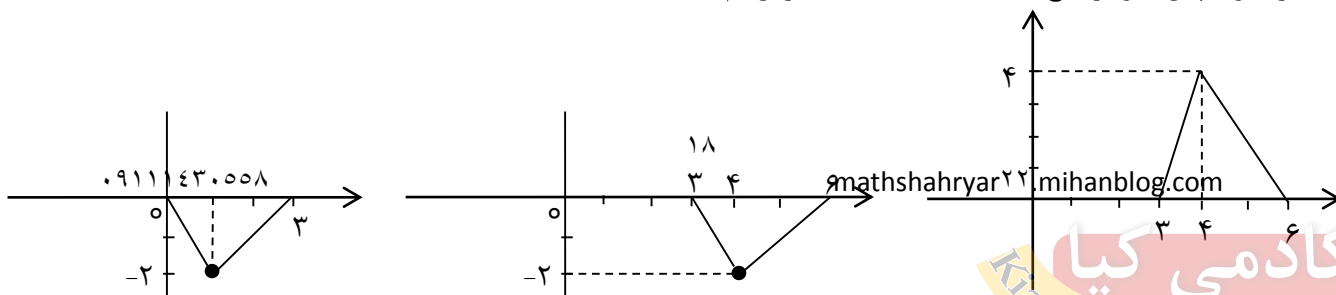
$$y \geq -3 \Rightarrow IR = [-3, +\infty)$$

۵- تابع $y = |x-1| + |x-1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار، برد آن را معلوم کنید.

$$y = \begin{cases} -x-1-x+1 = -2x & x < -1 \\ x+1-x+1 = 2 & -1 \leq x < 1 \\ x+1+x-1 = 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$R: [2, +\infty)$$

۶- در زیر نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال، ابتدا نمودار تابع $y = f(x-3)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y = -2f(x-3)$ را رسم کنید.



۷- اگر $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = 3x - 2$ باشد، آنگاه حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(3f + 2g)(4) = 3f(4) + 2g(4) = 3 \times \frac{1}{4-3} + 2(3(4) - 2) = 1 + 20 = 21$

ب) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{IR \mid 3x - 2 \neq 3\} = \{IR \mid x \neq \frac{5}{3}\} = IR - \{\frac{5}{3}\}$

۸- اگر $f = \{(4, 5), (6, 2), (5, 3)\}$ و $g = \{(2, 4), (5, 1), (8, 2)\}$ تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را حساب کنید.

$f \circ g = \{(4, 3)\}$ $g \circ f = \{(4, 1), (6, 4)\}$

۹- اگر $f(x) = \frac{\Delta x}{3x-7}$ و $g(x) = \frac{x^\Delta-1}{\Delta x-15}$ ، تابع $\frac{f}{g}(x)$ و دامنه آن را بنویسید.

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\Delta x}{3x-7}}{\frac{x^\Delta-1}{\Delta x-15}} = \frac{\Delta x(\Delta x-15)}{(3x-7)(x^\Delta-1)}$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \left(x \neq \frac{7}{3}\right) \cap (x \neq 3) - \left\{x \mid \frac{x^\Delta-1}{\Delta x-15} = 0\right\}$$

$$= IR - \left\{1, \frac{7}{3}, 3\right\}$$

۱۰- اگر $f(x) = \frac{2}{x-2}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\left(\frac{2f}{g}\right)(4) = \frac{2f(4)}{g(4)} = \frac{2 \times \frac{2}{4-2}}{4/4} = \frac{2}{1} = 2$

$$ب) D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq 0 \mid \frac{4}{x} \neq 2\right\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

۱۱- اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند مطلوبست

$$الف) 3(f-g)(4) = 3(f(4) - g(4)) = 3\left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{3} - 1\right) = 1 - 3 = -2$$

$$ب) D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 3 \mid \sqrt{x-3} \neq 1\}$$

$$= \{x \geq 3 \mid x \neq 4\} = [3, +\infty) - \{4\}$$

$$f \circ g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{اگر } f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ و } g(x) \text{ را به گونه ای بیابید که}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \rightarrow f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$(x^2+1)g(x) = (x^2-1)g(x) + x^2-1 \rightarrow (x^2+1-x^2+1)g(x) = x^2-1$$

$$g(x) = \frac{x^2-1}{2}$$

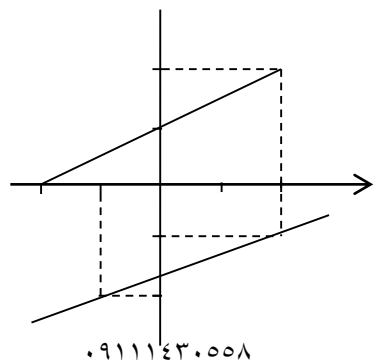
۱۳- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ و $f \circ g(x) = x^2 + 4x + 5$ باشد، $g(x)$ را بدست آورید.

