
جزوه تایم
Kia-ac.ir
@Kia_ac
آکادمی کیا
KIA-AC.IR

«دایره»

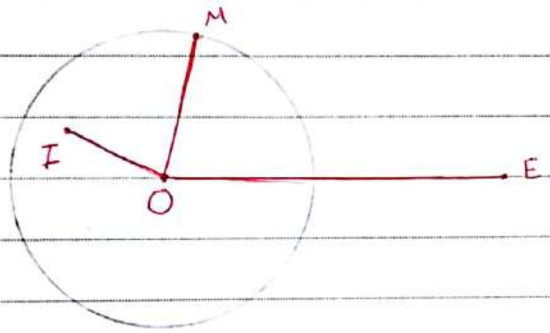
مجموعه نقطه‌هایی از نقطه ثابت O به فاصله معلوم r باشند را دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r می‌گوییم و آن را با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱ـ هر دایره صفحه را به سه بخش روی دایره، داخل دایره و خارج دایره تقسیم می‌کند:

الف) روی دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند M که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره برابر شعاع دایره است. $(OM = r)$

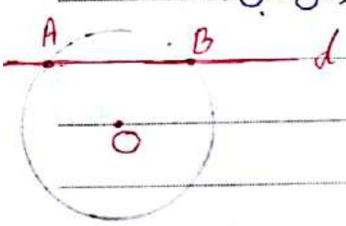
ب) داخل دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند I که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است. $(OI < r)$

ج) خارج دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند E که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است. $(OE > r)$

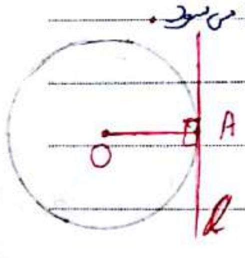


«اوضاع نسبی یک خط و یک دایره»

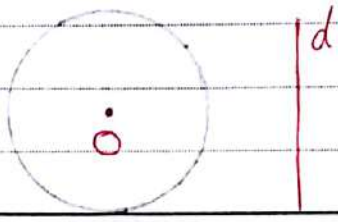
الف) خط قاطع: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع نسبت به دایره نامیده می‌شود. مانند خط d در شکل مقابل.



ب) خط مماس: خط l که از نقطه A می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است، خط مماس بر دایره در نقطه A نامیده می‌شود.

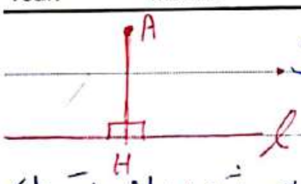


ج) خطی که می‌تواند با دایره هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشد.



subject:
Year: Month: Date:

نکته ۲: فاصله نقطه A غیر واقع بر خط l تا خط l همان اندازه پاره‌خط عمود AH بر خط l است.

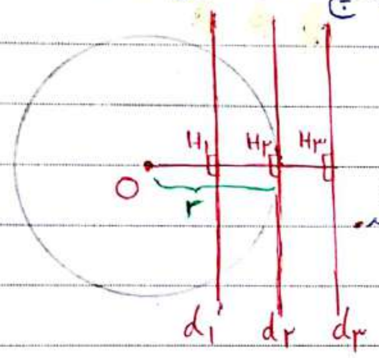


نکته ۳: اگر d یک خط و $C(O,r)$ یک دایره و نقطه‌ی H پای عمودی باشد، که از نقطه O بر خط d رسم می‌شود، در اینصورت داریم:

الف) اگر فاصله خط d_1 از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد $(OH_1<r)$، در اینصورت خط و دایره دو نقطه اشتراک دارند و متقاطع‌اند.

ب) اگر فاصله خط d_2 تا مرکز دایره برابر شعاع باشد $(OH_2=r)$، در اینصورت خط و دایره یک نقطه‌ی اشتراک دارند و خط بر دایره مماس است.

ج) اگر فاصله خط d_3 از مرکز دایره، بیشتر از شعاع باشد $(OH_3>r)$، در اینصورت خط و دایره هیچ نقطه‌ی تقاطعی ندارند.

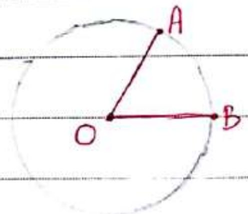


به عبارتی در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و فقط اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

زوایای مرکزی، محاطی و ظلّی:

شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

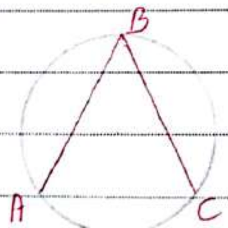
وتر دایره: پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه روی محیط دایره را به هم وصل می‌کند.



قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد. (بزرگترین وتر دایره)

$A\hat{O}B$ زاویه مرکزی

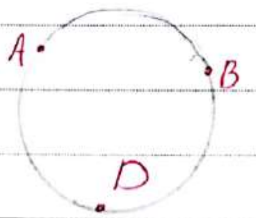
زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع دایره باشند.



$A\hat{B}C$ زاویه محاطی

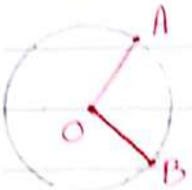
زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن دو وتر دایره می‌باشند.

کمان: هر نقطه از دایره مانند B و A دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند که برای مشخص کردن آن‌ها می‌توان از یک نقطه‌ی دیگر روی کمان استفاده کرد.



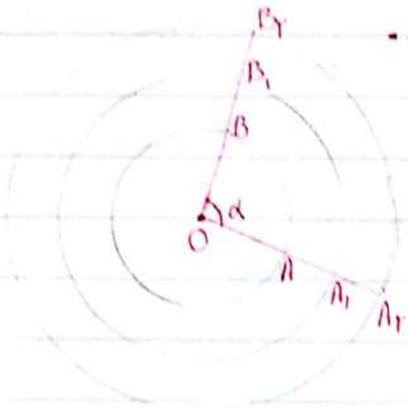
کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$

اندازه کمان: اندازه کمان همان اندازه زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.



$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$ درجه

تذکر: کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های متفاوت داشته باشند.



$A\hat{O}B = A_1\hat{O}B_1 = A_2\hat{O}B_2 = \alpha$

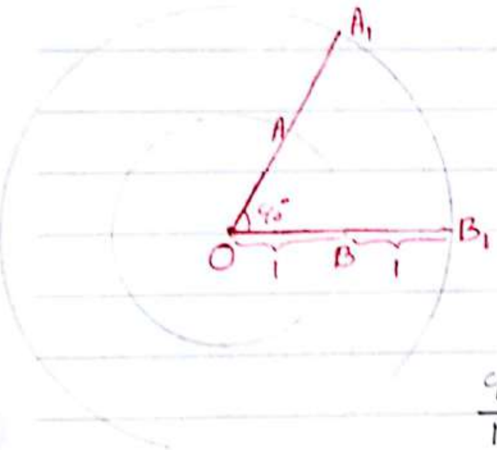
$\Longrightarrow$ اندازه $\overset{\frown}{AB}^\circ = \overset{\frown}{A_1B_1}^\circ = \overset{\frown}{A_2B_2}^\circ$

طول $\overset{\frown}{AB} \neq \overset{\frown}{A_1B_1} \neq \overset{\frown}{A_2B_2}$

تذکر: محیط یک دایره، یک کمان با اندازه ۳۶۰° است. پس داریم:

$$\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{\text{محیط}} = \frac{\text{اندازه } \overset{\frown}{AB}}{360^\circ}$$

— در شکل مقابل، اندازه و طول کمان‌های خواسته شده را بنویسید.



اندازه $\overset{\frown}{AB}^\circ =$ اندازه $\overset{\frown}{A_1B_1}^\circ = 60^\circ$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{2\pi} \longrightarrow \text{طول } \overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1}}{4\pi} \longrightarrow \text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1} = \frac{2\pi}{3}$$

قضیه ۱ . در هر دایره، وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند و برعکس.

اثبات: از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم.

طرف اول: فرض: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ حکم: $AB = CD$

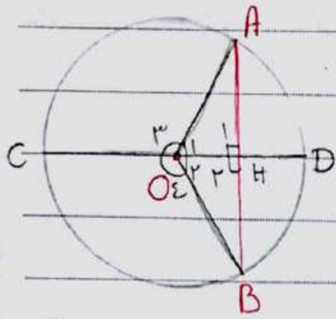
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D \longrightarrow AB = CD$$

subject:
Year: Month: Date:

طرف دوم :   فرض : $AB=CD$ حکم : $\widehat{AB}=\widehat{CD}$

$$\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ OA=OC \\ OB=OD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D \longrightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \longrightarrow \widehat{AB}=\widehat{CD}$$

قضیه ۲. در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.

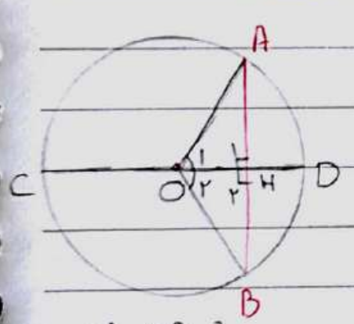


فرض : $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \text{ قطر} \end{cases}$ حکم : $\begin{cases} AH=HB \\ \widehat{AD}=\widehat{DB} \\ \widehat{AC}=\widehat{CB} \end{cases}$

اثبات : از O به A و B وصل می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OH=OH \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \longrightarrow \begin{cases} AH=HB \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \to \widehat{AD}=\widehat{DB} \\ \hat{O}_3=\hat{O}_4 \longrightarrow \widehat{AC}=\widehat{CB} \end{cases}$$

قضیه ۳. اگر قطر CD، وتر AB را نصف کند، آنگاه قطر CD بر وتر AB عمود است و کمان $\widehat{AB}$ را نصف می کند.

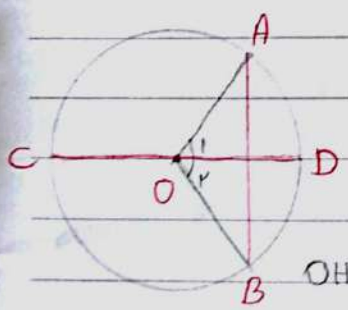


فرض : $\begin{cases} AH=HB \\ CD \text{ قطر} \end{cases}$ حکم : $\begin{cases} CD \perp AB \\ \widehat{AD}=\widehat{DB} \\ \widehat{AC}=\widehat{CB} \end{cases}$

اثبات : از O به A و B وصل می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OH=OH \\ AH=HB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \longrightarrow \begin{cases} \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \longrightarrow CD \perp AB \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \to \widehat{AD}=\widehat{DB} \\ \hat{O}_3=\hat{O}_4 \longrightarrow \widehat{AC}=\widehat{CB} \end{cases}$$

قضیه ۴. اگر قطر CD، کمان AB را نصف کند، آنگاه CD بر AB عمود است و آن را نصف می کند.

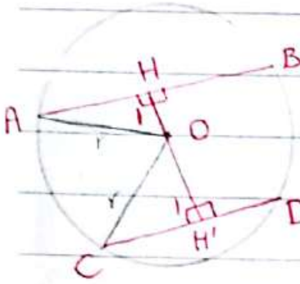


فرض : $\begin{cases} \widehat{AD}=\widehat{DB} \\ CD \text{ قطر} \end{cases}$ حکم : $\begin{cases} CD \perp AB \\ AH=HB \end{cases}$

اثبات : از O به A و B وصل می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OH=OH \\ \widehat{AD}=\widehat{DB} \to \hat{O}_1=\hat{O}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \longrightarrow \begin{cases} \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \longrightarrow CD \perp AB \\ AH=HB \end{cases}$$

- در دایره (O, r) نشان دهید، $AB > CD$ است اگر و فقط اگر $OH < OH'$ باشد. (OH و OH' فاصله مرکز دایره از دو وتر AB و CD است.) (به عبارتی در هر دایره، هر وتر که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس.) (مسئله ده کتاب درسی)



اثبات: از O به A و C وصل می‌کنیم، عمودهای OH و OH' بنا به قضیه‌ای، وترهای AB و CD را نصف می‌کنند.

$$A\hat{O}H : \hat{H}_1 = 90^\circ \longrightarrow OA^2 = AH^2 + OH^2 \xrightarrow{AH = \frac{AB}{2}} r^2 = \frac{AB^2}{4} + OH^2$$

$$C\hat{O}H' : \hat{H}'_1 = 90^\circ \longrightarrow OC^2 = CH'^2 + OH'^2 \xrightarrow{CH' = \frac{CD}{2}} r^2 = \frac{CD^2}{4} + OH'^2$$

$$\longrightarrow \frac{AB^2}{4} + OH^2 = \frac{CD^2}{4} + OH'^2 \longrightarrow \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} = OH'^2 - OH^2 \quad (1)$$

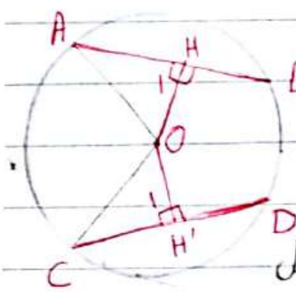
طرف اول: فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$

$$AB > CD \longrightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4} \longrightarrow \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} > 0 \xrightarrow{(1)} OH'^2 > OH^2 \longrightarrow \boxed{OH < OH'}$$

طرف دوم: فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

$$OH < OH' \longrightarrow OH'^2 - OH^2 > 0 \xrightarrow{(1)} \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} > 0 \longrightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4} \longrightarrow \boxed{AB > CD}$$

- ثابت کنید در هر دایره، هر دو وتر مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



اثبات: از O به A و C وصل می‌کنیم. عمودهای OH و OH' را بر وترهای AB و CD رسم می‌کنیم تا آن‌ها را نصف کند.

طرف اول: فرض: $AB = CD$ حکم: $OH = OH'$

$$AB = CD \longrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} AH = CH' \\ OA = OC \\ \hat{H}_1 = \hat{H}'_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{C}H' \longrightarrow \boxed{OH = OH'}$$

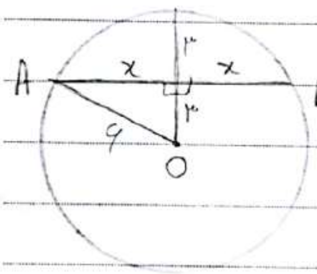
subject:

Year: Month: Date:

طرف دوم: فرض: $OH = OH'$ حکم: $AB = CD$

$\left.\begin{array}{l} OH' = OH \\ OA = OC \\ \hat{H}_1 = \hat{H}'_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{C}H' \longrightarrow AH = CH' \longrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \longrightarrow \boxed{AB = CD}$

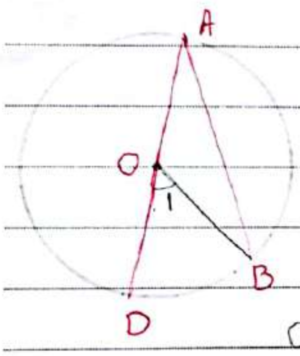
- دایره‌ای با شعاع ۶ مفروض است. طول وتری از این دایره را بدست آورید که عمودمنصف یک شعاع دایره باشد.



$O\hat{A}H: \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow OA^2 = OH^2 + AH^2 \longrightarrow 36 = 9 + x^2$

$\longrightarrow x^2 = 27 \longrightarrow x = 3\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{AB = 6\sqrt{3}}$

- قضیه ۵: اندازه هر زاویه محاطی در یک دایره برابر نصف کمان روبه روی آن است.

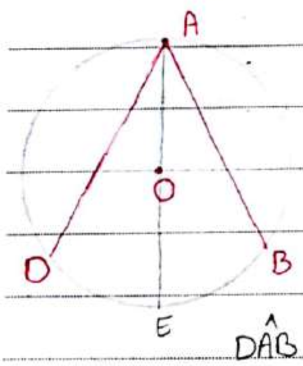


برای اثبات این قضیه، سه حالت درنظر میگیریم: حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی قطر دایره باشد.

حکم: $\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ اثبات: از O به B وصل می‌کنیم.

$OA = OB \longrightarrow \hat{A} = \hat{B}$ ① $\quad O\hat{A}B$ زاویه خارجی $\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} \overset{①}{=} 2\hat{A}$

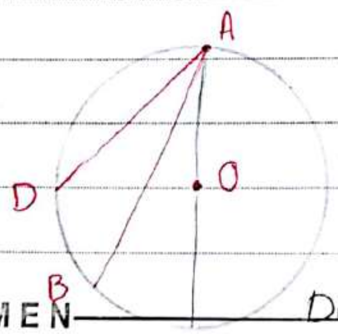
$\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{O}_1 \longrightarrow \hat{A}_1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$



حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز واقع است.

حکم: $\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ اثبات: قطر AE را رسم می‌کنیم.

$D\hat{A}B = D\hat{A}E + E\hat{A}B \xrightarrow{\text{حالت اول}} \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{EB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$



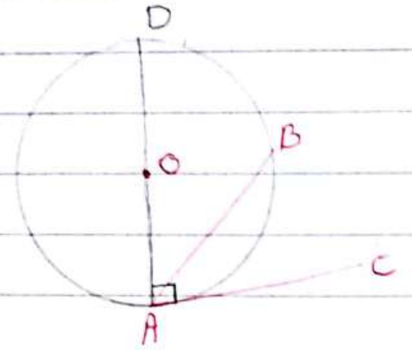
حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع است.

حکم: $D\hat{A}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ اثبات: قطر AE را رسم می‌کنیم.

$D\hat{A}B = D\hat{A}E - B\hat{A}E \xrightarrow[\text{حالت}]{} \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

زاویه ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتری از دایره باشد.

قضیه ۶: اندازه هر زاویه ظلی، با نصف کمان روبروی آن برابر است.

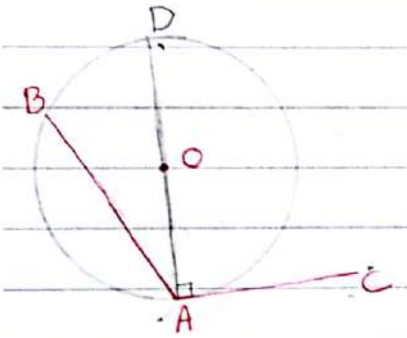


حکم: $B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ اثبات: قطر AD را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ مماس} \longrightarrow C\hat{A}D = 90^\circ \\ AD \text{ قطر} \longrightarrow \overset{\frown}{ABD} = 180^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow C\hat{A}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABD} \quad ①$$

$$B\hat{A}C = D\hat{A}C - \underbrace{D\hat{A}B}_{\text{محاطی}} \overset{①}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

اگر زاویه ظلی مانند شکل مقابل منفرجه باشد، قضیه برقرار است.

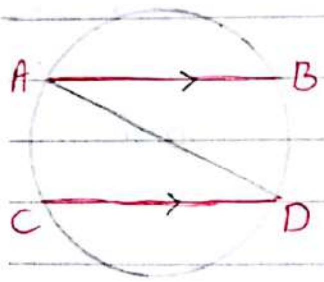


حکم: $B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ اثبات: قطر AD را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ مماس} \longrightarrow C\hat{A}D = 90^\circ \\ AD \text{ قطر} \longrightarrow \overset{\frown}{ABD} = 180^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow C\hat{A}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABD} \quad ①$$

$$B\hat{A}C = D\hat{A}C + \underbrace{D\hat{A}B}_{\text{محاطی}} \overset{①}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

قضیه ۷: دو وتر از یک دایره موازی‌اند اگر و فقط اگر، کمان‌های غیرمتقاطع محدود بین آن‌ها مساوی باشند.



اثبات: AD را رسم می‌کنیم.

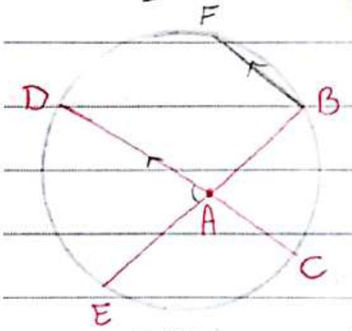
طرف اول: فرض: $AB \parallel CD$ حکم: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

$$AB \parallel CD \xrightarrow{AD \text{ مورب}} \hat{A} = \hat{D} \longrightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} \longrightarrow \boxed{\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}}$$

طرف دوم: فرض: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ حکم: $AB \parallel CD$

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} \longrightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} \longrightarrow \hat{A} = \hat{D} \xrightarrow{\text{عکس موازی و مورب}} \boxed{AB \parallel CD}$$

قضیه ۸ : (زاویه بین دو وتر) اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدود است.



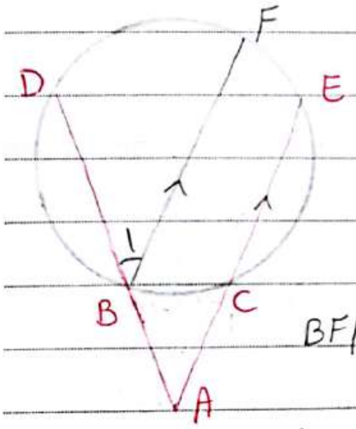
حکم: $D\hat{A}E = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC})$

اثبات: از B خطی موازی DC رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند.

$BF \parallel CD \xrightarrow{\text{قضیه ۷}} \overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{BC}$ (1)

$BF \parallel CD \xrightarrow{\text{مورب } BE} D\hat{A}E = \underbrace{\hat{B}}_{\text{محاطی}} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DF}+\overset{\frown}{DE}) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE})$

قضیه ۹ : (زاویه بین امتداد دو وتر) اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره به وجود می‌آید، برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدود است.



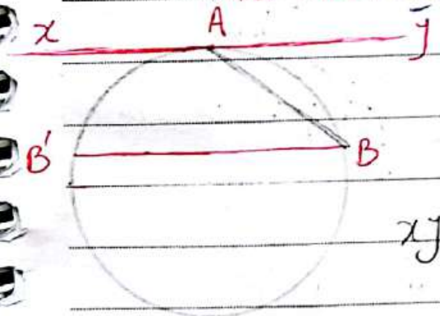
حکم: $\hat{A} = \frac{1}{2}|\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}|$

اثبات: از B خطی موازی AE رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند.

$BF \parallel CE \xrightarrow{\text{قضیه ۷}} \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{EF}$ (1)

$BF \parallel AE \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{A} = \underbrace{\hat{B}_1}_{\text{محاطی}} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DF} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{EF}) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}|\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}|$

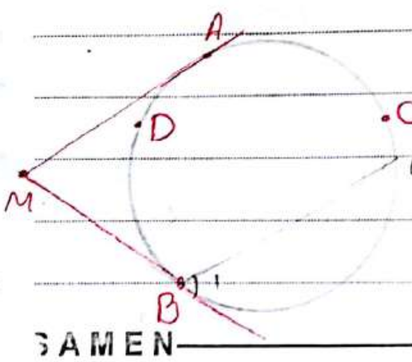
- خط xy در نقطه A بر دایره مماس است. وتر BB' از دایره را موازی xy رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$



حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$ اثبات: از A به B وصل می‌کنیم.

$xy \parallel BB' \xrightarrow{\text{مورب } AB} \underbrace{y\hat{A}B}_{\text{ظلی}} = \underbrace{\hat{B}}_{\text{محاطی}} \longrightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB'} \longrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$

- در شکل‌های زیر ثابت کنید:

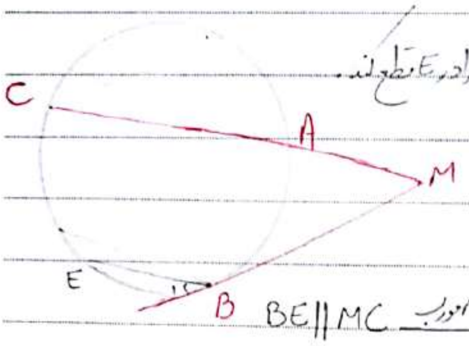


الف) $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{2}$ از B خطی موازی MA رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند.

$BE \parallel MA \xrightarrow{\text{بنابر سؤال قبل}} \overset{\frown}{ACE} = \overset{\frown}{ADB}$ (1)

subject:
Year: Month: Date:

$BE \parallel MA \xrightarrow{\text{مورب } MB} \hat{M} = \hat{B}_1 = \frac{\overset{\frown}{BE}}{2} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ACE}) \overset{①}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB})$



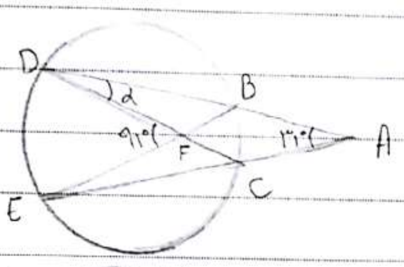
ب) $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{2}$ از B خطی موازی MC رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند.

$BE \parallel MC \rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CE}$ ①

$BE \parallel MC \xrightarrow{\text{مورب } MB} \hat{M} = \hat{B}_1 = \frac{\overset{\frown}{BE}}{2} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CE}) \overset{①}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB})$

تمرین:

۲- در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.

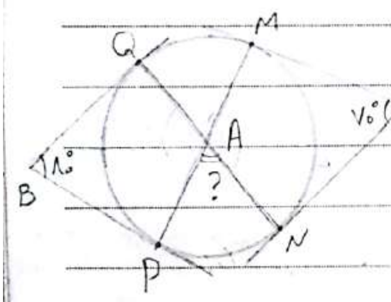


$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{2} \rightarrow 62° = \overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}$ ①

$\hat{F} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BC}}{2} \rightarrow 182° = \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BC} \xrightarrow{①} 2\overset{\frown}{DE} = 244° \rightarrow \overset{\frown}{DE} = 122° \rightarrow \overset{\frown}{BC} = 60°$

$\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{60°}{2} \rightarrow \alpha = 30°$

۳- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟

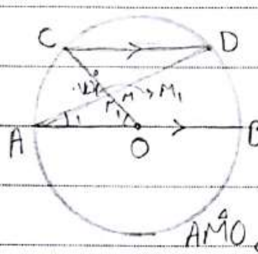


$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{MQPN} - \overset{\frown}{MN}}{2} \rightarrow \overset{\frown}{MQPN} - \overset{\frown}{MN} = 140°$

$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{QMNP} - \overset{\frown}{QP}}{2} \rightarrow \overset{\frown}{QMNP} - \overset{\frown}{QP} = 160°$

$\rightarrow 2(\overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{PN}) = 300° \rightarrow \overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{PN} = 150° \rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{QM} + \overset{\frown}{PN}}{2} = \frac{150°}{2} = 75°$

۴- در دایره رسم شده شکل مقابل، $CD \parallel AB$، اندازه کمان CD را بدست آورید.



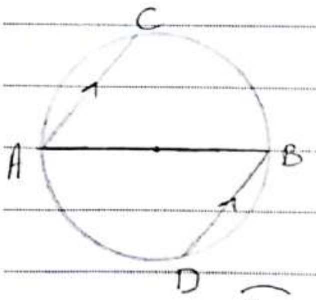
$AB \parallel CD \rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}$

زاویه خارجی AMO: $\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{O}_1 = \hat{A} + 2\hat{A} = 75° \rightarrow \hat{A} = 25°$

subject:
Year: Month: Date:

$\hat{O} = \widehat{AC} = \widehat{BD} = ۵۰^\circ \longrightarrow \widehat{CD} = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ - ۵۰^\circ = ۸۰^\circ$

۵) در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: AC = BD



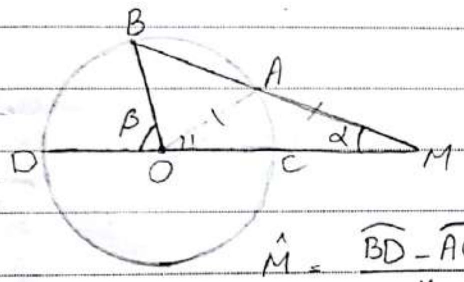
$AC \parallel BD \longrightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$

قطر AB $\longrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BDA}$

$\widehat{ACB} - \widehat{BC} = \widehat{BDA} - \widehat{AD}$

$\longrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \longrightarrow \boxed{AC = BD}$

۶ــ دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$. نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$ از O به A وصل می‌کنیم.

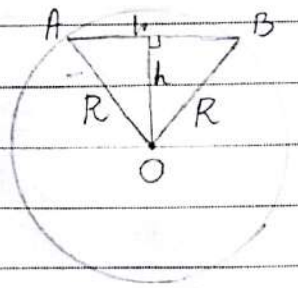


$OA = AM = R \longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{M} = \alpha \longrightarrow \widehat{AC} = \alpha$

$\hat{M} = \dfrac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{۲} \longrightarrow \alpha = \dfrac{\widehat{BD} - \alpha}{۲} \longrightarrow ۲\alpha = \widehat{BD} - \alpha \longrightarrow \widehat{BD} = ۳\alpha$

$\widehat{BD} = \hat{O}_۲ = \boxed{\hat{\beta} = ۳\alpha}$

۷ــ در دایره $C(O,R)$، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$، فاصله O از وتر AB را بدست آورید.



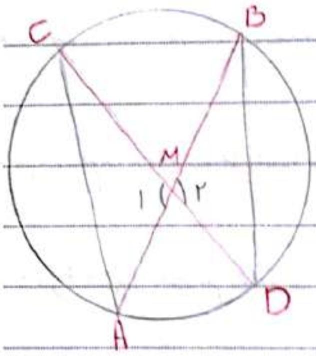
$\widehat{AB} = ۶۰^\circ \longrightarrow \hat{O} = ۶۰^\circ, \; AO = BO = R \longrightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۶۰^\circ$

$\longrightarrow AO = BO = ۱۰ \longrightarrow h = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} R = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۰ = ۵\sqrt{۳}$

SAMEN

«رابطه‌های طولی در دایره»

قضیه ۱۰: هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره، یکدیگر را قطع کنند، آنگاه $MC \times MD = MB \times MA$



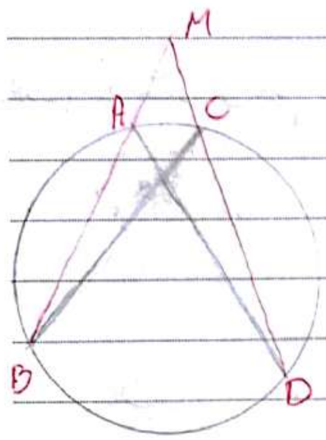
حکم: $MA.MB = MC.MD$

حل: از A به C، و از B به D وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\\ \hat{M}_1=\hat{M}_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat{M}C \sim D\hat{M}B \longrightarrow \frac{MA}{MD}=\frac{MC}{MB}$$

$$\longrightarrow \boxed{MA.MB = MC.MD}$$

قضیه ۱۱: هرگاه وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M در خارج دایره قطع کنند، آنگاه: $MA.MB = MC.MD$



حکم: $MA.MB = MC.MD$

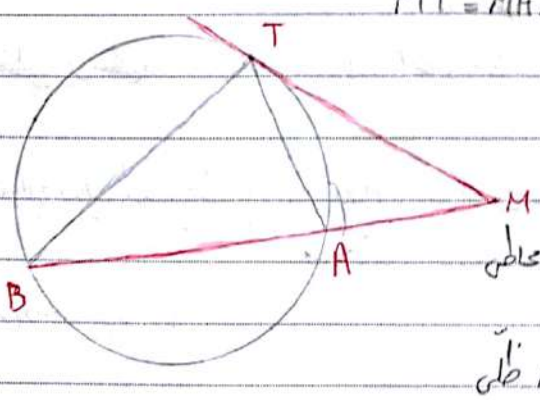
اثبات: از A به D، و از C به B وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\\ \hat{M}=\hat{M}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} M\hat{A}D \sim M\hat{C}B \longrightarrow \frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB}$$

$$\longrightarrow \boxed{MA.MB = MC.MD}$$

قضیه ۱۲: از یک نقطه خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم می‌کنیم. مربع اندازه مماس با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع برابر است.

به عبارتی مماس واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه قاطع است. حکم: $MT^2 = MA.MB$

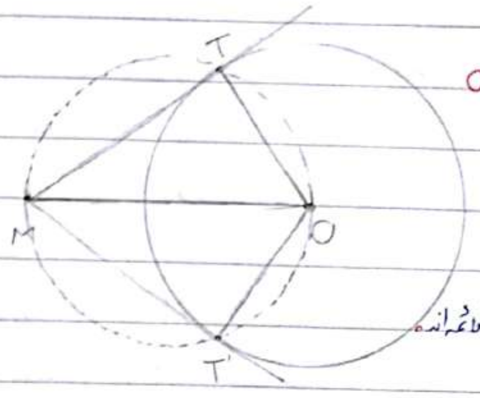


اثبات: از T به A و B وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\text{محاطی } \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{TA}}{۲}\\ \text{ظلی } A\hat{T}M=\frac{\overset{\frown}{TA}}{۲}\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{B}=A\hat{T}M\\ \hat{M}=\hat{M}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} M\hat{T}A \sim M\hat{T}B$$

$\to \frac{MT}{MB}=\frac{MA}{MT} \to \boxed{MT^2=MA.MB}$

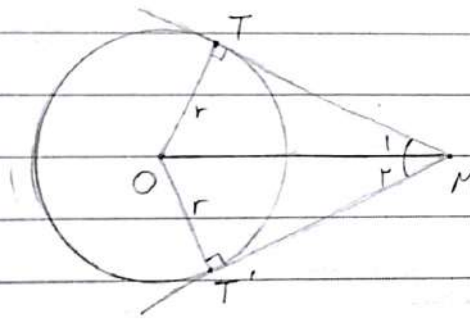
رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن.



فرض کنید دایره $C(O,r)$ و نقطه M خارج آن داده شده باشد. دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم. این دایره، دایره C را در دو نقطه‌ی T و T' قطع می‌کند. از T و T' به O و M وصل می‌کنیم. زاویه‌های $M\hat{T}O$ و $M\hat{T'}O$ محاطی و به قطر می‌باشند، پس قائمه‌اند. بنابراین شعاع‌های نقطه‌ی تماس بر پاره‌خط‌های MT و MT' عمودند. پس این دو پاره‌خط بر دایره مماس‌اند.

قضیه ۱۳. هرگاه از نقطه M خارج از دایره $C(O,r)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند:

الف) اندازه‌های دو مماس با هم برابرند. ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه $T\hat{M}T'$ است.



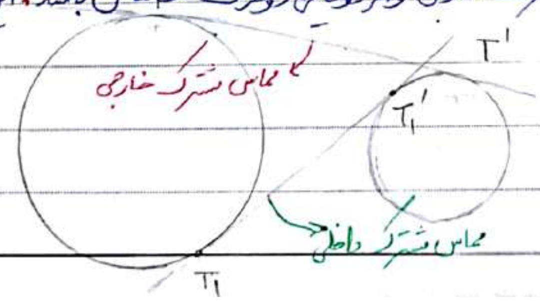
$\left.\begin{array}{l} MO=MO \\ \hat{T}=\hat{T'}=90^\circ \\ OT=OT'=r \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{M}T \cong O\hat{M}T'$

$\to \begin{cases} \boxed{MT=MT'} & \text{(الف} \\ \boxed{\hat{M}_1=\hat{M}_2} \to T\hat{M}T' \text{ نیمساز } MO & \text{(ب} \end{cases}$

مماس مشترک دو دایره

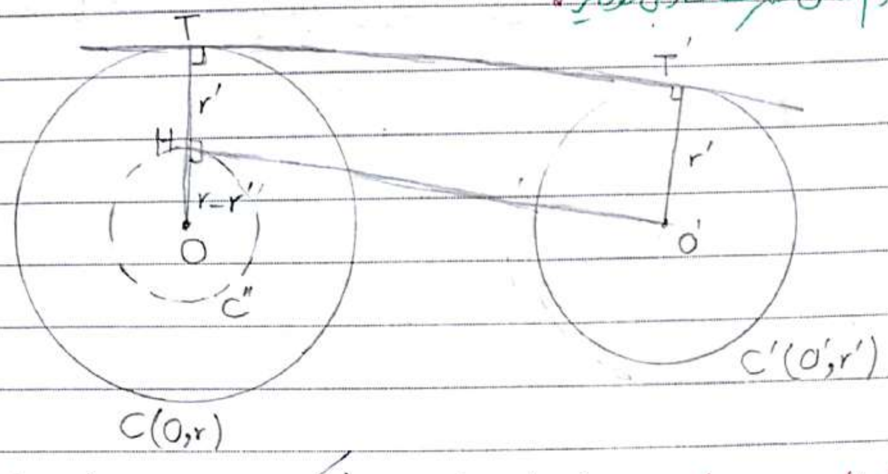
هر خط یا پاره‌خطی که بر هر دو دایره مماس باشد را مماس مشترک دو دایره می‌نامند.

اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک داخلی دایره نامیده می‌شود.



subject:
Year: Month: Date:

«رسم مماس مشترک خارجی دو دایره»



فرض کنید دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ با فرض $r>r'$ داده شده باشند و TT' مماس مشترک خارجی این دو دایره باشند. از O' خطی به موازات TT' رسم می‌کنیم تا OT را در H قطع کند. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{T}=\hat{T'}=90^\circ \longrightarrow HT \parallel O'T' \\ O'H \parallel TT'\end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{\text{مستطیل}}{T'THO'} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}TH=r' \\ \hat{H}=90^\circ \\ OH=r-r'\end{array}\right.$$

بنابراین $O'H$ بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r-r'$ مماس است.

«روش رسم»: به مرکز دایره بزرگتر و به شعاع $r-r'$، دایره C'' را رسم می‌کنیم. از O' مماس $O'H$ را بر دایره C'' رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره C را در نقطه T قطع کند. از T خطی به موازات $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه T' بر دایره C' مماس است.

«قضیه ۱۴»: اگر دو مماس مشترک خارجی دو دایره، متقاطع باشند، نقطه تقاطع آن‌ها روی خط المرکزین دو دایره قرار دارد.

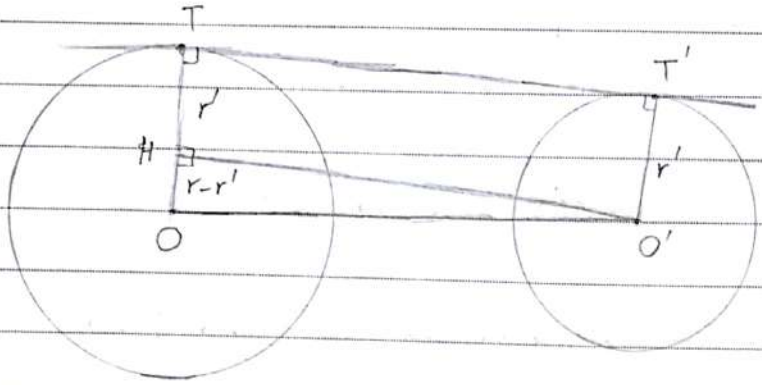
اثبات: فرض می‌کنیم این دو مماس، یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. از M به O و O' رسم می‌کنیم. با توجه به قضیه ۱۳، MO' نیمساز زاویه‌ی M و همچنین MO نیمساز زاویه M می‌باشد. چون نیمساز زاویه یک ثابت است، پس MO و MO' بر هم منطبق اند. یعنی نقطه تلاقی دو مماس مشترک روی خط المرکزین دو دایره قرار دارد.

SAMEN

subject:

Year: Month: Date:

«محاسبه طول مماس مشترک خارجی دو دایره (بر حسب شعاع های دو دایره و خط المرکزین)»



داریم:
$$\begin{cases} O'H = TT' \\ TH = r' = O'T' \\ OH = r - r' \\ \hat{H} = 90^\circ \\ OO' = d \end{cases}$$

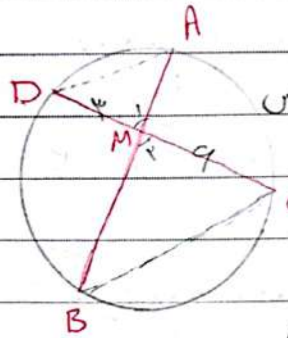
$$O'\overset{\triangle}{H}O : \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} OO'^2 = OH^2 + O'H^2$$

$$\longrightarrow TT'^2 = d^2 - (r-r')^2$$

$$\longrightarrow \boxed{TT' = \sqrt{d^2 - (r-r')^2}}$$

«تمرین»

۱- در دایره $C(O,R)$ وتر AB، وتر CD به طول $9cm$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟ از A به D و از B به C وصل می کنیم.



$$\left.\begin{aligned} &\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ متقابل به رأس} \\ &\hat{B} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \text{ زاویه محاطی} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat{M}D \sim C\hat{M}B \longrightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{AD}{CB} = \frac{MD}{MB}$$

$$\longrightarrow \frac{AM}{6} = \frac{3}{MB} \longrightarrow AM.MB = 18 \,,\, AM + MB = 11 \longrightarrow AM = 2 \,,\, MB = 9$$

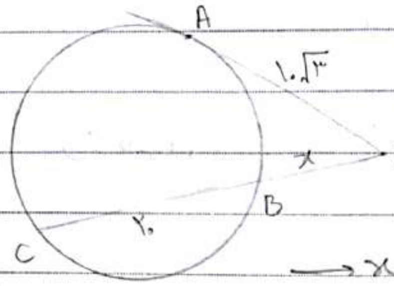
$$\longrightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{9}{2}$$

SAMEN

subject:

Year: Month: Date:

۲- از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC=20$. طول‌های PB و PC را بدست آورید.

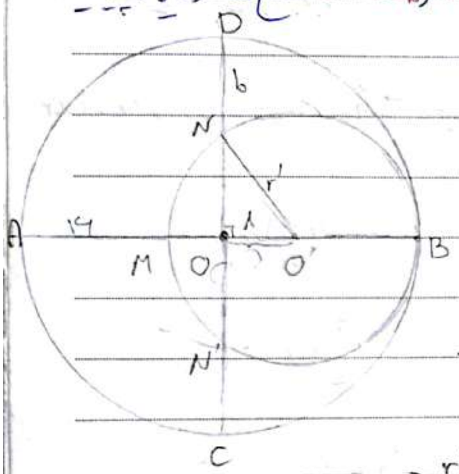


$$PA^2 = PB \cdot PC \longrightarrow (10\sqrt{3})^2 = x\cdot(20+x)$$

$$\longrightarrow x^2 + 20x - 300 = 0 \longrightarrow (x+30)(x-10)=0$$

$$\longrightarrow x = 10 \longrightarrow PB = 10 \,,\, PC = 30$$

۳- در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $AM=16$ و $ND=10$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



$$AB - BM = AM \longrightarrow 2r - 2r' = 16 \longrightarrow r - r' = 8$$

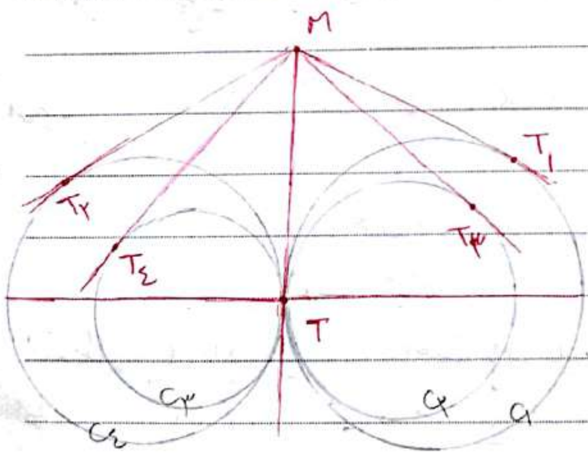
$$\overset{\triangle}{OO'N} : OO'^2 + ON^2 = O'N^2 \longrightarrow 8^2 + (r-10)^2 = (r-8)^2$$

$$\longrightarrow 64 + r^2 - 20r + 100 = r^2 - 16r + 64 \longrightarrow 4r = 100 \longrightarrow \boxed{r = 25}$$

$$\longrightarrow r' = 17$$

۴- مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آن‌ها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم.

ثابت کنید: $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$



برابری مماس‌های یک دایره

دایره C_1 : $MT = MT_1$

دایره C_2 : $MT = MT_3$

دایره C_3 : $MT = MT_4$

دایره C_4 : $MT = MT_2$

$$\longrightarrow MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$$

SAMEN

۵ـ طول شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن ها مساوی $3\sqrt7$ و طول مماس مشترک داخلی آن ها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آن ها مساوی ۸ واحد است.

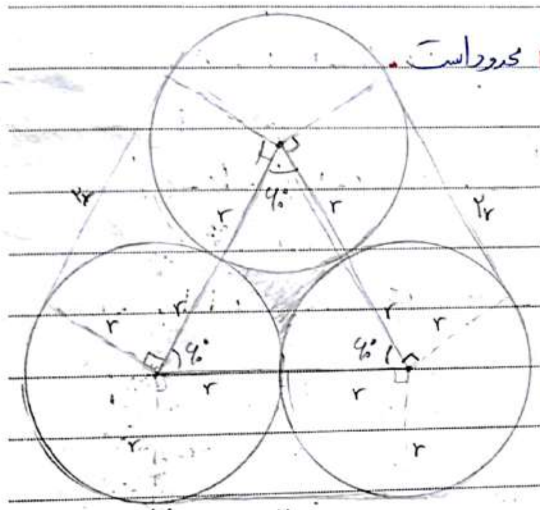
$3\sqrt7 = \sqrt{8^2-(r-r')^2} \to 63 = 64-(r-r')^2$

$(r-r')^2 = 1 \to r-r' = 1 \to r = r'+1$ (1)

$\sqrt{15} = \sqrt{8^2-(r+r')^2} \to 15 = 64-(r+r')^2 \to (r+r')^2 = 49 \to r+r' = 7$ (2)

$(1),(2) \to r'+1+r' = 7 \to r' = 3 , r = 4$

۶ـ سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt3-\frac{\pi}{2})$ محدود است.



طول نخ: $3\times 2r + 3\times\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\times 2\pi r\right) = 6r+2\pi r$

$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{مثلث}} - 3S_{\frac16\text{دایره}} = \frac{\sqrt3}{4}(2r)^2 - 3\times\left(\frac16\pi r^2\right)$

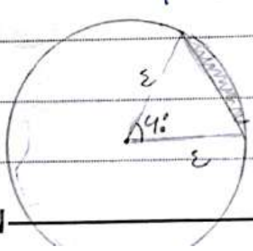
$\to S_{\text{هاشور}} = \sqrt3 r^2 - \frac12\pi r^2 = r^2\left(\sqrt3-\frac{\pi}{2}\right)$

۷ـ طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی $2cm$ و مساحت ناحیه محدود بین آن ها 16π سانتی متر مربع است. طول شعاع ها دو دایره را به دست آورید.

$r-r' = 2 \quad , \quad \pi r^2 - \pi r'^2 = 16\pi \to \pi(r^2-r'^2) = 16\pi \to r^2-r'^2 = 16$

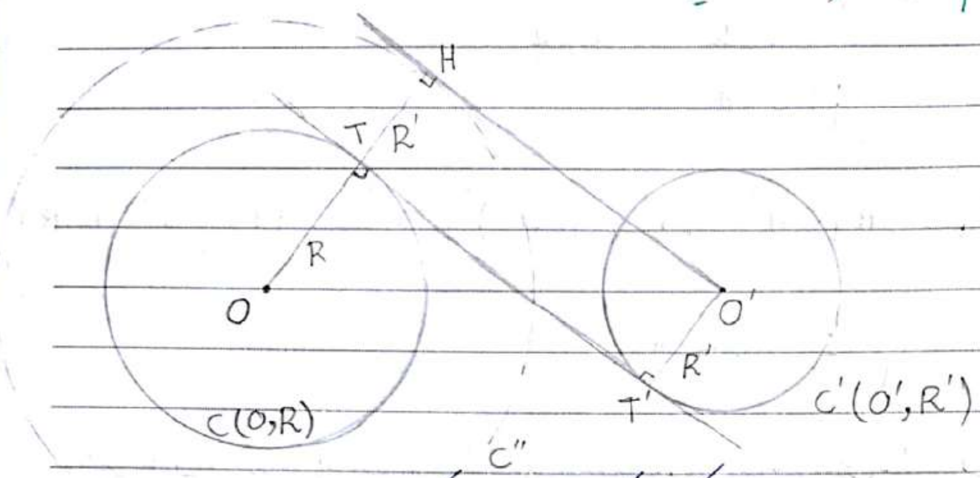
$(r'+2)^2 - r'^2 = 16 \to \cancel{r'^2}+4r'+4-\cancel{r'^2} = 16 \to r' = 3 , r = 5$

۸ـ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



$S_{\text{هاشور}} = -S_{\text{مثلث}} + S_{\frac16\text{دایره}} = -\frac{\sqrt3}{4}\times 4^2 + \frac16\pi\times 4^2 = 4\times\left(-\sqrt3 + \frac{4\pi}{6}\right)$ ($\frac{2\pi}{3}$)

«رسم مماس مشترک داخلی دو دایره»



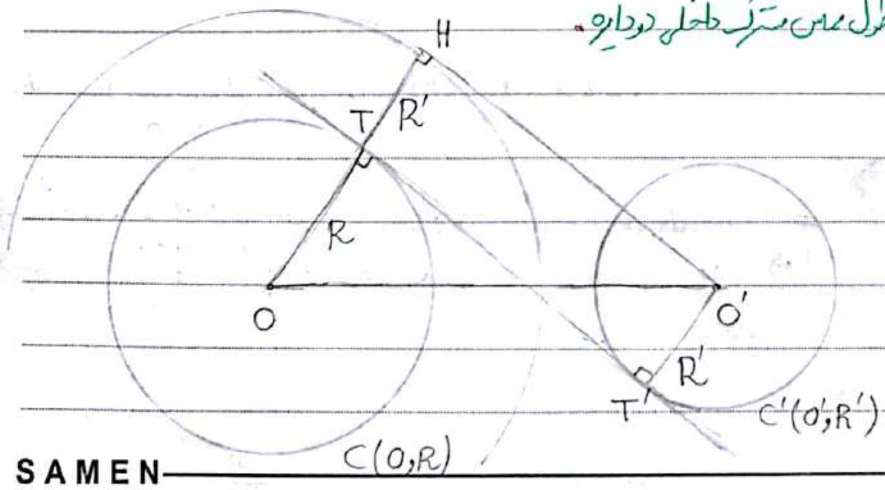
دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $R>R'$ در نظر می‌گیریم، اگر TT' مماس مشترک داخلی این دو دایره باشد، از O' خطی موازی TT' رسم می‌کنیم تا امتداد OT را در H قطع کند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{T}=\hat{T'}=90^\circ \longrightarrow HT \parallel O'T' \\ O'H \parallel TT'\end{array}\right\} \longrightarrow \underset{\text{مستطیل}}{\overset{\square}{O'HTT'}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}TH=O'T'=R' \\ \hat{H}=90^\circ \\ OH=R+R' \\ O'H=TT'\end{array}\right.$$

بنابراین $O'H$ بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+R'$ مماس است.

«روش رسم»: به مرکز دایره بزرگتر و به شعاع $R+R'$، دایره C'' را رسم می‌کنیم. از O' مماس $O'H$ را بر دایره C'' رسم می‌کنیم، از O به H وصل می‌کنیم تا دایره C را در T قطع کند. از T خطی موازی $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط بر دایره C' در نقطه T' مماس است.

«محاسبه طول مماس مشترک داخلی دو دایره»



subject:
Year: Month: Date:

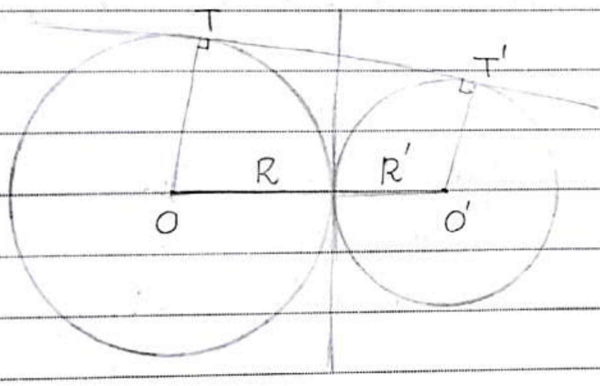
بافرض: $\begin{cases} OT = R \\ O'T' = R' \\ OO' = d \end{cases}$ داریم: $\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ O'H = TT' \\ OH = R + R' \end{cases}$

$OO'H : \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \longrightarrow d^2 = (R+R')^2 + TT'^2 \longrightarrow \boxed{TT' = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}}$

«حالت های دو دایره نسبت به هم»

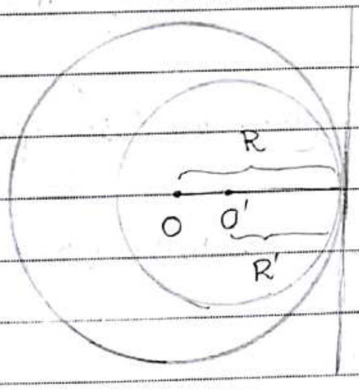
«دو دایره مماس» دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می نامند. در این نقطه مشترک، یک خط بر هر دو دایره مماس است.

اگر مرکزهای دو دایره در دو طرف این مماس باشند، آن دو دایره مماس خارجی اند. اگر هر دو مرکز در یک طرف مماس باشند، دو دایره مماس داخلی اند.



دو دایره مماس خارج اند و $OO' = d = R + R'$

دارای دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی است.



دو دایره مماس داخلند و $OO' = d = |R - R'|$

دارای یک مماس مشترک خارجی

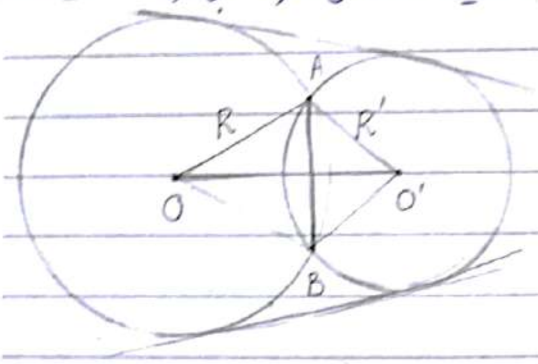
«نکته» نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = 2\sqrt{RR'}$ می باشد.