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 \rightarrow f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 + 4x + 5$$

$$(g(x))^2 + 2g(x) + 1 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x + 2)^2$$

$$g(x) + 1 = |x + 2| \rightarrow g(x) = |x + 2| - 1$$

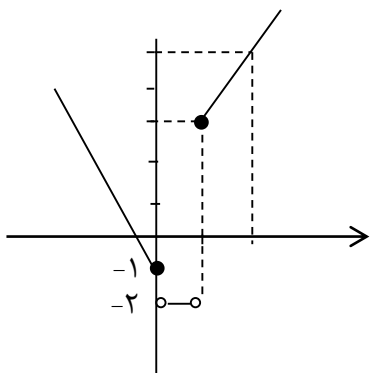
۱۴- با استفاده از نمودارهای g و f که در یک دستگاه مختصات رسم شده اند، عبارت های زیر را حساب کنید.



$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = 0$$

$$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 2 \times -1 = -2$$

۱۵- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -2 & 0 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.



$$D_f: \mathbb{R}$$

$$R_f: \{-2\} \cup [-1, +\infty)$$

۱۶- زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید.

$$۱) f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 - 1} = -\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = -f(x) \quad \text{فرد}$$

$$۲) f(x) = x^4 + 2|x|$$

$$f(-x) = (-x)^4 + 2|-x| = x^4 + 2|x| = f(x) \quad \text{زوج}$$

$$۳) f(x) = x^4 + \cos x$$

$$f(x) = (-x)^4 + \cos(-x) = x^4 + \cos x = f(x) \quad \text{زوج}$$

۴- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$ یک تابع فرد باشد.

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{x^2 + 4a^2}) \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 4a^2}}{x + \sqrt{x^2 + 4a^2}} = \log \frac{x^2 + x^2 - 4a^2}{x + \sqrt{x^2 + 4a^2}}$$

$$= \log 4a^2 - \log x + \sqrt{x^2 + 4a^2} = -f(x)$$

$$\Rightarrow \log 4a^2 = 0 \rightarrow 4a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

۵- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد $f \times g$ و $f \circ g$ از نظر زوج یا فرد چگونه است؟

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times -g(x) = -f(x)g(x) = -(f \times g)(x) \text{ فرد}$$

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = f \circ g(x) \text{ زوج}$$

۶- ثابت کنید تابع $f(x) = (x-3)^2 + 2$ برای $x \geq 3$ وارون پذیر است. سپس وارون آن را بدست آورید.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 3)^2 + 2 = (x_2 - 3)^2 + 2$$

$$\Rightarrow |x_1 - 3| = |x_2 - 3| \xrightarrow{x \geq 3} x_1 - 3 = x_2 - 3 \rightarrow x_1 = x_2$$

وارون پذیر است.

$$y = (x-3)^2 + 2 \rightarrow y - 2 = (x-3)^2 \rightarrow x - 3 = \sqrt{y-2}$$

$$x = \sqrt{y-2} + 3 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 3$$

۷- وارون تابع $y = \frac{x-5}{2x+3}$ را بدست آورید.

$$y = \frac{x-5}{2x+3} \rightarrow 2xy + 3y = x - 5$$

$$2xy - x = -5 - 3y$$

$$x(2y-1) = -5-3y \rightarrow x = \frac{-5-3y}{2y-1} = \frac{3y+5}{1-2y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{1-2x}$$

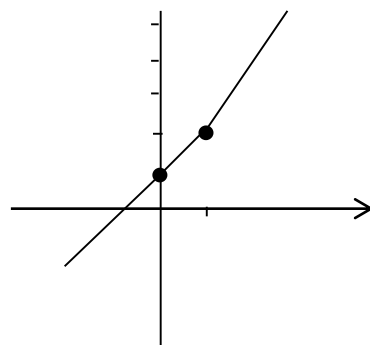
۸- اگر $f(x) = 4x - 3$ و $g(x) = x + 2$ تابع $(g \circ f)^{-1}$ را حساب کنید.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 2 = 4x - 3 + 2 = 4x - 1$$

$$y = 4x - 1 \rightarrow y + 1 = 4x \rightarrow x = \frac{y+1}{4} \rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

۹- ابتدا نمودار تابع $y = 2x + |x - 1|$ را رسم کنید و با استفاده از آن وارون پذیری آن را بررسی کنید.

$$y = 2x + |x - 1| = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases}$$



۱۰- ثابت کنید تابع $f(x) = 1 - \sqrt{4 - x^2}$ روی دامنه $[0, 2]$ یک به یک است. وارون آن را بدست آورید.

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow 1 - \sqrt{4 - x_1^2} = 1 - \sqrt{4 - x_2^2} \rightarrow 4 - x_1^2 = 4 - x_2^2$$

$$x_1^2 = x_2^2 \rightarrow |x_1| = |x_2| \xrightarrow{[0, 2]} x_1 = x_2 \quad \text{یک به یک است}$$

$$y = 1 - \sqrt{4 - x^2} \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 1 - y \rightarrow 4 - x^2 = (1 - y)^2$$

$$x^2 = 4 - (1 - y)^2 \rightarrow |x| = \sqrt{4 - (1 - y)^2} \xrightarrow{[0, 2]} x = \sqrt{4 - (1 - y)^2}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{4 - (1 - x)^2}$$

۱۱- وارون پذیری تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ را بررسی کرده و سپس وارون آن را بدست آورید.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 6 = (x - 1)^3 + 6$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1 - 1)^3 + 6 = (x_2 - 1)^3 + 6 \rightarrow (x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3 \rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = (x - 1)^3 + 6 \rightarrow y - 6 = (x - 1)^3 \rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{y - 6} \rightarrow x = \sqrt[3]{y - 6} + 1$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 6} + 1$$

۱۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه هایی که در آنها صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

شهریار حسین پور

حسابان

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -3 & -2 \\ \hline -2 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline -2 & -4 \\ \hline \end{array}$$

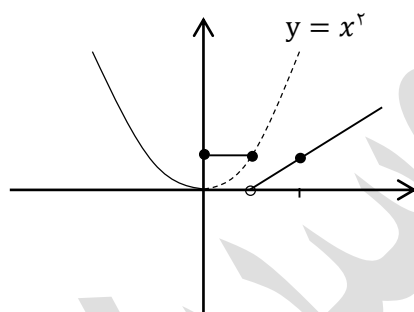
$(-\infty$ و $-2)$ صعودی
 $(-2$ و $1)$ ثابت
 $(1$ و $+\infty)$ نزولی

۱۳- ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید سپس بازه هایی که تابع در آن بازه ها، صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است

را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$



$(-\infty$ و $-2)$ نزولی اکید

$[0$ و $1]$ ثابت

$(1$ و $+\infty)$ صعودی اکید

۱۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[x]}$ چیست؟

$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow -x^2 \geq -4 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow [-2, 0) \cup [1, 2]$$

$$[x] \neq 0 \rightarrow \mathbb{R} - [0, 1)$$

۱۵- نشان دهید تابع $f(x) = x - [x]$ متناوب است. سپس با رسم نمودار تابع در یک دوره متناوب آن، نمودار

تابع را در تمام \mathbb{R} رسم کنید.

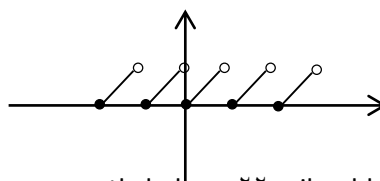
$$f(x+T) = f(x)$$

$$x+T - [x+T] = x - [x] \rightarrow T - [x+T] = -[x]$$

کوچکترین عدد طبیعی مثبت که در این رابطه صدق کند $T = 1$ است.

$$0 \leq x < 1 \rightarrow f(x) = x$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$



۲۴

mathshahryar22.mihanblog.com

۰۹۱۱۱۴۳۰۵۵۸

مثلاث :

فرمولهای بسط $\alpha \pm \beta$:

$$۱) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$۲) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$۳) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \pm \tan \beta}$$

فرمولهای بسط 2α :

$$۱) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۲) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۳) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$۴) 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \quad \text{و} \quad 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

فرمولهای کمان $\frac{\pi}{4}$:

$$۱) \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$۲) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

فرمولهای تبدیل جمع به ضرب:

$$\sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \cos \frac{p \mp q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

فرمولهای تبدیل ضرب به جمع:

$$۱) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$۲) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$۳) \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

اثبات ها :

$$۱) \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{طرف دوم : } \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left[\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \sqrt{2} \left[\sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \sin x + \cos x$$

$$۲) \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\text{طرف اول : } \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$۳) \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{طرف دوم : } \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$۴) \frac{2 \sin x \cos 3x}{\sin 2x} = 2 \cos 2x - 1$$

$$\text{طرف اول} = \frac{\sin(x + 3x) + \sin(x - 3x)}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin 2x} - 1 = 2 \cos 2x - 1$$

$$۵) \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin x \sin x \\ &= 2 \cos^2 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

مسائل :

۱- اگر α و β زوایای در ربع دوم و سوم بوده و $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\beta$ چیست؟

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{12}{13} = \frac{16}{65}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times -\frac{3}{5} = \frac{-24}{25}$$

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \times \left(\frac{-5}{13}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50 - 169}{169} = \frac{-119}{169}$$

۲- اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ چیست؟

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{12}{5}} = \frac{\frac{63}{20}}{\frac{-16}{20}} = -\frac{63}{16}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \tan \alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13} \quad \tan \beta = \frac{-12/13}{-5/13} = \frac{12}{5}$$

۳- \sin و \cos و \tan زاویه ۷۵ و ۱۵ و ۱۰۵ را بدست آورید.

$$\sin 75 = \sin(45 + 30) = \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75 = \cos(45 + 30) = \cos 45 \cos 30 - \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75 = \tan(45 + 30) = \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45 \tan 30} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