طول مماس مشترک خارجی: $TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \underset{d = R+R'}{=} \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2} = \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'}$

$= \sqrt{4RR'} = \boxed{2\sqrt{RR'}}$

SAMEN

دو دایره متقاطع: دو دایره را اگر فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند. در این حالت، دو دایره، فقط دو مماس مشترک خارجی دارند.



$$|R-R'| < OO' < R+R'$$

نکته: در دو دایره متقاطع نشان دهید: $|R-R'| < OO' < R+R'$

با توجه به نامساوی مثلثی در OAO' (قضیه حمار): $OO' < R+R'$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} R' < OO'+R \longrightarrow -OO' < R-R' \\ R < OO'+R' \longrightarrow R-R' < OO' \end{array}\right\} \longrightarrow -OO' < R-R' < OO' \longrightarrow |R-R'| < OO' \quad (2)$$

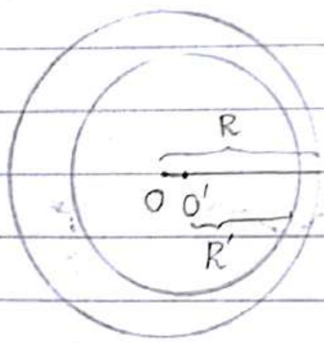
$$(1),(2) \longrightarrow |R-R'| < OO' < R+R'$$

نکته: نشان دهید در شکل بالا، پاره‌خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است.

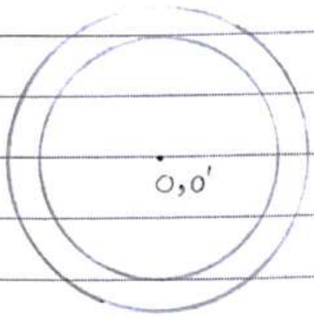
$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \longrightarrow O \text{ روی عمودمنصف } AB \\ O'A = O'B = R' \longrightarrow O' \text{ روی عمودمنصف } AB \end{array}\right\} \longrightarrow OO' \text{ عمودمنصف } AB$$

دو دایره متداخل: دو دایره را اگر تمام نقاط یکی در دیگری باشد، متداخل می‌نامند. در این حالت، دو دایره، هیچ مماس مشترکی ندارند.

همچنین: $d = OO' < |R-R'|$

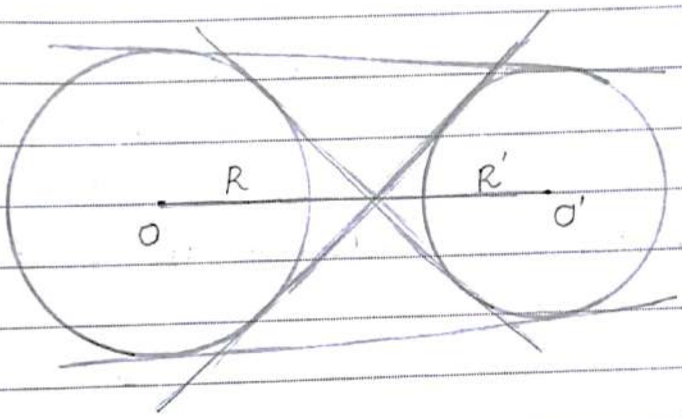


دو دایره هم مرکز: در دو دایره هم مرکز، مرکزهای دو دایره بر هم منطبق می‌باشند و هیچ مماس مشترک ندارند.



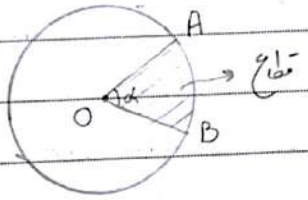
$d = 0$

دو دایره متخارج: دو دایره که هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند را متخارج گوییم. که در این حالت دو دایره دارای دو مماس مشترک خارجی و دو مماس مشترک داخلی می‌باشند.



$d = OO' > R + R'$

قطاع:



ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره نامیده می‌شود.

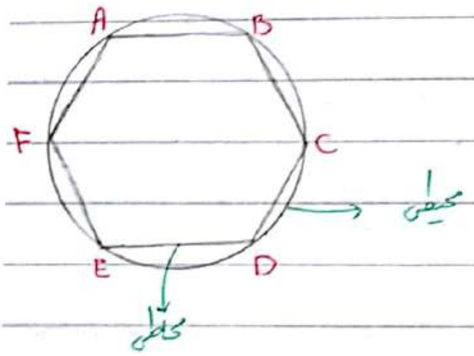
نکته: اگر زاویه‌ی مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد، در این صورت داریم:

(طول $\widehat{AB}$) $L = \frac{\pi R\alpha}{180}$ (مساحت قطاع) $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$

«چندضلعی‌های محاطی و محیطی»

«چندضلعی‌های محاطی»: چندضلعی را محاطی می‌گوییم، اگر و فقط اگر، دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد. مانند چندضلعی ABCDEF در شکل زیر.

به دایره‌ای که از همه رأس‌های چندضلعی می‌گذرد، دایره محیطی آن چندضلعی می‌گویند.



«قضیه»: یک چندضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر، عمودمنصف‌های همه‌ی ضلع‌های آن همرس باشند.

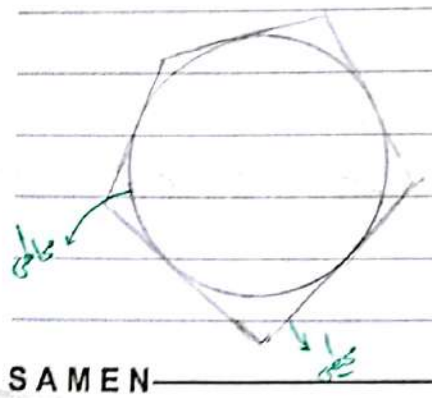
اثبات: طرف اول: فرض: چندضلعی محاطی است. حکم: عمودمنصف‌ها همرس هستند.

چندضلعی محاطی است، پس دایره‌ای از تمام رئوس آن می‌گذرد؛ چون فاصله‌ی تمام رأس‌ها تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است، پس طبق خاصیت عمودمنصف، چون فاصله مرکز تا دو سر هر ضلع برابر است، پس مرکز دایره روی عمودمنصف این اضلاع قرار دارد. بنابراین عمودمنصف‌های همه اضلاع همرس اند.

طرف دوم: فرض: عمودمنصف‌ها همرس اند حکم: چندضلعی محاطی است.

چون عمودمنصف‌های اضلاع چندضلعی همرس اند، با توجه به خاصیت عمودمنصف، همه‌ی رأس‌های چندضلعی، از نقطه همرسی به یک فاصله اند. پس دایره به مرکز نقطه‌ی همرسی و به شعاع فاصله ثابت از تمام رئوس چندضلعی می‌گذرد، پس چندضلعی محاطی است.

«چندضلعی محیطی»: یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر، دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همه‌ی ضلع‌های آن چندضلعی مماس باشد. در این صورت دایره را، دایره محاطی این چندضلعی می‌نامیم.



Subject:
Year: Month: Date:

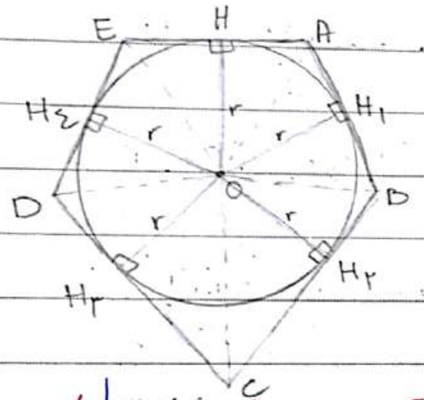
«قضیه»: یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه‌ی نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چندضلعی است.

اثبات: طرف اول: فرض: چندضلعی محیطی است. حکم: نیمسازهای زوایای داخلی چندضلعی همرس‌اند.

چندضلعی محیطی است، پس اضلاع چندضلعی بر دایره مماس‌اند و شعاع در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است. پس فاصله مرکز دایره از اضلاع چندضلعی، برابر شعاع دایره است. بنابراین طبق خاصیت نیمساز، روی نیمساز هر یک از زاویه‌ها قرار دارد. پس نیمسازهای زوایای داخلی چندضلعی همرس‌اند.

طرف دوم: فرض: نیمسازهای زوایای داخلی چندضلعی همرس‌اند. حکم: چندضلعی محیطی است.

اگر O محل تلاقی نیمسازهای داخلی این چندضلعی باشد، طبق خاصیت نیمسازها داریم: $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$ از طرفی همگی بر



اضلاع عمودند، پس دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH با اضلاع چندضلعی مماس است، پس چندضلعی محیطی است.

«نکته»: اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط 2p، شعاع دایره محاطی r باشد، نشان دهید: $r = \frac{S}{p}$ (p نصف محیط)

(طبق شکل بالا) $S_{کل} = S_{A\hat{O}B} + S_{B\hat{O}C} + S_{C\hat{O}D} + S_{D\hat{O}E} = \frac{1}{2} r (AB + BC + CD + DE) = \frac{1}{2} r \times 2p = rp$

$\longrightarrow r = \frac{S}{p}$

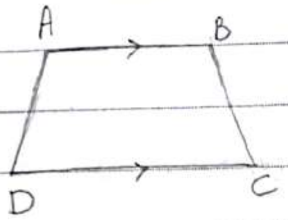
نصف محیط

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

«تمرین صفحه ۲۹»

۱- اثبات: طرف اول: فرض: ذوزنقه ABCD یک چهارضلعی محاطی است. حکم: ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است.

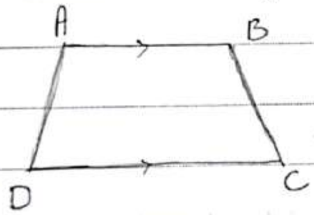


ABCD محاطی است $\longrightarrow \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$

$\longrightarrow \hat{C}=\hat{D}$ ⟵ ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است

ABCD ذوزنقه است $\longrightarrow \hat{A}+\hat{D}=180^\circ$

طرف دوم: فرض: ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است. حکم: ذوزنقه ABCD یک چهارضلعی محاطی است.

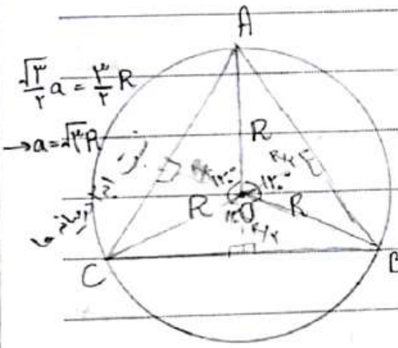


ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است $\longrightarrow \hat{C}=\hat{D}$

ABCD ذوزنقه است $\longrightarrow \hat{A}+\hat{D}=180^\circ$

$\Big\} \longrightarrow \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ ⟵ ذوزنقه ABCD محاطی است.

۲-



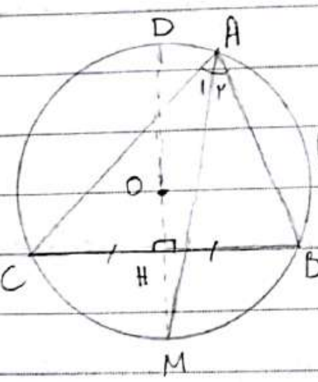
$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}R$

$\longrightarrow a=\sqrt{3}R$

$$S_{A\hat{B}C}=S_{A\hat{O}C}+S_{A\hat{O}B}+S_{B\hat{O}C}$$

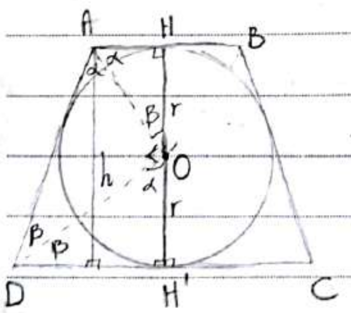
$$\longrightarrow S_{A\hat{B}C}=3\times\left(\frac{1}{2}\times R\times R\times \overset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 120^\circ}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

۳- $A\hat{B}C: OB=OC=R \longrightarrow$ OH عمود منصف BC ⟵ MD قطر است.



از A به M وصل می‌کنیم $\longrightarrow \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM} \longrightarrow \frac{\overset{\frown}{BM}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CM}}{2} \longrightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2 \longrightarrow$ AM نیمساز $\hat{A}$ است.

۴-



$$S=\frac{1}{2}(AB+CD)\times h \longrightarrow S=\frac{(AB+CD)}{2}\times 2r=r(AB+CD)$$

$$2\alpha+2\beta=180^\circ \longrightarrow \alpha+\beta=90^\circ \longrightarrow A\hat{O}D=90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}H=D\hat{O}H'=\alpha \\ H'\hat{D}O=H\hat{O}A=\beta \end{array}\right\} \longrightarrow A\overset{\triangle}{O}H \sim O\overset{\triangle}{D}H' \longrightarrow \frac{r}{\frac{AB}{2}}=\frac{\frac{CD}{2}}{r} \longrightarrow 2r=\sqrt{AB\times CD}$$

SAMEN

$$\longrightarrow S=r(AB+CD)=\sqrt{AB\times CD}\left(\frac{AB+CD}{2}\right)$$

subject:
Year: Month: Date:

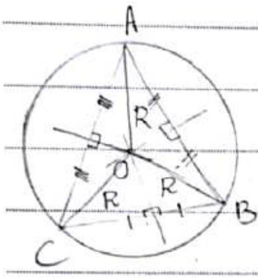
۵ـ الف)

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}$$

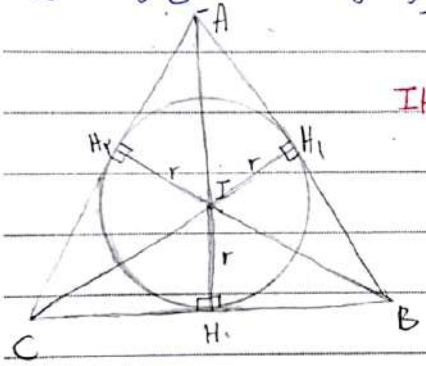
$$\Rightarrow \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}}$$

«دایره‌های محیطی و محاطی مثلث»

نکته: نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس این نقطه مرکز دایره محیطی مثلث است، پس هر مثلث همواره محاطی است.



نکته: نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث نیز از سه ضلع به یک فاصله است، پس این نقطه مرکز دایره محاطی مثلث است، پس هر مثلث همواره محیطی است.



$IH = IH_1 = IH_2 = r$

همچنین در مثلث نیز داریم: $r=\frac{S}{p}$ ← نصف محیط

ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a، شعاع دایره محاطی مثلث را بدست آورید.

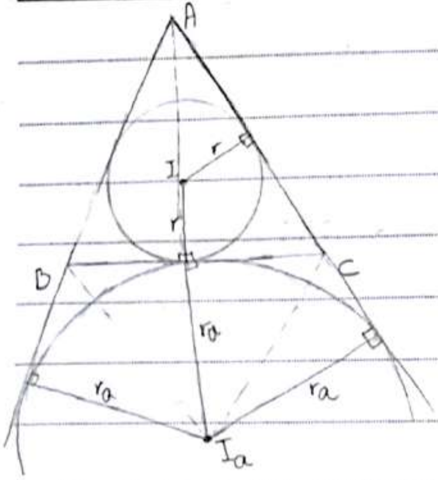
$$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a} \longrightarrow \boxed{r=\frac{\sqrt{3}}{6}a}$$

«دایره‌های محاطی خارجی مثلث»: نیمسازهای خارجی دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$، در نقطه‌ی I_A همرس اند، بنابراین I_A مرکز دایره است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامیم و شعاع آن را با r_a نمایش می‌دهیم.

همچنین دو دایره محاطی خارجی دیگر در رأس B و C وجود دارد که شعاع آن‌ها را به ترتیب با r_B و r_C نشان می‌دهیم.

subject:

Year: Month: Date:



«محاسبه شعاع دایره محاطی خارجی» حکم: $r_a = \dfrac{S}{P-a}$

(طبق شکل بالا) $S_{ABC} = S_{AI_aC} + S_{AI_aB} - S_{BI_aC} = \frac{1}{2} r_a \times b + \frac{1}{2} r_a \times c - \frac{1}{2} r_a \times a$

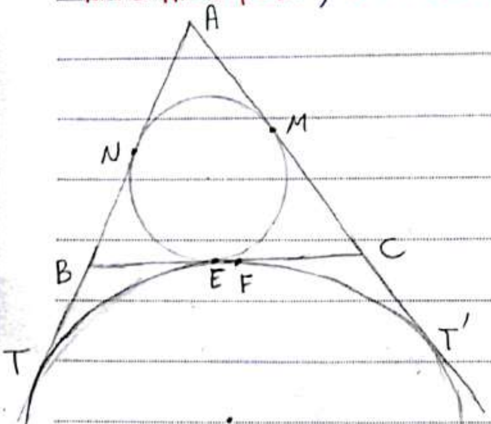
$= \frac{1}{2} r_a (b+c-a)$ (1)

$b+c-a = (a+b+c) - 2a = 2p - 2a$ (2)

(1),(2) $\rightarrow S = \frac{1}{2} r_a (2p-2a) = r_a(P-a) \longrightarrow \boxed{r_a = \dfrac{S}{P-a}}$

به طور مشابه ثابت می‌شود: $r_b = \dfrac{S}{P-b}$, $r_c = \dfrac{S}{P-c}$

ـ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث $\hat{ABC}$ با اضلاع آن M، N و E باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید: $AM = AN = P-a$, $BN = BE = P-b$, $CM = CE = P-c$, $AT = AT' = p$



میدانیم مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره باهم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} AN = c - BN \\ AM = b - CM \end{array}\right\} \xrightarrow{+} AN + AM = b + c - (BN + MC)$$

$$\xrightarrow[BN=BE,\ MC=CE]{AM=AN} 2AN = b+c-(\underbrace{BE+CE}_{a}) = b+c-a = 2p-2a$$

SAMEN

subject: ۴ یا

Year: Month: Date:

$\boxed{AN=AM=p-a}$ → به همین ترتیب اثبات می‌شود → $\boxed{BN=BE=p-b}$, $\boxed{CM=CE=p-c}$

$$\left.\begin{aligned} AT&=c+BT \\ AT'&=b+CT' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} AT+AT'=b+c+BT+CT' \xrightarrow[BT=BF,\ CT'=CF]{AT=AT'} 2AT=b+c+\underbrace{BF+CF}_{a}$$

$$\rightarrow 2AT=a+b+c \rightarrow \boxed{AT=AT'=p}$$

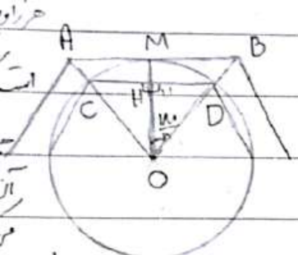
تمرین های صفحه ۳۰ :

۵-ب) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$

۶- در جزوه به عنوان مثال حل شده است.