توجه: $105 = 60 + 45$ و $15 = 45 - 30$

۴- اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ و $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}}{\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (\text{مهم})$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-\frac{12}{13}}{1 - \frac{5}{13}} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{8}{13}} = -\frac{3}{2}$$

۵- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ حاصل $\frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos 2\alpha}$ را بیابید.

$$\frac{2 \sin \frac{2\alpha - \alpha}{2} \cos \frac{2\alpha + \alpha}{2}}{-2 \sin \frac{\alpha + 2\alpha}{2} \sin \frac{\alpha - 2\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \frac{3\alpha}{2}}{-2 \sin \frac{3\alpha}{2} \times -\sin \alpha} = \cot \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{\tan \frac{3\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

۶- سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه $22/5$ را بدست آورید.

$$\cos 45 = 2 \cos^2 22/5 - 1 \rightarrow 2 \cos^2 22/5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \rightarrow \cos^2 22/5 = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

$$\cos 22/5 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\cos 45 = 1 - 2 \sin^2 22/5 \rightarrow 2 \sin^2 22/5 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 22/5 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \rightarrow \sin 22/5 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22/5 = \frac{\sin 22/5}{\cos 22/5} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

۷- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{طرف دوم} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos 2x}{1} = \cos 2x$$

معادلات مثلثاتی:

$$۱) \sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$۲) \cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \quad \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$۳) \tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\tan x - \tan 2x = 0$

$$\tan 2x = \tan x \rightarrow 2x = k\pi + x \rightarrow x = k\pi$$

ب) $\cos 2x + \cos \frac{x}{2} = 0$

$$2 \cos \frac{2x + \frac{x}{2}}{2} \cos \frac{2x - \frac{x}{2}}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{\Delta x}{4} \cos \frac{3x}{4} = 0$$

$$\cos \frac{\Delta x}{4} = 0 \rightarrow \frac{\Delta x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{4k\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}$$

$$\cos \frac{3x}{4} = 0 \rightarrow \frac{3x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

پ) $\sin x - \cos x = 1$

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \rightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

ث) $2 \sin^2 x = 3 \cos x$

$$2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \rightarrow 2 - 2 \cos^2 x - 3 \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

ج) $\sin x + \sin 3x = 0$

$$\sin 3x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$3x = 2k\pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$3x = 2k\pi + \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

چ) $\cos 2x - 5 \cos x + 3 = 0$

$$2 \cos^2 x - 1 - 5 \cos x + 3 = 0$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9$$

$$\cos x = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{غ ق ق} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\text{ح) } \tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-2 \cot 2x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cot 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \tan 2x = -\sqrt{3}$$

$$2x = k\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\text{خ) } \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \sin 2x \rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x$$

$$2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{3} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}$$

د) معادله $\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ تعیین کنید.

$$2 \sin \theta \cos \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$$

$$\sqrt{2} \cos \theta (\sqrt{2} \sin \theta + 1) = 0 \begin{cases} \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \theta = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

ذ) معادله $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ را حل کنید و جواب هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ هستند تعیین کنید.

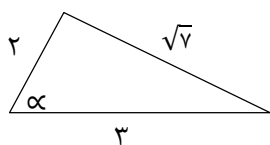
$$2 \sin \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} + \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0 \begin{cases} \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ و } \frac{4\pi}{3}$$

د) در مثلثی که طول اضلاع آن 1 و 3 و $\sqrt{7}$ باشد، زاویه ی روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟



$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos \alpha$$

$$7 = 1 + 9 - 6 \cos \alpha$$

$$-3 = -6 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

معکوس مثلثاتی:

$$f(x) = \sin^{-1} x \quad \begin{cases} D_f : [-1, 1] \\ R_f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \quad \sin^{-1}(-\alpha) = -\sin^{-1} \alpha$$

$$f(x) = \cos^{-1} x \quad \begin{cases} D_f : [-1, 1] \\ R_f : [0, \pi] \end{cases} \quad \cos^{-1}(-\alpha) = \pi - \cos^{-1} \alpha$$

$$f(x) = \tan^{-1} x \quad \begin{cases} D_f : \mathbb{R} \\ R_f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \tan^{-1}(-\alpha) = -\tan^{-1} \alpha$$

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{۱۰- برای هر } x \text{ که } -1 \leq x \leq 1 \text{ نشان دهید:}$$

$$\sin(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \sin(\sin^{-1} x) \cos(\cos^{-1} x) + \sin(\cos^{-1} x) \cos(\sin^{-1} x)$$

$$= x \times x + \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

۱۱- نشان دهید.

$$۱) \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan^{-1} x = \alpha \rightarrow \tan \alpha = x \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

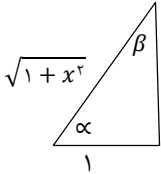
$$۲) \sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan^{-1} x = \alpha \rightarrow \tan \alpha = x \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$۳) \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times$$