۷-

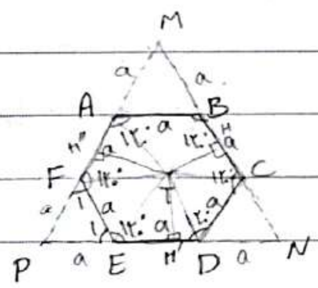
هر زاویه برابر $\frac{360}{n}$ است که در این حالت عمود آن را نصف می‌کند.



$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{180}{n}&=\frac{HD}{OD} \\ HD&=\frac{CD}{2},\ OD=r \end{aligned}\right\} \rightarrow \sin\frac{180}{n}=\frac{CD}{2r} \xrightarrow{\times 2r} 2r\sin\frac{180}{n}=\cancel{2r}\times\frac{CD}{\cancel{2r}}=CD \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{180}{n}&=\frac{MB}{OM} \\ MB&=\frac{AB}{2},\ OM=r \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan\frac{180}{n}=\frac{AB}{2r} \xrightarrow{\times 2r} 2r\tan\frac{180}{n}=\cancel{2r}\times\frac{AB}{\cancel{2r}}=AB \checkmark$$

۸-



$$\left.\begin{aligned} \hat{F}_1&=180^\circ-120^\circ=60^\circ \\ \hat{E}_1&=180^\circ-120^\circ=60^\circ \end{aligned}\right\} \rightarrow \hat{P}=60^\circ \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \hat{N}=60^\circ,\ \hat{M}=60^\circ$$

الف) $\overset{\triangle}{MNP}$ متساوی الاضلاع است. →

ب) $\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 9a^2} \rightarrow \frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}}=\frac{2}{3}$

پ) $TH+TH'+TH''=MH_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3a=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$

ت) $S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{1}{2}a\times(TH+TH'+TH'')=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \rightarrow \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}9a^2}=\frac{1}{3}$

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

$S_{T\hat{B}C}+S_{T\hat{D}E}+S_{T\hat{A}F}=\frac{S_{\text{شش‌ضلعی}}}{2} \longrightarrow S_{T\hat{A}B}+S_{T\hat{E}F}+S_{T\hat{C}D}=\frac{S_{\text{شش‌ضلعی}}}{2}$

$\longrightarrow S_{T\hat{B}C}+S_{T\hat{D}E}+S_{T\hat{A}F}=S_{T\hat{A}B}+S_{T\hat{E}F}+S_{T\hat{C}D}$ (ت

۹) ABCD مربع است. $\longrightarrow$ قطرهای AC و BD عمودمنصف یکدیگرند.

علاوه بر مربع ABCD، مربع QMNP را نیز رسم می‌کنیم و خطوط موجود در شکل عمودمنصف‌های اضلاع مربع جدید را نیز تشکیل می‌دهند.

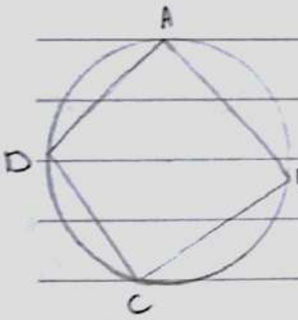
با توجه به اینکه هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس: $BM=MA=AN=ND=DP=PC=CQ=QB$ (1)

Δ مثلث ایجاد شده در شکل تساوی‌الساقین هستند و زوایای نظیر آن‌ها مساوی‌اند، پس: $\hat{A}=\hat{M}=\hat{B}=\hat{Q}=\hat{C}=\hat{P}=\hat{D}=\hat{N}$ (2)

طبق نتایج (1) و (2)، هشت‌ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

چهارضلعی‌های محاطی و محیطی

چهارضلعی محاطی: قضیه: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

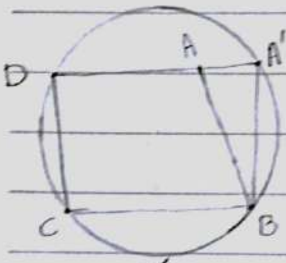


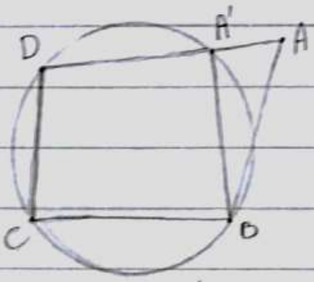
طرف اول: فرض: ABCD محاطی است. حکم: $\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{B}+\hat{D}=180^\circ\end{cases}$

$\hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$ ✓

$\hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}+\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$ ✓

طرف دوم: فرض: $\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{B}+\hat{D}=180^\circ\end{cases}$ حکم: ABCD محاطی است.





از سه نقطه B، C و D، همواره یک دایره می‌گذرد. (چون هر مثلث یک چندضلعی محاطی است و نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، مرکز دایره محیطی آن است.)

برهان خلف: فرض کنیم این دایره از A نگذرد. یا خط AD یا امتداد AD مانند شکل‌های بالا، دایره را در نقطه A' قطع می‌کند. پس

SAMEN

چهارضلعی $A'B\overset{\frown}{C}D$ محاطی است.

$\hat{A'} + \hat{C} = 180°$ ← طرف اول ← $A'B\overset{\frown}{C}D$ محاطی

فرض: $\hat{A} + \hat{C} = 180°$

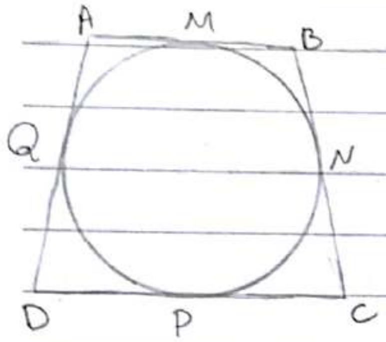
$\longrightarrow \hat{A} = \hat{A'}$ ✗

که این تناقض است. چون در مثلث $A\hat{A'}B$، اندازه هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگتر است. پس فرض خلف باطل،

و دایره از A نیز می‌گذرد، پس چندضلعی $ABCD$ محاطی است.

• چهارضلعی محیطی: • قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد.

طرف اول: فرض: $AB\overset{\frown}{C}D$ محیطی است. حکم: $AB + DC = AD + BC$

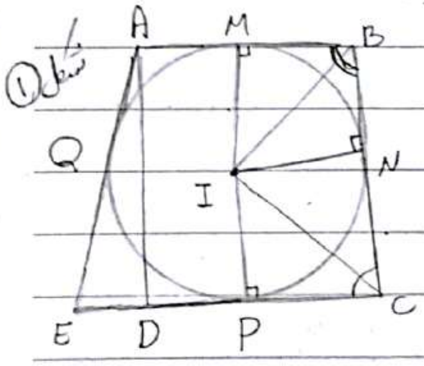


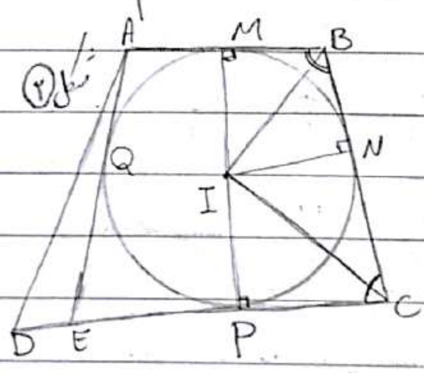
می‌دانیم مماس‌های رسم شده از نقطه‌ی خارج دایره بر دایره با هم برابرند.

$AB + DC = AM + MB + DP + PC = AQ + BN + DQ + CN$

$= (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC \longrightarrow \boxed{AB + DC = AD + BC}$ ✓

طرف دوم: فرض: $AB + DC = AD + BC$ حکم: $AB\overset{\frown}{C}D$ محیطی است.





نیمسازهای دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در I قطع کنند. از I عمودهایی بر اضلاع AB، BC و DC رسم می‌کنیم. داریم:

I روی نیمساز $\hat{B}$ $\longrightarrow IM = IN$

I روی نیمساز $\hat{C}$ $\longrightarrow IN = IP$

$\longrightarrow IN = IM = IP$

subject:
Year: Month: Date:

پس I از سه ضلع AB، BC و DC به یک فاصله است. پس دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM، بر این سه ضلع مماس است، چون شعاع در نقطه تماس بر آن‌ها عمود است. به برهان خلف اگر AD بر این دایره مماس نباشد، از A خط مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم تا DC یا امتداد آن را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $\overset{\frown}{ABCE}$ محیطی است.

$\overset{\frown}{ABCE}$ محیطی $\xrightarrow{\text{طرف اول}}$ $AB+EC=AE+BC$

فرض: $AB+DC=AD+BC$

$\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ شکل ②: $DC-EC=AD-AE$ $\longrightarrow$ $DE+AE=AD$

$\hat{ADE}$ $\xrightarrow{\text{حمار}}$ $DE+AE>AD$

$\longrightarrow$ ※

$\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ شکل ①: $EC-DC=AE-AD$ $\longrightarrow$ $ED+AD=AE$

$\hat{ADE}$ $\xrightarrow{\text{حمار}}$ $ED+AD>AE$

$\longrightarrow$ ※

پس فرض خلف باطل و دایره بر AD مماس است. بنابراین چهارضلعی $\overset{\frown}{ABCD}$ محیطی است.

— محیطی یا محاطی بودن چهارضلعی‌های ذوزنقه، ذوزنقه متساوی‌الساقین، کایت، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع را مشخص کنید.

۱ـ ذوزنقه: چون زوایای مقابل مکمل نیست، پس محاطی نیست و در حالت کلی نیز جمع دو قاعده و دو ساق با هم برابر نیست، پس در حالت کلی محیطی نیست.

۲ـ ذوزنقه متساوی‌الساقین: زوایای مقابل مکمل‌اند، پس محاطی است و در حالت کلی نیز، محیطی نیست.

۳ـ کایت: در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه قائمه داشته باشد، محاطی است و در هر صورت محیطی است.

۴ـ متوازی‌الاضلاع: نه محاطی است، نه محیطی.

۵ـ مستطیل: محاطی است چون زوایای مقابل مکمل‌اند. محیطی نیست چون جمع دو طول با دو عرض با هم برابر نیست.

۶ـ لوزی: محاطی نیست ولی محیطی است.

۷ـ مربع: هم محاطی هم محیطی.

subject:
Year: Month: Date:

تست‌های زاویه‌ها در دایره

۱) گزینه‌ی ۱

$۲(۳m+۴)=۲۰ \longrightarrow ۶m+۸=۲۰ \longrightarrow ۶m=۱۲ \longrightarrow \boxed{m=۲}$

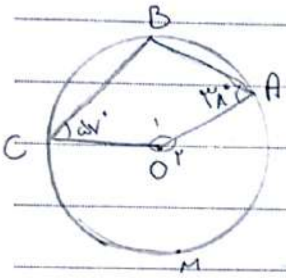
۲) گزینه‌ی ۳

$\frac{\text{اندازه } \overset{\frown}{AB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{\text{محیط دایره}} \longrightarrow \frac{۴۵}{۳۶۰}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{۲\pi r} \longrightarrow \text{طول } \overset{\frown}{AB}=\frac{\pi r}{۴}$

$\frac{\text{اندازه } \overset{\frown}{A'B'}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{A'B'}}{\text{محیط دایره}} \longrightarrow \frac{۶۰}{۳۶۰}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{A'B'}}{۲\pi r'} \longrightarrow \text{طول } \overset{\frown}{A'B'}=\frac{\pi r'}{۳}$

$\frac{\pi r}{۴}=\frac{\pi r'}{۳} \longrightarrow \boxed{\frac{r}{r'}=\frac{۴}{۳}}$

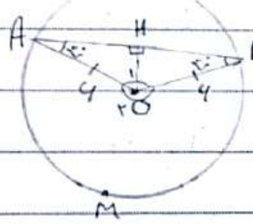
۳) گزینه‌ی ۲



$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AMC}}{۲} \;,\; \hat{O}_۲=\overset{\frown}{AMC} \longrightarrow ۲\hat{B}=\hat{O}_۲ \;,\; \hat{O}_۲=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$

$\longrightarrow \hat{B}=\hat{A}+\hat{C}=۹۵^\circ \longrightarrow \overset{\frown}{AMC}=۲\times۹۵=۱۹۰^\circ \longrightarrow \boxed{\overset{\frown}{ABC}=۳۶۰^\circ-۱۹۰^\circ=۱۷۰^\circ}$

۴) گزینه‌ی ۴



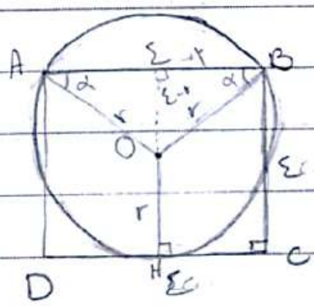
$\frac{\text{اندازه کمان } \overset{\frown}{AMB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AMB}}{\text{محیط دایره}} \longrightarrow \frac{\text{اندازه } \overset{\frown}{AMB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{۸\pi}{۲\pi\times۶}=\frac{۲}{۳}$

$\text{اندازه } \overset{\frown}{AMB}=۲۴۰^\circ \longrightarrow \text{اندازه کمان } \overset{\frown}{AB}=۱۲۰^\circ \longrightarrow \hat{O}_۱=۱۲۰^\circ$

مثلث متساوی‌الساقین است ← ارتفاع و نیمساز (میانه) منطبق‌اند $\longrightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AO \longrightarrow AH=۳\sqrt{۳}$

$\longrightarrow AB=۲AH=۲\times۳\sqrt{۳} \longrightarrow \boxed{AB=۶\sqrt{۳}}$

۵) گزینه‌ی ۲

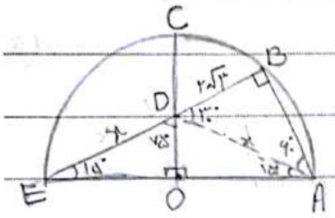


$۲^۲+(۴-r)^۲=r^۲ \longrightarrow ۴+۱۶-۸r+r^۲=r^۲$

$\longrightarrow ۲۰=۸r \longrightarrow r=\frac{۲۰}{۸}=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}=۲٫۵$

subject:
Year: Month: Date:

۶) گزینه‌ی ۲

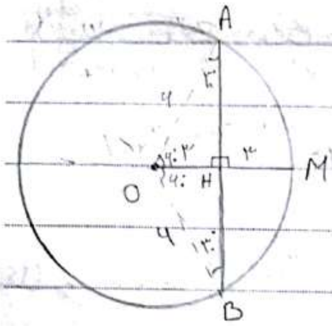


$\overset{\frown}{AB}=30^\circ \to \hat{E}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=15^\circ$

$A\hat{B}D:\ \hat{A}=60^\circ \to \frac{\sqrt{3}}{2}x=2\sqrt{3} \to x=4$

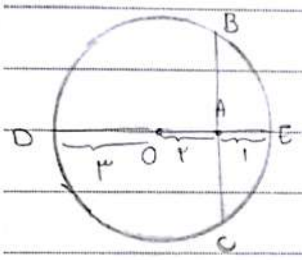
$\to AB^2+BD^2=AD^2 \to AB^2+12=16 \to AB^2=4 \to \boxed{AB=2}$

۷) گزینه‌ی ۱



$\frac{\text{اندازه‌ی } \overset{\frown}{AMB}}{360^\circ}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AMB}}{2\pi r} \to \text{طول } \overset{\frown}{AMB}=\frac{120}{360}\times 12\pi=4\pi$

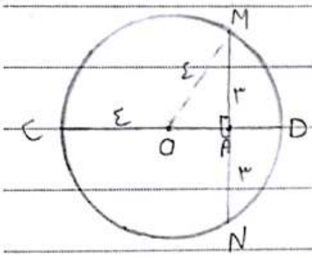
۸) گزینه‌ی ۳ ـ فرض می‌کنیم که BC از A بگذرد و BC=۳ در این صورت: $BA\times AC=AE\times AD$



$\Rightarrow BA\times AC=5\ ,\ BA+AC=3 \to$ ✗

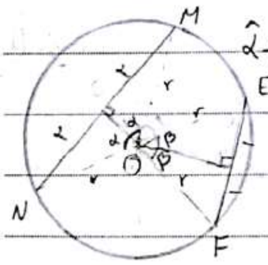
پس چنین وتری وجود ندارد.

۹) گزینه‌ی ۴



$OA=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

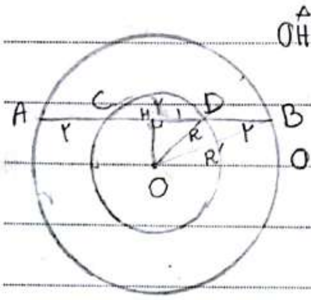
۱۰) گزینه‌ی ۲



$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ \to \sin\alpha=\cos\beta \to \frac{2}{r}=\frac{\sqrt{r^2-1}}{r} \to 2=\sqrt{r^2-1}$

$\to 4=r^2-1 \to r=\sqrt{5}$

۱۱) گزینه‌ی ۴



$O\hat{H}B:\ OH^2+3^2=R'^2$

$O\hat{H}D:\ OH^2+1^2=R^2$

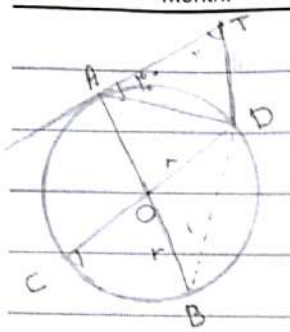
$\to R'^2-R^2=8 \to 9R^2-R^2=8 \to R=1$

$R'=3$

subject:

Year: Month: Date:

۱۲) گزینه‌ی ۲



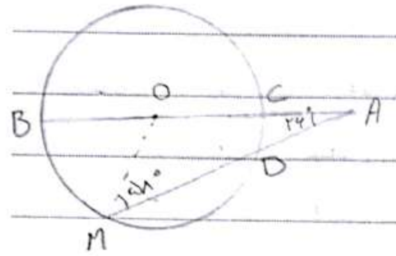
$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = 30°$

$r = r \longrightarrow \hat{B} = \hat{D}$

$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$

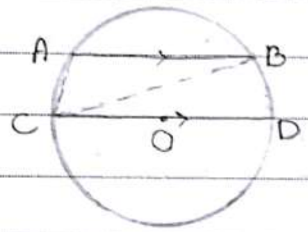
$\longrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{D} \longrightarrow C\hat{D}B = 30°$

۱۳) گزینه‌ی ۳



$\hat{O} = 180° - 26° - 58° = 96°$, $O = \overset{\frown}{MDC} = 96°$

۱۴) گزینه‌ی ۴

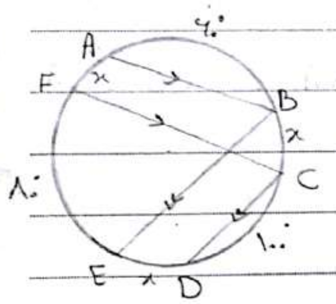


$AB \parallel CD \longrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

$\hat{C} = \frac{180° - 2\overset{\frown}{AC}}{2} = 90° - \overset{\frown}{AC}$, $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$\longrightarrow \hat{A} = 180° - 90° + \overset{\frown}{AC} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 90° + \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \longrightarrow \hat{A} - \hat{B} = 90° + \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 90°$

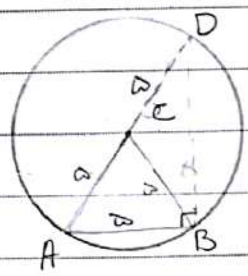
۱۵) گزینه‌ی ۴



$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = x = (180° - 60° - 80° - 100°) \times \frac{1}{3} = 40°$

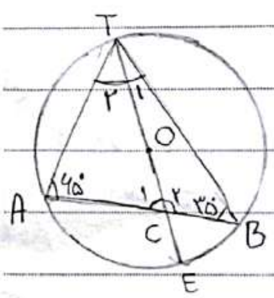
$\longrightarrow F\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{FED}}{2} = \frac{80° + 40°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$

۱۶) گزینه‌ی ۱



$BD = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

۱۷) گزینه‌ی ۱



$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{TBE} - \overset{\frown}{TB} = 180° - 65° \times 2 = 180° - 130° = 50°$

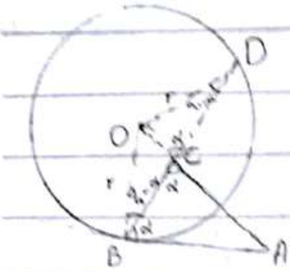
$\hat{C}_1 = \frac{\overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{BE}}{2} = \frac{35° \times 2 + 50°}{2} = \frac{70° + 50°}{2} = 60°$

SAMEN

subject:

Year: Month: Date:

۱۸) گزینه‌ی ۲ از O به D وصل می‌کنیم زاویه‌ی پدید آمده ۹۰ است.



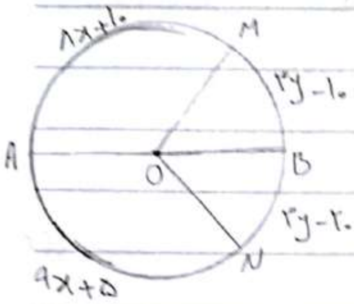
$\hat C_1=\hat C_2=\hat B_1=\alpha$

$B\hat OD: BO=DO \to \hat B=\hat D=90-\alpha$

$\to O\hat CD: \hat O=180°-(90°-\alpha+\alpha)=90°$

۱۹) گزینه‌ی ۲ - با این شرایط طرح شده در سؤال، تنها دو جا را می‌توان رسم کرد.

۲۰) گزینه‌ی ۲



$9x+5+3y-20=180°$

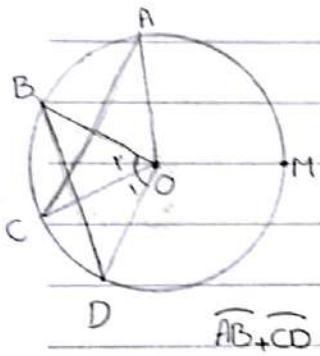
$17x+15+6y-30=360°$

$\to 18x+10+6y-40=17x+15+6y-30$

$\to x=15 \to y=20$

$\to M\hat ON=\overset{\frown}{MBN}=6y-30=120-30=90$

۲۱) گزینه‌ی ۳

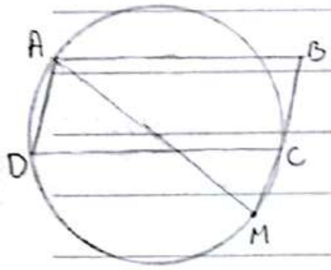


$\overset{\frown}{BC}=20° \to \hat O_2=20°$, $AC=BD \to \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

$\to \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD} \to \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ①

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AMD}=360° \to \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=140° \xrightarrow{①} \overset{\frown}{CD}=70°$

۲۲) گزینه‌ی ۲

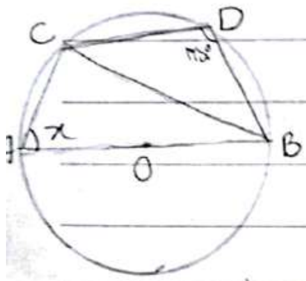


$\hat D=\hat M=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$\hat D=\hat B$

$\to \hat B=\hat M=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \to A\hat BM$ تساوی الساقین

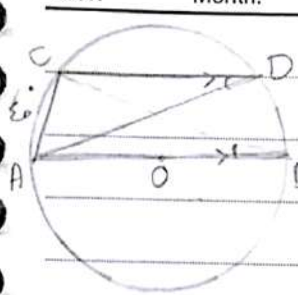
۲۳) گزینه‌ی ۳



ذوزنقه $ABCD \to \hat A+\hat D=180° \to \hat A=x=55°$

SAMEN

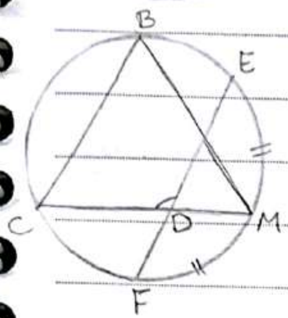
subject:
Year: Month: Date:



۲۴) گزینه ۳

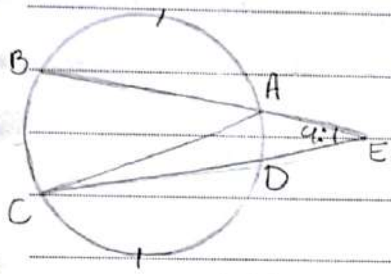
$CD \parallel AB \to \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$, $\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 20^\circ$

$\hat{A} = \frac{180^\circ - (40^\circ + 40^\circ)}{2} = 50^\circ \to A\hat{C}D = 180^\circ - (50^\circ + 20^\circ) = 110^\circ$



۲۵) گزینه ۳

$\hat{B} + C\hat{D}E = \frac{\overset{\frown}{CFM}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CBE} + \overset{\frown}{FM}}{2} \underset{\overset{\frown}{FM} = \overset{\frown}{EM}}{=} \frac{\overset{\frown}{CFM} + \overset{\frown}{CBE} + \overset{\frown}{EM}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

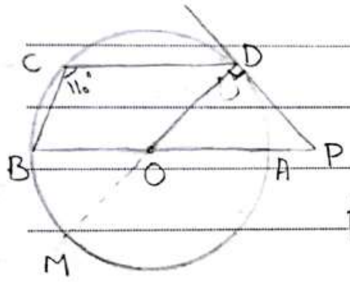


۲۶) گزینه ۲

$\hat{E} = 60^\circ \to \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD} = 120^\circ \to \overset{\frown}{BC} = 120^\circ + \overset{\frown}{AD}$

$120^\circ + \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AD} + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times (120^\circ + \overset{\frown}{AD})\right) = 360^\circ$

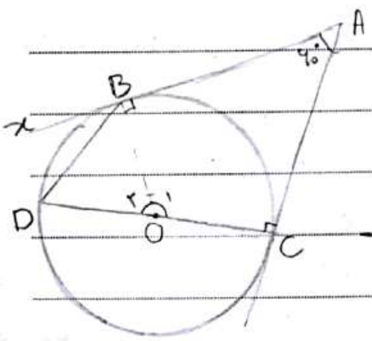
$\to 240^\circ + 3\overset{\frown}{AD} = 360^\circ \to 3\overset{\frown}{AD} = 120^\circ \to \overset{\frown}{AD} = 40^\circ \to A\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$



۲۷) گزینه ۴

$\hat{C} = 110^\circ = \frac{180^\circ + \overset{\frown}{AD}}{2} \to \overset{\frown}{AD} = 40^\circ$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

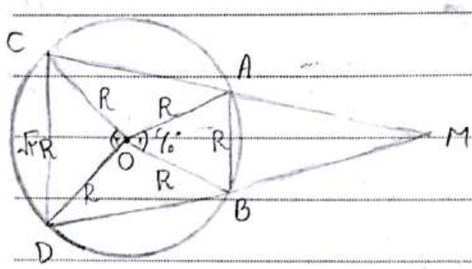
$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{BCD} - \overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\cancel{\overset{\frown}{BC}} + \overset{\frown}{CD} - \cancel{\overset{\frown}{AD}}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$



۲۸) گزینه ۳

$\hat{O}_1 + \hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = 180^\circ \to \hat{O}_1 = 120^\circ \to \hat{O}_2 = 60^\circ \to \overset{\frown}{BD} = 60^\circ$

$\to x\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$



۲۹) گزینه ۱

$R^2 + R^2 = (\sqrt{2}R)^2 \to 2R^2 = 2R^2$

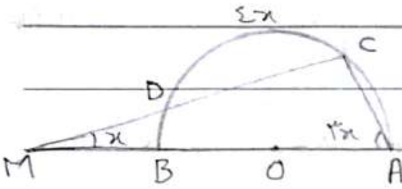
$\to \hat{O}_2 = 90^\circ \to \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$

SAMEN

subject:

Year: Month: Date:

۳۰) گزینه ۲

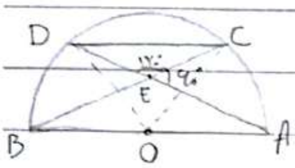


$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \to 3x = \frac{4x + \overset{\frown}{BD}}{2} \to \overset{\frown}{BD} = 2x$

$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{2} \to x = \frac{\overset{\frown}{AC} - 2x}{2} \to \overset{\frown}{AC} = 4x$

$\to 2x + 4x + 4x = 180° \to x = 18° \to \overset{\frown}{AC} = 72°$

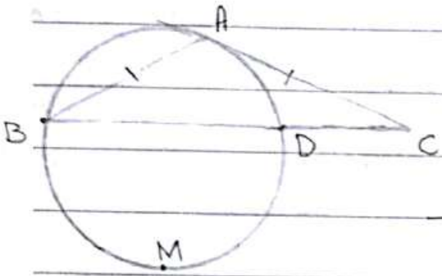
۳۱) گزینه ۳



$120° = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} \to 240° = 180° + \overset{\frown}{CD} \to \overset{\frown}{CD} = 60°$

$\to D\hat{O}C$ (متساوی‌الاضلاع) $\to DC = R \to \frac{S_{C\hat{D}E}}{S_{A\hat{B}E}} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$

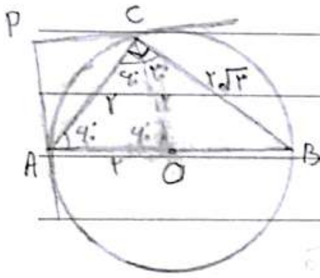
۳۲) گزینه ۳



$\hat{C} = \hat{B} \to \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AD}}{2} \to \overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{AD}$

$\to \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} = 3\overset{\frown}{AD} = 360° - 222° = 138° \to \overset{\frown}{AD} = 46° \to \hat{C} = \frac{46°}{2} = 23°$

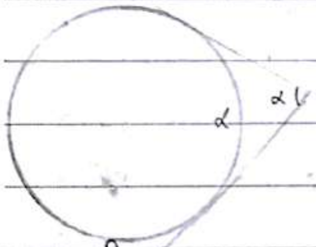
۳۳) گزینه ۴



$AB = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

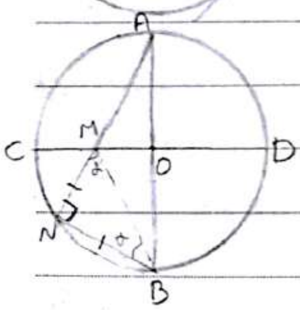
$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{CBA} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{120° + 180° - 60°}{2} = 120°$

۳۴) گزینه ۲



$\alpha = \frac{360° - \alpha - \alpha}{2} \to 4\alpha = 360° \to \alpha = 90°$

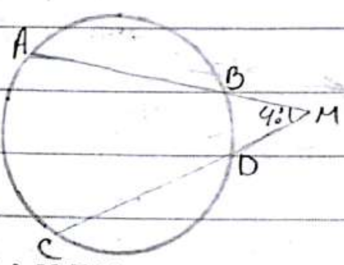
۳۵) گزینه ۴



$\alpha + \alpha = 90° \to \alpha = 45° , MA = MB \to \hat{A} = \hat{B}$

$\to \hat{A} + \hat{B} = \alpha \to 2\hat{A} = 45° \to A = 22.5°$

۳۶) گزینه ۳



$AB = CD \to \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = x , 60° = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{2}$

$\to \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD} = 120° , \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = 360° - 2x$

$\to \overset{\frown}{AC} = 240° - x \to \overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} = 240° - x + x = 240°$

subject:
Year: Month: Date:

«تبدیل‌های هندسی»

تبدیل T در صفحه P، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P، دقیقاً یک نقطه مانند A′ از صفحه P نظیر می‌کند و برعکس.

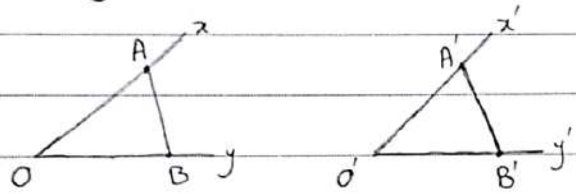
هر نقطه A′ از صفحه P، تصویر دقیقاً یک نقطه‌ی A از صفحه P است. اگر تبدیل را با T نمایش دهیم، داریم: $T: P \longrightarrow P \ , \ T(A)=A'$

«طولپا (ایزومتری)»: تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند. به عبارتی اگر داشته باشیم:

$T(A)=A'$, $T(B)=B'$ آنگاه $AB=A'B'$

«قضیه ۱»: در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.

اثبات: فرض کنیم T تبدیل طولپا باشد، تصویر زاویه‌ی $x\hat{O}y$ تحت T، زاویه‌ی $x'\hat{O}'y'$ است. اگر تصویر نقاط A و B روی اضلاع زاویه‌ی $x\hat{O}y$، نقاط A′ و B′ باشد، یعنی:



$O'=T(O)$, $B'=T(B)$, $A'=T(A)$

چون تبدیل طولپاست، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ OA=O'A' \\ OB=O'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}B \cong O'\hat{A}'B' \longrightarrow x\hat{O}y = x'\hat{O}'y' \checkmark$$

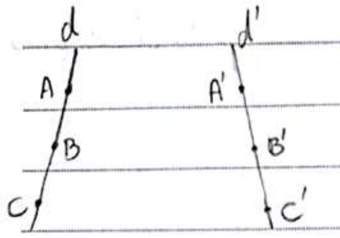
«نکته ۱»: در تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب، می‌توان ثابت کرد، تبدیل یافته هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل یافته یک خط، کافیست تبدیل یافته‌ی دو نقطه دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

ـ ثابت کنید، تصویر هر خط راست، تحت اثر تبدیل طولپا، خطی راست است.

اثبات: اگر T تبدیلی ایزومتری و d خطی راست باشد و A و B و C، سه نقطه دلخواه روی خط d باشند، به طوری B بین A و C واقع است، نشان

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:



می‌دهیم، $T(A)$ ، $T(B)$ و $T(C)$ روی یک خط راست قرار دارند.

فرض کنید: $A' = T(A)$ ، $B' = T(B)$ ، $C' = T(C)$ ، $AB + BC = AC$

T تبدیل طولپاست، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \longrightarrow A'B' + B'C' = A'C' \longrightarrow$$

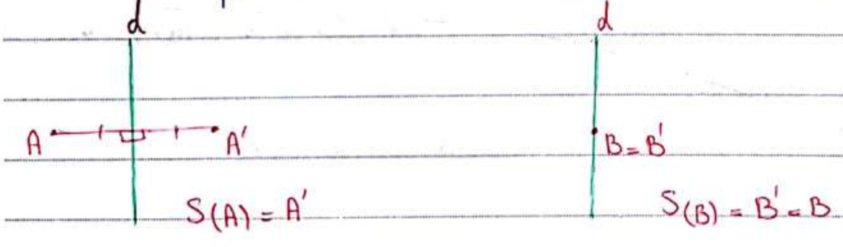
یعنی A' ، B' و C' روی یک خط راست قرار دارند.

نکته ۲: اگر شکلی توسط یک تبدیل طولپا، تصویر شود، تصویر شکل با شکل اصلی هم‌نهشت است.

نقطه ثابت: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن خودش باشد، نقطه‌ی ثابت تبدیل می‌نامیم به عبارتی دیگر در تبدیل T اگر $T(A) = A$ باشد؛ آنگاه نقطه A ثابت است.

بازتاب:

به ازای هر خط d در صفحه، بازتاب S نسبت به خط d تبدیلی است که هر نقطه مثل A را که روی d قرار ندارد، به نقطه مانند A' تصویر کند بطوری که خط d عمود منصف AA' باشد و تصویر هر نقطه مثل B که روی d قرار داشته باشد، بر خودش منطبق کند. خط d را محور تقارن بازتاب می‌گوییم.



نکته ۳: بازتاب نسبت به خط d، بی‌شمار نقطه‌ی ثابت دارد، زیرا: بی‌شمار نقطه روی خط، می‌توان یافت که تصویر هرکدام روی خودشان می‌افتد.

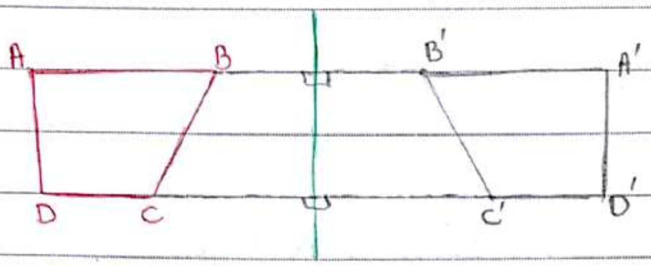
یادآوری: برای رسم قرینه یا بازتاب یک شکل، نسبت به یک خط (محور تقارن بازتاب) از هر نقطه‌ی شکل بر محور بازتاب عمود کرده و به اندازه خودش از طرف دیگر امتداد می‌دهیم تا تصویر آن نقطه ایجاد شود، سپس تصاویر حاصل را به همان ترتیب نقاط اولیه به هم وصل می‌کنیم.