$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1 \text{ اثبات برقرار است}$$

$$\tan \alpha = x \rightarrow \tan^{-1} x = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ و } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cot \beta = x \rightarrow \tan \beta = \frac{1}{x} \rightarrow \tan^{-1} \frac{1}{x} = \beta \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$۱) \tan^{-1}(-1) + \tan^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = -\tan^{-1}(1) + \tan^{-1} 1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$۲) \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$۳) \cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3})) = \cos(-\tan^{-1} \sqrt{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$۴) \cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{۴}{۳}\right)\right) = \cos\left(-\tan^{-1}\frac{۴}{۳}\right) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{۴}{۳}\right) = \frac{۳}{۵}$$

$$\tan^{-1}\frac{۴}{۳} = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{۴}{۳} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{۱}{1 + \frac{۱۶}{۹}} = \frac{۹}{۲۵} \rightarrow \cos \alpha = \frac{۳}{۵}$$

$$۵) \tan(\tan^{-1} ۲ + \tan^{-1} ۳) = \frac{\tan(\tan^{-1} ۲) + \tan(\tan^{-1} ۳)}{1 - \tan^{-1} ۲ \times \tan^{-1} ۳} = \frac{۲ + ۳}{1 - ۲ \times ۳} = -۱$$

$$۶) \tan\left(\sin^{-1}\frac{۳}{۵}\right) = \frac{۳}{۲}$$

$$\sin^{-1}\frac{۳}{۵} = \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{۳}{۵} \quad \frac{۳}{۵} = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \rightarrow ۳ + ۳ \tan^2 \alpha = ۵ \tan^2 \alpha$$

$$۲ \tan^2 \alpha = ۳$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{۳}{۲} \rightarrow \tan \alpha = \frac{۳}{۲}$$

$$۷) \cos^{-1}\left(\cos\frac{۴\pi}{۳}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(-\cos\frac{\pi}{۳}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{۳}\right) = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$۸) \cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{۸}\right)$$

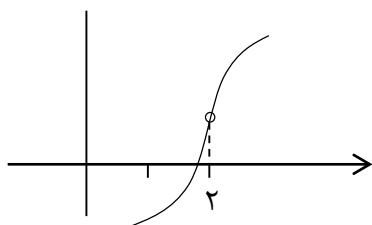
$$\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}\right)\right) = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} = \frac{۳\pi}{۸}$$

$$۹) \sin^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{۴}\right) = \sin^{-1}(۱) = \frac{\pi}{۲} \quad \left(\tan\frac{\pi}{۴} = ۱\right)$$

حد :

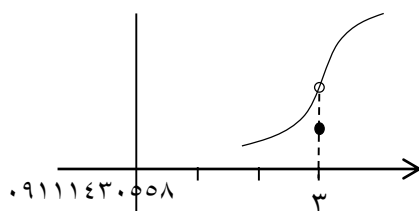
۱- نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در ۲ تعریف نشده باشد، ولی در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد، در

این نقطه حد داشته باشد.

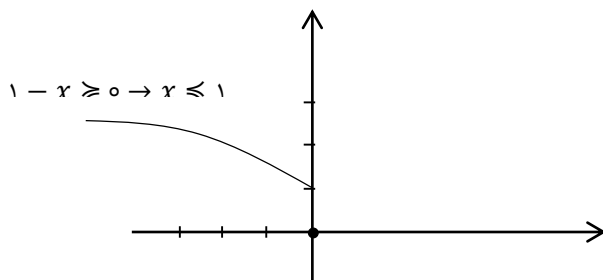


۲- نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد

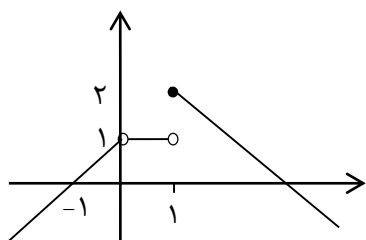
آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد.



۳- با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{1+x} + 1$ ، مقدار حد را در اطراف نقطه $a = 1$ بررسی کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{1-1} + 1 = 1$$



۴- با توجه به شکل مقابل حدود زیر را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

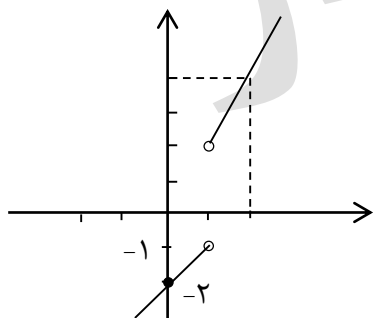
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

۵- با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه $x_0 = 1$ داده شده، وجود حدو حد راست و حد چپ را در نقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1-3}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} \times \frac{2x + \sqrt{x+3}}{2x + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{(x^2 - 1)(2x + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(x+1)(2x+\sqrt{x+3})} = \frac{4+3}{(1+1)(2+2)} = \frac{7}{8}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x + 1}{3x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x^2 + 4x - 1)}{3(x-1)} = \frac{4+4-1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 0 & -5 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 3x - 4} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(x+4)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}$$

$$= \frac{1}{(1+4)(4+4+4)} = \frac{1}{72}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos 0 = 2$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \cos 0 = 2$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\sqrt{2} \left(\sin \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x/\sqrt{2}}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (\sin x - \cos x)}{-(\sin x - \cos x)} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+2x}{2} \sin \frac{x-2x}{2}}{x \tan x}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2 \times x} \times \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = +2 \cos 0 = 4$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \pi\right)}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 2t - \pi)}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} \times 2 = 4$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t, t \rightarrow 0$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{|\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{t} = +\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t, t \rightarrow 0^+$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{[x] + [-x]} = \frac{1 - 1}{-1} = 0$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-1}{x-2} = \frac{[2^-]-1}{2^- - 2} = \frac{1-1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - [x]x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - [x]x - 2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+[x])(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\left(-1 \leq \sin \frac{1}{x-1} \leq 1\right) (x-1) \rightarrow -(x-1) \leq (x-1) \sin \frac{1}{x-1} \leq x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} - (x-1) \leq \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} \leq \lim_{x \rightarrow 1} x-1$$

۱۸- برای هر $x \neq 0$ ثابت کنید $|x \cos \frac{1}{x}| \leq |x|$ سپس نشان دهید. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$

$$\left(-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1\right) \times x \rightarrow -x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x - |x| \leq x \cos \frac{1}{x} \leq |x|$$

$$\left|x \cos \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left|x \cos \frac{1}{x}\right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x}\right)}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \times 2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{1}{2} \times \frac{0}{1} = 0$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow 3^+} x - [x] = 3 - [3^+] = 3 - 3 = 0$$

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow 2^-} x - [x] = 2 - [2^-] = 2 - 1 = 1$$

پیوستگی :

پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$۱) f(x) = \begin{cases} x^2(x-2) & x \leq 2 \\ 4-2x & x > 2 \end{cases} \quad x = 2$$

$$f(2) = 2^2(2-2) = 0$$

پیوسته است .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 - 2(2) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 - 2(2) = 0$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases} \quad x = 1$$

$$f(1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = 1+3 = 4$$

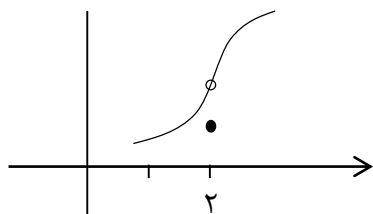
پیوسته است .

$$x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \sqrt{3^+ - 3} = 0$$

$$۴) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

پیوسته نیست زیر مقدار تابع در $x = 2$ تعریف شده نمی باشد.

۵- نمودار تابع را رسم کنید در $x = 2$ ناپیوسته باشد ولی در این نقطه حد داشته باشد.



مقادیر a و b را طوری بدست آورید که توابع زیر در نقاط داده شده پیوسته باشند.

$$1) f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x \geq 2 \\ x^2 + 1 & -2 \leq x < 2 \\ 3x + b & x < -2 \end{cases} \quad x = 2, -2$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5 \quad b - 6 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3(-2) + b = b - 6 \quad b = 11$$

$$f(2) = a(2) + 1 = 2a + 1 \quad 2a + 1 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 + 1 = 5 \quad 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$2) f(x) = \begin{cases} [x] + bx & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ \frac{|x-1|}{x^2-1} + a & x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = [1^+] + b(1) = 1 + b \quad 1 + b = 2 \quad b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} + a = -\frac{1}{2} + a \quad -\frac{1}{2} + a = 2 \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۳- ثابت کنید به ازای هیچ مقدار برای a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ پیوسته نخواهد شد.

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a \quad a \neq -a$$

$$4) f(x) = \begin{cases} a - |x-1| & x \geq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = a - |1 - 1| = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a - (1 - 1) = a \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$a = 3$$

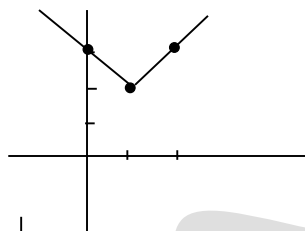
۵- با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید در چه نقطه ای ناپیوسته است.

$$1) y = x + [x]$$

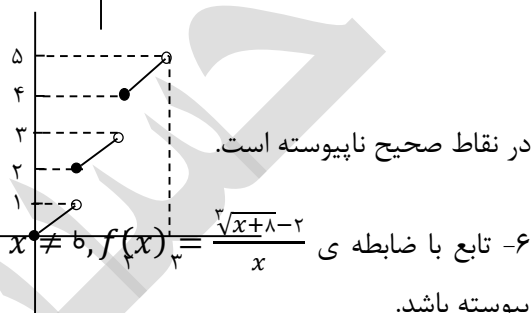
$$0 \leq x < 1 \quad y = x + 0 = x \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \leq x < 2 \quad y = x + 1 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \leq x < 3 \quad y = x + 2 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$



همواره پیوسته است



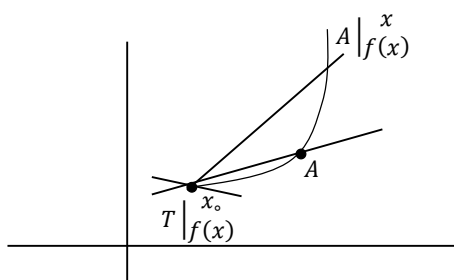
در نقاط صحیح ناپیوسته است.