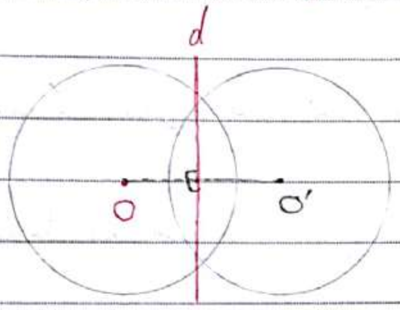
نکته ۴: الف) وقتی نقطه A' بازتاب نقطه A، نسبت به خط d باشد، نقطه A هم بازتاب نقطه A' نسبت به d است.

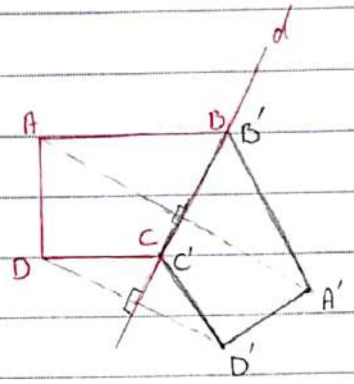
ب) بازتاب یک نقطه نسبت به خط را ترکیبی نقطه‌ای اولیه نسبت به خط می‌گیریم، در این صورت، ترکیبی ترکیب یک نقطه مثل A تحت بازتاب S خود نقطه A است.

$$\left.\begin{array}{l} A' = S(A) \\ A = S(A') \end{array}\right\} \longrightarrow S(S(A)) = S(A') = A$$

ـ بازتاب شکل‌های زیر را نسبت به خط‌های داده شده رسم کنید.





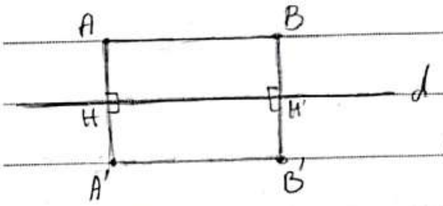


قضیه ۲: در هر بازتاب، اندازه هر پاره‌خط و اندازه تصویر آن باهم برابرند (بازتاب یک تبدیل ایزومتری است).

اثبات: حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم اندازه پاره‌خط با اندازه تصویر آن برابر است

الف) پاره‌خط AB با خط d موازی است.

اگر A' و B' بازتاب نقطه‌های A و B نسبت d باشند، در این صورت داریم:



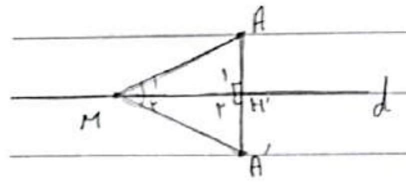
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB \parallel d \\ AH \text{ عمود} \end{array}\right\} \longrightarrow \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \left.\begin{array}{l} AB \parallel d \\ BH' \text{ عمود} \end{array}\right\} \longrightarrow \hat{B} = \hat{H'} = 90^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow ABH'H \text{ مستطیل} \longrightarrow AH = BH'$$

$$\left.\begin{array}{l} \longrightarrow 2AH = 2BH' \longrightarrow AA' = BB' \\ \left.\begin{array}{l} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array}\right\} \longrightarrow AA' \parallel BB' \end{array}\right\} \longrightarrow ABB'A' \text{ مستطیل} \longrightarrow \boxed{AB = A'B'}$$

subject:
Year: Month: Date:

ب) فرض کنید یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده‌شده روی خط بازتاب باشد. در این صورت: $S_{(M)}=M \ , \ S_{(A)}=A'$

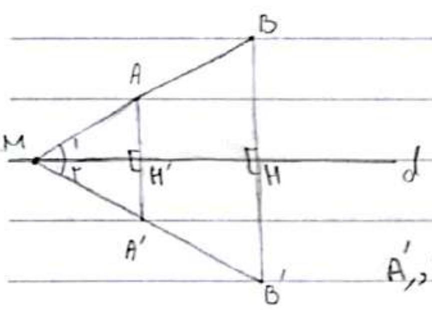
روش اول:



$$\left.\begin{array}{l} AH=A'H \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \\ MH=MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\hat{M}H \cong A'\hat{M}H \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{MA=MA'} \\ \hat{M}_1=\hat{M}_2 \end{array}\right.$$

روش دوم: M روی d عمودمنصف AA' است، پس: $MA=MA'$

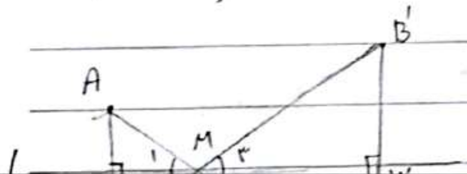
پ) در این حالت پاره‌خط AB با محور بازتاب d، نه موازی است و نه متقاطع.



پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در M قطع کند. B' بازتاب B نسبت به d را بدست می‌آوریم. MB' را رسم می‌کنیم. از A عمودی به d رسم کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا MB' را در A' قطع کند. در مثلث $M\hat{A}A'$، MH' هم ارتفاع است و هم نیمساز. پس میانه نیز می‌باشد. بنابراین: $AH'=A'H'$ یعنی A' بازتاب A نسبت به خط d است. حال طبق (ب) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MB=MB' \\ MA=MA' \end{array}\right\} \longrightarrow MB-MA=MB'-MA' \longrightarrow \boxed{AB=A'B'}$$

ت) پاره‌خط AB، خط d را در M قطع کند.

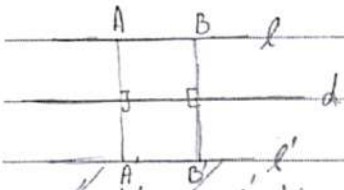


در این حالت بازتاب نقطه A نسبت به d را پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم. از B عمود BH' را

[redacted]

subject:
Year: Month: Date:

نکته ۵: در حالت کلی بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند. این نکته را در سه حالت بررسی می‌کنیم.

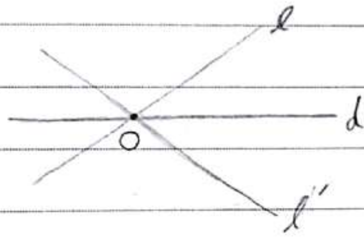


حالت اول: خط l با محور بازتاب موازی باشد.

طبق شکل دو نقطه A و B را از l در نظر گرفته و بازتاب آن‌ها نسبت به d یعنی A' و B' را بدست می‌آوریم و خط l' را که از $A'B'$ می‌گذرد را در نظر می‌گیریم. طبق قسمت (الف) قضیه طولپایی چون $AB \parallel d$ است، نتیجه می‌شود $A'B' \parallel d$ بنابراین: $l \parallel l'$ و شیب آن‌ها برابر است.

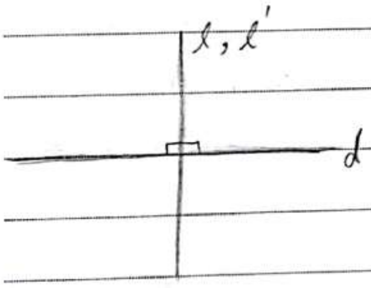
حالت دوم: خط l با محور بازتاب موازی نباشد.

خط l' بازتاب l را نسبت به d رسم می‌کنیم. اگر l و d در نقطه O متقاطع باشند، در این صورت سه خط l و d و l' در O متقاطع‌اند.



پس l موازی l' نیست، پس شیب برابر نیست.

حالت سوم: خط l بر محور بازتاب عمود باشد.

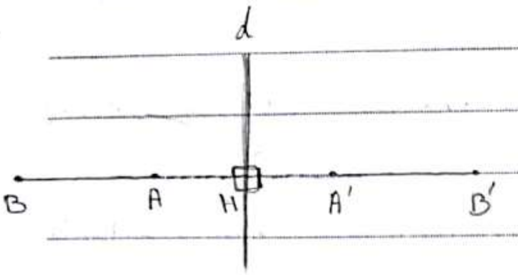


در این حالت، بازتاب l نسبت به d بر خودش منطبق است، پس شیب آن حفظ می‌شود.

subject:
Year: Month: Date:

تمرین های صفحه ٤٤ کتاب درسی

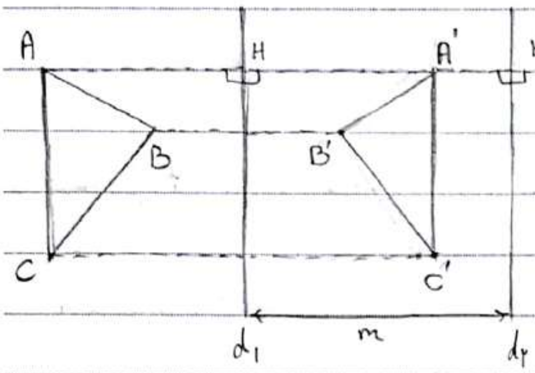
۱)



$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ BH = B'H \end{array}\right\} \xrightarrow{\ominus} B'H - A'H = BH - AH \longrightarrow \boxed{AB = A'B'}$$

۲) جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه های ساعت است، در نتیجه نمی توان گفت که بازتاب، جهت حرکت را حفظ می کند.

۳)



الف) $AA' = AH + HA' + A'H' + H'A''$

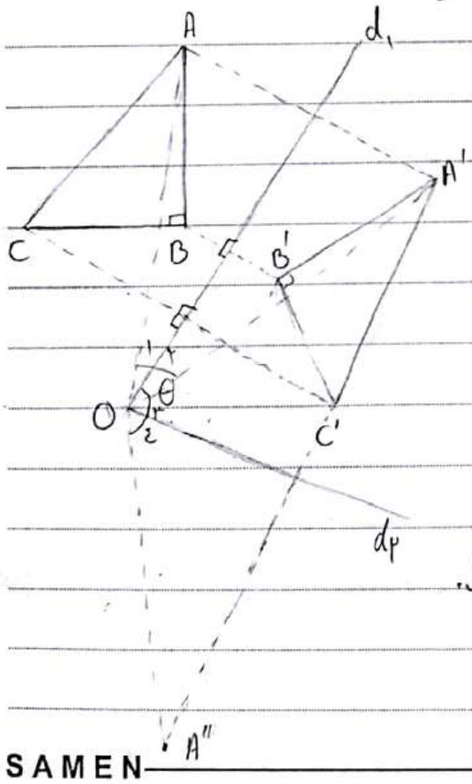
$$\frac{AH = A'H}{A'H' = A''H'} \rightarrow 2A'H + 2A'H' = AA' = 2\times(A'H + A'H') = 2HH'$$

$\longrightarrow AA' = 2m$

ب) اندازه BB'' و CC'' مشابه بالا اثبات می شود که $2m$ است.

پ) تبدیل مورد نظر، یک انتقال است که مثلث را به اندازه $2m$ انتقال می دهد و راستای آن عمود بر دو خط d_1 و d_2 است و همچنین، نتیجه می گیریم که بازتاب بازتاب یک شکل که محورهای بازتاب آن ها موازی هستند، یک انتقال است.

٤)



الف) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (d_1 محور بازتاب) و $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ (d_2 محور بازتاب)

$$A\hat{O}A'' = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2\times(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 2\theta$$

ب) اندازه $B\hat{O}B''$ و $C\hat{O}C''$ مشابه بالا اثبات می شود که 2θ است.

پ) تبدیل مورد نظر، یک دوران است که مثلث را با زاویه 2θ دوران می دهد و همچنین، نتیجه می گیریم، بازتاب بازتاب یک شکل که محورهای آن متقاطع هستند، یک دوران است.

subject:
Year: Month: Date:

- به ازای کدام مقدار a، بازتاب خطی به معادله $y=ax+2a-1$ نسبت به خطی به معادله $2y-x=0$ بر خودش نگاشته می‌شود؟

در دو حالت، بازتاب یک خط بر خودش نگاشته می‌شود: ۱- وقتی خط بر محور بازتاب عمود باشد. ۲- زمانی که خط بر محور بازتاب منطبق باشد.

۱) دو خط بر هم عمودند ⟵ $\ell \perp d \longrightarrow m_\ell \cdot m_d = -1 \longrightarrow \boxed{a=-2}$

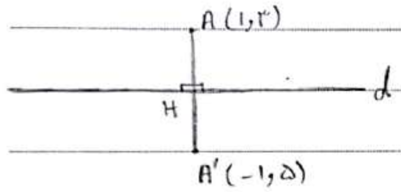
۲) دو خط بر هم منطبق باشند:

الف) $m_\ell = m_d \longrightarrow a=\frac{1}{2}$

ب) عرض از مبدأ با هم برابر: $2a-1=0 \longrightarrow a=\frac{1}{2}$

$\boxed{a=\frac{1}{2}}$

- دو نقطه $A(1,3)$ و $A'(-1,5)$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d هستند. معادله خط d را بیابید.



خط d عمودمنصف AA' است. پس داریم:

$m_{AA'} = \frac{5-3}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1$, $AA' \perp d \longrightarrow m_d = \frac{-1}{m_{AA'}} \longrightarrow m_d = \frac{-1}{-1} = 1$

$H = \frac{A+A'}{2} = (0,4) \longrightarrow$ معادله خط d: $y-4 = 1\times(x-0) \longrightarrow d: \boxed{y=x+4}$

- نقطه $A'(-1,3)$ تصویر نقطه A در اثر بازتاب نسبت به خط $d: x-y+1=0$ می‌باشد. مختصات نقطه A را به دست آورید.

معادله خط شامل AA' را می‌نویسیم. این خط بر خط d عمود است. پس داریم: $AA' \perp d \longrightarrow m_{AA'} = \frac{-1}{m_d} = \frac{-1}{1} = -1$

$A'(-1,3), m_{AA'} = -1 \longrightarrow AA': y-3 = -1\times(x+1) \longrightarrow AA': y=-x+2$

پیدا کردن مختصات H: $\begin{cases} d: y=x+1 \\ AA': y=-x+2 \end{cases} \longrightarrow x+1=-x+2 \longrightarrow 2x=1 \longrightarrow x=\frac{1}{2} \longrightarrow y=\frac{3}{2}$

$\longrightarrow H(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) \longrightarrow H = \frac{A+A'}{2} \longrightarrow A = 2H - A' = 2\times(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) - (-1,3) = (2,0)$

روش تستی: اگر معادله خط محور بازتاب، ضریب x و y، عددی نباشد یعنی ۱ یا ۱- باشد، داریم: $d: y=x+1$

$$A'(-1,3) \xrightarrow[y \to x+1]{x \to y-1} A(3-1, -1+1)=(2,0)$$

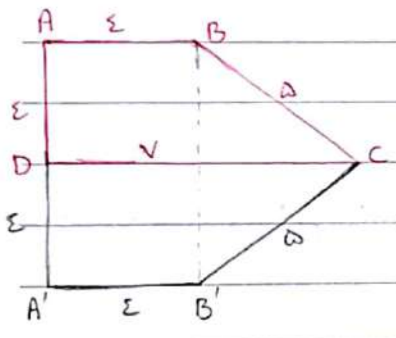
— خط $y=(a+1)x-3a$ بازتاب خط $y=2x-1$ نسبت به خط $y=2x+m$ است. مقدار a و m را بدست آورید.

چون دو خط $y=2x-1$ و $y=2x+m$ موازی اند، پس باید خط $y=(a+1)x-3a$ با خط $y=2x-1$ موازی باشد.

در این صورت داریم: $l': y=2x-1$, $d: y=2x+m$, $a+1=2 \to \boxed{a=1} \to l: y=2x-3$

$$m=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2} \to \boxed{m=-2}$$

— بازتاب ذوزنقه ABCD، نسبت به کدام خط، شکلی با خود ذوزنقه می سازد که کمترین محیط را داشته باشد.



۱) AD ۲) AB ۳) BC ۴) DC ✓

نکته ۴: ضابطه چند بازتاب مهم:

۱) بازتاب نسبت به محور x ها دارای ضابطه روبه رو می باشد: $S(x,y)=(x,-y)$

۲) بازتاب نسبت به محور y ها دارای ضابطه روبه رو می باشد: $S(x,y)=(-x,y)$

۳) بازتاب نسبت به خط $y=(x)$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) به صورت روبه رو است: $S(x,y)=(y,x)$

۴) بازتاب نسبت به خط $y=-x$ (نیمساز ناحیه دوم و چهارم) به صورت روبه رو است: $S(x,y)=(-y,-x)$

۵) بازتاب نسبت به مبدأ مختصات، به صورت روبرو تعریف می شود: $S(x,y)=(-x,-y)$

subject:
Year: Month: Date:

ـ اگر بازتاب نقطه $A(2a, b+2)$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم، $A'(-2b, a+3)$ باشد، مقدار a و b را بدست آورید.

$x_{A'} = -y_A \longrightarrow -2b = -b-2 \longrightarrow \boxed{b=2} \quad , \quad y_{A'} = -x_A \longrightarrow a+3 = -2a \longrightarrow \boxed{a=-1}$

«نگاشت بازتاب نسبت به نقطه $O(\alpha, \beta)$»

اگر $A(x,y)$ نسبت به نقطه‌ی $O(\alpha,\beta)$ قرینه شود؛ نقطه‌ی $A'(x',y')$ بدست می‌آید به طوری که O وسط AA' است. بنابراین ضابطه‌ی نگاشت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$O = \frac{AA'}{2} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x+x'}{2} \longrightarrow x' = 2\alpha - x \\ \beta = \dfrac{y+y'}{2} \longrightarrow y' = 2\beta - y \end{cases} \longrightarrow S(x,y) = (2\alpha - x, 2\beta - y)$$

«نکته ۷» اگر بخواهیم شکلی را نسبت به نقطه $O(\alpha,\beta)$ قرینه کنیم، کافیست در معادله آن تغییرات زیر را انجام دهیم:

$x \longrightarrow 2\alpha - x \qquad y \longrightarrow 2\beta - y$

ـ قرینه‌ی خط $y = 3x+5$ را نسبت به نقطه $A(1,3)$ بدست آورید.

$$y = 3x+5 \xrightarrow[y \to 6-y]{x \to 2-x} 6-y = 3\times(2-x)+5 \longrightarrow \boxed{y = 3x-5}$$

«نتیجه» با توجه به مثال بالا، می‌توان نتیجه گرفت، قرینه‌ی یک خط نسبت به یک نقطه، خطی موازی با آن است.