۶- تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{\sqrt{x+8}-2}{x}$ مفروض است. $f(0)$ را طوری تعیین کنید که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+8}-2}{x} \times \frac{\sqrt{x+8}+2}{\sqrt{x+8}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+8-8}{x(\sqrt{x+8}+2\sqrt{x+8}+4)}$$

$$= \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

مشتق:



$$M_{AT} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$T \text{ در } x_0 \text{ شیب خط مماس در } = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{تعریف مشتق} : f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$h = x - x_0$$

$$\text{مشتق چپ} : f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{h - a}$$

$$\text{مشتق راست : } f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{h - a}$$

اثبات دو فرمول:

$$۱) (f(x_0) \times g(x_0))' = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

$$\begin{aligned} (f(x_0) \times g(x_0))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \times f(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) \end{aligned}$$

$$۲) \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f^2(a)}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} -\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{1}{f(x)f(a)} \\ &= -f'(a) \times \frac{1}{f(a)f(a)} = -\frac{f'(a)}{f^2(a)} \end{aligned}$$

فرمولهای مشتق گیری

$$۱) f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

$$۲) f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$$

$$۳) f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$۴) f(x) = u + v \rightarrow f'(x) = u' + v'$$

$$۵) f(x) = uv \rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$۶) f(x) = u^n \rightarrow f'(x) = nu'u^{n-1}$$

$$۷) f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$۸) f(x) = \sqrt{u} \rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$۹) f(x) = \sqrt[m]{u^n} \rightarrow f'(x) = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$۱۰) f(x) = \sin u \rightarrow f'(x) = \dot{u} \cos u$$

$$۱۱) f(x) = \cos u \rightarrow f'(x) = -\dot{u} \sin u$$

$$۱۲) f(x) = \tan u \rightarrow f'(x) = \dot{u}(1 + \tan^2 u)$$

$$۱۳) f(x) = \cot u \rightarrow f'(x) = -\dot{u}(1 + \cot^2 u)$$

$$۱۴) f(x) = \sin^n u \rightarrow f'(x) = n\dot{u} \cos u \sin^{n-1} u$$

$$۱۵) f(x) = \cos^n u \rightarrow f'(x) = -n\dot{u} \sin u \cos^{n-1} u$$

$$۱۶) f(x) = \tan^n u \rightarrow f'(x) = n\dot{u}(1 + \tan^2 u) \tan^{n-1} u$$

$$۱۷) f(x) = \cot^n u \rightarrow f'(x) = -n\dot{u}(1 + \cot^2 u) \cot^{n-1} u$$

$$۱۸) (f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

$$۱۹) f(x) = \sin^{-1} u \rightarrow f'(x) = \frac{\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$۲۰) f(x) = \cos^{-1} u \rightarrow f'(x) = \frac{-\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$۲۱) f(x) = \tan^{-1} u \rightarrow f'(x) = \frac{\dot{u}}{1+u^2}$$

به کمک تعریف مشتق توابع را در نقاط داده شده بدست آورید.

$$۱) f(x) = \sqrt{x-1} \quad x=2$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} \times \frac{\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x-1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1 - 1}{(x - 2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x^3 & x \leq 1 \end{cases} \quad x=1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 + 1 = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$۳) f(x) = (x-2)[x] \quad x=2$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)[x] - 0}{x-2} = [2^+] = 2$$

مشتق پذیر نیست.

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)[x] - 0}{x-2} = [2^-] = 1$$

$$f(x) = \sqrt{x^2(x+1)} = |x|\sqrt{x+1}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{x+1} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+1} - 0}{x} = 1$$

مشتق پذیر نیست.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{x+1} - 0}{x} = -1$$

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$1) f(x) = \frac{(3x^2 - 1)^2}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2 \times 6x(3x^2 - 1)^2(x+1) - 1 \times (3x^2 - 1)^2}{(x+1)^2}$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x^2 - 1) - 2x\sqrt{x+1}}{(x^2 - 1)^2}$$

$$3) f(x) = \frac{(x-2)(x^2+1)^\delta}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{[1 \times (x^2+1)^\delta + \delta \times 2x(x^2+1)^{\delta-1}(x-2)](\sqrt{x+1}) - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x-2)(x^2+1)^\delta}{(\sqrt{x+1})^{2\delta}}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x-2)(x^2+1)^\delta}{(\sqrt{x+1})^{2\delta}}$$

$$4) f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 2x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x (x^2 + 2x) - (2x + 2) \sin x}{(x^2 + 2x)^2}$$

$$5) f(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2 \cos x \sin x)(2 \cos x) + 2 \sin x \cos x (x^2 - \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$6) f(x) = \tan^2 x + \sin^{-1} x$$

$$f'(x) = 2(1 + \tan^2 x) \tan x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7) f(x) = \sqrt[3]{x^\delta} - \cos 2x$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (\delta x^{\delta-1} + 2 \sin 2x)}{3\sqrt[3]{x^\delta - \cos 2x}^2}$$

۸) $f(x) = (1 + \tan x) \cos^{-1} x$

$$f'(x) = (1 + \tan^r x) \cos^{-1} x + \frac{-1}{\sqrt{1-x^r}} (1 + \tan x)$$

۹) $f(x) = (x^r - x^r - 1)(x - \sqrt{x})$

$$f'(x) = (rx^r - rx)(x - \sqrt{x}) + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(rx^r - x^r - 1)$$

۱۰) $f(x) = 2 \tan^{-1} x + 3 \sin^{-1} x + \frac{4}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^r} + 3 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^r}} + \frac{0 \times x - 1 \times 4}{x^r}$$

۱۱) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(2x+1)^r}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (2x+1)^r - 3 \times 2(2x+1)\sqrt{x}}{(2x+1)^{2r}}$$

۱۲) $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{1+x^r}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x (1+x^r) - 2x \times \sin \sqrt{x}}{(1+x^r)^r}$$

۱۳) $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} + x^r\right)^r$

$$y' = r \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^r} + rx^r\right) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} + x^r\right)^{r-1}$$

۱۴) $y = \sqrt{2x - 3 \cos \Delta x}$

$$y' = \frac{2 + 1 \Delta \sin \Delta x}{2\sqrt{2x - 3 \cos \Delta x}}$$

۱۵) $y = \sqrt[3]{x} + \cos^{-1} x$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^r}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^r}}$$

۱۶) $y = \frac{1}{x+1} + \tan^{-1}(2x)$

$$y' = \frac{0 \times (x+1) - 1 \times 1}{(x+1)^r} + \frac{2}{1+4x^r}$$

۱۷) $y = (2x+3)^\Delta \sin^{-1} x$

$$y' = \Delta \times 2(2x+3)^{\Delta-1} \sin^{-1} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^r}} \times (2x+3)^\Delta$$

۱۸- آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۹ واحد است به دست آورید.

$$s = x^r \rightarrow x = \sqrt{s} \Rightarrow p(s) = 4\sqrt{s} \quad \dot{p}(s) = \frac{4}{2\sqrt{s}} = \frac{2}{\sqrt{s}}$$

$$\dot{p}(9) = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

۱۹- آهنگ تغییر مساحت مربعی را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ چیست؟

$$p = 4x \rightarrow x = \frac{p}{4} \Rightarrow s(p) = \frac{p^r}{4} \rightarrow \dot{s}(p) = \frac{p}{2} \quad \dot{s}(8) = \frac{8}{2} = 4$$

۲۰- معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x}{x-2}$ را در نقطه ای به طول $x_0 = 3$ بدست آورید.

$$y_0 = \frac{3}{3-2} = 1 \quad \left| \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

$$y = \frac{+1(x-2) - 1 \times x}{(x-2)^2} \quad m = \frac{(3-2) - 3}{(3-2)^2} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \begin{matrix} y - 3 = -2(x - 3) \\ y = -2x + 9 \end{matrix}$$

۲۱- نقطه ای از نمودار تابع $y = x^2 + 3x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

شرط موازی بودن: $m = m'$

$$y' = 2x + 3 = m \Rightarrow 2x + 3 = 1 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$y = x \rightarrow m' = 1 \quad y = 1^2 + 3(1) = 4 \quad \left[\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right]$$

۲۲- نقاطی از نمودار تابع $y = x^3 + 2x - 1$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد؟ موازی محور x ها باشد؟

شرط موازی بودن: $m = m'$

$$y' = 3x^2 + 2x = m \quad 3x^2 + 2x = -1$$

$$y = -x \rightarrow m' = -1 \quad 3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x = -1 \rightarrow y = (-1)^3 + 2(-1) - 1 = -4 \quad \left[\begin{matrix} -1 \\ -4 \end{matrix} \right]$$

$$x = -\frac{1}{3} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{27} - \frac{2}{3} - 1 = \frac{-1 - 18 - 27}{27} = -\frac{46}{27}$$

$$m = 0 \text{ حالت سوم} \quad x = 0 \rightarrow y = -1 \quad \left[\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right] \quad \left[\begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ 46 \\ -\frac{27}{27} \end{matrix} \right]$$

$$3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3} \rightarrow y = -\frac{8}{27} - \frac{4}{3} - 1 = \frac{-8 - 36 - 27}{27} = \frac{-81}{27} = -3 \quad \left[\begin{matrix} -\frac{2}{3} \\ -3 \end{matrix} \right]$$

۲۳- معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - x$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی به دست آورید.

$$y' = 6x^2 - 1 \quad m = 6(1)^2 - 1 = 5 \rightarrow m' = -\frac{1}{5}$$

شہریار حسین پور

حسابان

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 2(1)^2 - 1 = 1 \quad y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$$

حسین پور