ـ تبدیل یافته خط $ay+2x=3$ تحت دو بازتاب متوالی ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، از نقطه $A(2,-1)$ می‌گذرد. مقدار a را بدست آورید.

$$ay+2x=3 \xrightarrow[y \to y]{x \to -x} ay-2x=3 \xrightarrow[y \to x]{x \to y} ax-2y=3$$

$$A(2,-1) \longrightarrow 2a+2=3 \longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

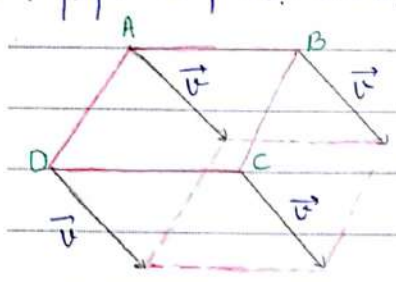
subject:
Year: Month: Date:

«انتقال»

انتقال T تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطه A از صفحه P، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است، به طوری که: $\vec{AA'}=\vec{v}$

«نکته ۵»: دو بردار برابر (هم سنگ) بردارهایی هستند، هم اندازه، هم راستا و هم جهت.

«یادآوری»: برای انتقال یک شکل کافیست، تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال بدست آوریم. یعنی از هر نقطه برداری هم سنگ $\vec{v}$ رسم کنیم تا به تصویر نقطه مورد نظر برسیم و به شکل مورد نظر برسیم.

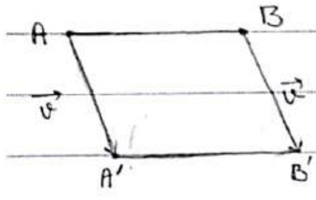


«قضیه ۳»: انتقال تبدیلی طولپا است. به عبارتی در هر انتقال، اندازه هر پاره خط با اندازه‌ی تصویر آن برابر باشد.

اثبات: پاره خط دلخواه AB و بردار $\vec{v}$ را در نظر می‌گیریم. دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: بردار $\vec{v}$ با پاره خط AB موازی نیست.

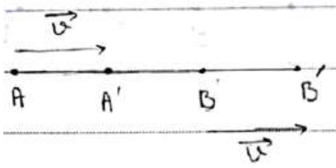
پاره خط AB را با بردار انتقال $\vec{v}$، انتقال می‌دهیم و آن را $A'B'$ می‌نامیم. در چهارضلعی $ABB'A'$، دو ضلع AA' و BB'، موازی و مساوی هستند،



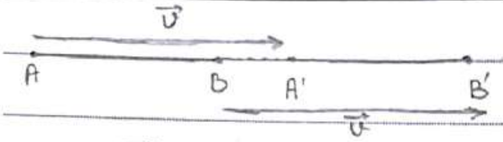
پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. بنابراین: $AB=A'B'$.

حالت دوم: بردار $\vec{v}$ با پاره خط AB موازی است.

۱) بردار $\vec{v}$ از AB کمتر باشد.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}=\vec{AA'}+\vec{A'B}\\ \vec{A'B'}=\vec{A'B}+\vec{BB'}\end{array}\right\}\xrightarrow[\vec{AA'}=\vec{BB'}=\vec{v}]{\text{طبق تعریف انتقال}}\vec{AB}=\vec{A'B'}\ \checkmark$$



۲) بردار $\vec{v}$ از $\overline{AB}$ بیشتر باشد.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BA'}$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA'}$

$\xrightarrow[\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\vec{v}]{\text{طبق تعریف انتقال}}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ✓

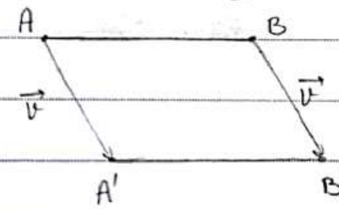
بنابراین، انتقال یک تبدیل طولپاست.

«قضیه ٤»: انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

پاره‌خط AB و بردار انتقال $\vec{v}$ را درنظر می‌گیریم.

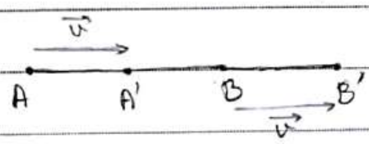
حالت اول: پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد.

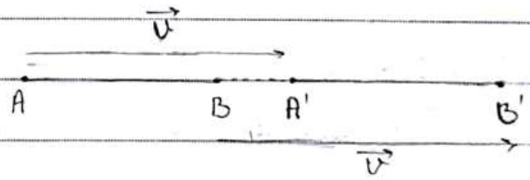
دراین حالت طبق شکل، چون بردارهای انتقال هم‌سنگ هستند، پس: $AA' \parallel BB'$ و $AA' = BB'$، بنابراین $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است. بنابراین: $AB \parallel A'B'$



حالت دوم: پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد.

دراین حالت با توجه به شکل، پاره‌خط‌های AB و A'B' در یک راستا قرار دارند و چون هر دو موازی $\vec{v}$ هستند، پس: $AB \parallel A'B'$.





بنابراین، انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند.

خواص انتقال

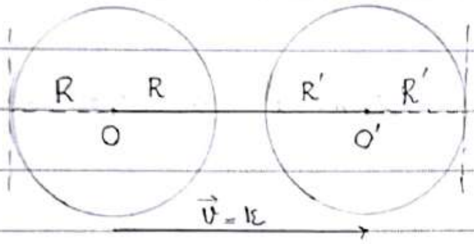
۱) بردارهایی که هر نقطه را به نقطه‌ی تصویرش وصل می‌کنند، هم‌سنگ هستند.

۲) انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

۳) انتقال جهت خط را حفظ می‌کند.

۴) انتقال یک تبدیل طولپاست.

– تصویر دایره‌ی $C(O,R)$ تحت بردار انتقالی به طول ۱۴، دایره‌ای با مختصات $C'(O',6)$ می‌باشد. دورترین و نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی این دو دایره را بدست آورید.



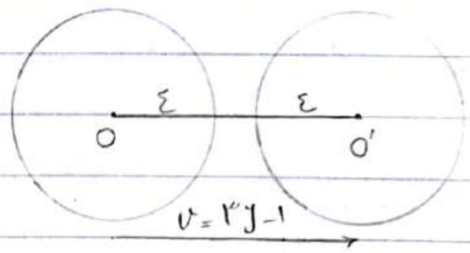
چون دو دایره، انتقال یافته یکدیگرند، پس $R=R'=6$. با توجه به شکل داریم:

بیشترین فاصله نقاط دو دایره $= OO'+R+R' = 14+6+6 = 26$

نزدیک‌ترین فاصله نقاط دو دایره $= OO'-(R+R') = 14-12 = 2$

– دو دایره متخارج $C(O,x-1)$ و $C'(O',4)$ انتقال یافته یکدیگر با برداری به طول $3y-1$ هستند. مقدار x و حدود y را بدست آورید.

$R=R' \longrightarrow x-1=4 \longrightarrow \boxed{x=5}$



$v > R+R' \longrightarrow 3y-1 > 4+4 \longrightarrow \boxed{y>3}$

subject:
Year: Month: Date:

- مقدار m چقدر باشد تا دو خط $y+2x=1$ و $my-(m+3)x=2$ انتقال یافته یکدیگر باشند.

در انتقال شیب خطوط حفظ می‌شود، بنابراین: $d: y+2x=1 \longrightarrow m_d=-2$ ①

$d': my-(m+3)x=2 \longrightarrow m_{d'}=\frac{m+3}{m} \longrightarrow m_d=m_{d'} \xrightarrow{①} \frac{m+3}{m}=-2 \longrightarrow \boxed{m=-1}$

«ضابطه‌ی تبدیل انتقال»

نقطه A' را انتقال یافته نقطه A، تحت بردار $v(h,k)$ می‌نامیم، اگر داشته باشیم: $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$

اگر $A(x,y)$ و $A'(x',y')$، داریم: $\overrightarrow{AA'}=\vec{v} \longrightarrow (x'-x,\ y'-y)=(h,k)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases} \longrightarrow T(x,y)=(x+h,\ y+k) \longrightarrow$$ ضابطه انتقال تحت بردار $v(h,k)$

نکته‌ی الف) برای پیدا کردن تبدیل یافته یک خط تحت انتقال $T(x,y)=(x+h,y+k)$ کافیست در معادله آن تغییرات زیر را اعمال کنیم.

$x \longrightarrow x-h \qquad y \longrightarrow y-k$

ب) نتیجه‌ی ترکیب چند انتقال متوالی، یک انتقال است، با بردار انتقال مجموع همه بردارهای انتقال.

- خط $d: y=2x+1$ را تحت انتقال $T(x,y)=(x+1,y+k)$ منتقل کرده‌ایم. معادله شکل حاصل $d': y=2x-1$ است. مقدار k را بدست آورید.

$d: y=2x+1 \xrightarrow[y\to y-k]{x\to x-1} d': y-k=2(x-1)+1$

$$\left.\begin{array}{l} d': y=2x+k-1 \\ d': y=2x-1 \end{array}\right\} \longrightarrow k-1=-1 \longrightarrow \boxed{k=0}$$

SAMEN

- تصویر خطی به معادله $d: 3x+4y=5$ تحت انتقال $T(x,y)=(x-2, y+a)$ از نقطه‌ی $A(5,2)$ می‌گذرد، مقدار a را بدست آورید.

$d: 3x+4y=5 \xrightarrow[y\to y-a]{x\to x+2} d': 3(x+2)+4(y-a)=5 \longrightarrow 3x+6+4y-4a=5$

$\xrightarrow{A(5,2)} 3\times5+6+4\times2-4a=5 \longrightarrow 4a=24 \longrightarrow \boxed{a=6}$

- اگر نقطه‌ی $A'(4,3)$ تصویر نقطه $A(1,-1)$ تحت انتقال T باشد، معادله‌ی تصویر خط $d: 2x-4y+1=0$ تحت این انتقال را بنویسید.

$T(x,y)=(x+3, y+4) \longrightarrow d: 2x-4y+1=0 \xrightarrow[y\to y-4]{x\to x-3} d': 2(x-3)-4(y-4)+1=0$

$\longrightarrow d': 2x-6-4y+16+1=0 \longrightarrow \boxed{2x-4y+11=0}$

- اگر تبدیل یافته خط $d: 2x+y=a$ ، تحت دو تبدیل متوالی ابتدا بازتاب نسبت به نیمساز اول و سوم و سپس انتقال در راستای بردار $\vec{v}(3,-4)$ از نقطه $A(-1,2)$ بگذرد، مقدار a را بدست آورید.

$\vec{v}(3,-4) \longrightarrow T(x,y)=(x+3, y-4)$

$d: 2x+y=a \xrightarrow[y=x]{x=y} d': 2y+x=a \xrightarrow[y\to y+4]{x\to x-3} d'': 2(y+4)+x-3=a$

$\longrightarrow d'': 2y+x=a-5 \xrightarrow{A(-1,2)} d'': 2\times2-1=a-5 \longrightarrow \boxed{a=8}$

- اگر تبدیل یافته نقطه A واقع بر خط $l: 2x+y=3$ ، تحت انتقال $T(x,y)=(x+2, y-1)$ ، نقطه‌ای روی خط $d: x-2y=3$ باشد، فاصله A را از مبدأ مختصات بدست آورید.

$A\in l: 2x+y=3 \longrightarrow A(a, 3-2a)$

$A'=T(A)=T(a, 3-2a)=(a+2, 3-2a-1)=(a+2, 2-2a)$

$A'\in d \longrightarrow a+2-2(2-2a)=3 \longrightarrow 5a=5 \longrightarrow a=1 \longrightarrow A(1,1) \longrightarrow OA=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

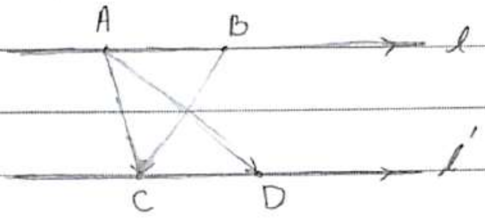
- دو خط $l: x+2y=3$ و $l': x+2y=6$ موازی‌اند. ضابطه‌ی سه انتقال متفاوت را بدست آورید که خط l را بر l' تصویر کنند.

نکته: هر برداری که ابتدایش بر روی l و انتهایش بر روی l' باشد؛ می‌تواند یک بردار انتقال باشد که l را بر l' تصویر کند. پس بی‌شمار بردار انتقال بین

دو خط موازی هستند.

$l: x+2y=3 \to A\binom{3}{0}, \; B\binom{1}{1}$

$l': x+2y=6 \to C\binom{0}{3}, \; D\binom{4}{1}$



$\vec{v_1}=\vec{AC}=(0-3,3-0)=(-3,3) \to T_1(x,y)=(x-3,y+3)$

$\vec{v_2}=\vec{AD}=(4-3,1-0)=(1,1) \to T_2(x,y)=(x+1,y+1)$

$\vec{v_3}=\vec{BC}=(0-1,3-1)=(-1,2) \to T_3(x,y)=(x-1,y+2)$

— انتقال یافته نقطه‌ی M به طول ۳ روی خط $y+2x=1$، نقطه‌ی M' به عرض -3 روی محور عرض‌ها می‌باشد. با این تبدیل، فاصله‌ی نقطه B به طول ۲ روی محور x ها از تبدیل یافته‌اش چقدر است؟

$d: y+2x=1$

$M\in d \xrightarrow{x_M=3} y_M+2\times 3=1 \to y_M=-5 \to M(3,-5), \; M'(0,-3)$

$\vec{MM'}=\vec{v}=(0-3,-3+5)=(-3,2)$

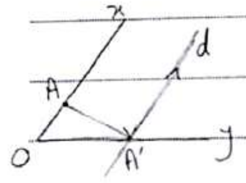
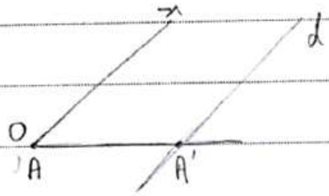
چون انتقال یک تبدیل طولپا است، پس داریم:

$|BB'|=|\vec{v}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

— زاویه‌ی $x\hat{O}y$ و پاره خط MN در یک صفحه مفروض اند. پاره خطی موازی و هم اندازه با MN رسم کنید که دو سر آن بر اضلاع زاویه و یا امتداد آن‌ها واقع باشند. فرض می‌کنیم، مسئله حل شده باشد و AA' موازی و مساوی MN باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت که نقطه‌ی A' انتقال یافته نقطه A تحت بردار MN است.

روش رسم: ضلع Ox را تحت بردار MN انتقال می‌دهیم تا خط d بدست آید، نقطه تلاقی d و Oy را A' می‌نامیم. A' انتقال یافته نقطه‌ای از Ox است، پس از A' خطی به موازات MN رسم می‌کنیم تا Ox را در A قطع کند. AA' جواب مسئله است.

در حالت خاص، اگر MN موازی یکی از اضلاع باشد، آنگاه یک سر AA' روی آن قرار می‌گیرد.

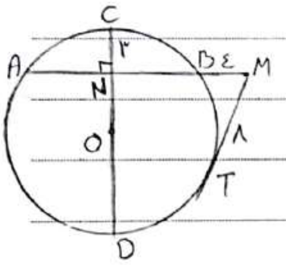



- اگر بردار $v(h,k)$ خط $d: 3x+y=5$ را بر خط $d': 3x+y=8$ تصویر کند، چه رابطه‌ای بین h و k وجود دارد؟

$$3x+y=5 \xrightarrow[y\to y-k]{x\to x-h} 3(x-h)+y-k=5 \to 3x-3h+y-k=5 \to 3x+y=5+k+3h$$
$$3x+y=8$$

$$\boxed{k+3h=3}$$

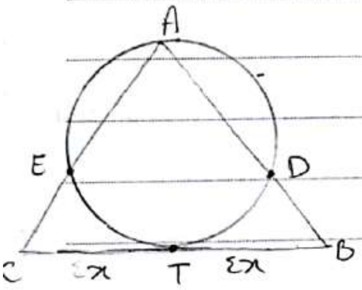
تست‌های روابط طولی در دایره



۴۸) گزینه‌ی ۴

$MT^2 = MB\times MA = 64 \to MA=16 \to AB=12$

$NC\times ND = AN\times NB \to 3\times ND = 6\times 6 \to ND=12 \to CD=15 \to \boxed{r=7.5}$

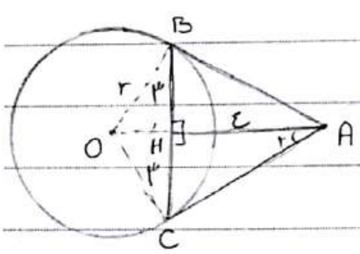


۴۹) گزینه‌ی ۲

$CT^2 = CE\times CA \to x^2 = CE\times 5x \to CE=\frac{x}{5}$

$BT^2 = BD\times BA \to 16x^2 = BD\times 5x \to BD=\frac{16x}{5}$

$\to \frac{BD}{CE}=16$

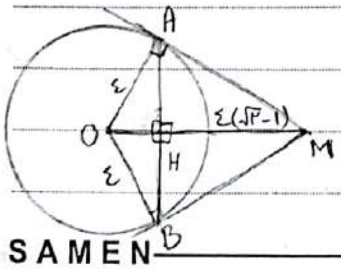


۵۰) گزینه‌ی ۳

$AC=AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\hat{H}=\hat{C}=90^\circ$, $\hat{A}_2=\hat{A}_2$ $\xrightarrow{\text{زز}} A\hat{H}C \sim A\hat{C}O \to \frac{AH}{AC}=\frac{AC}{AO}=\frac{HC}{CO}$

$\to \frac{4}{5}=\frac{3}{r} \to \boxed{r=\frac{15}{4}=3.75}$



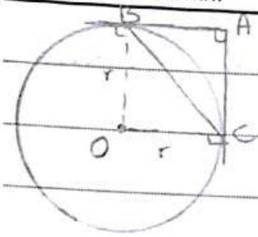
۵۱) گزینه‌ی ۳

$OM=4+4(\sqrt{2}-1)=4\sqrt{2}$, $MA=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$

$MA^2=AH^2+MH^2$, $AO^2=OH^2+AH^2$ $\to OH=MH$; $OH+MH=4\sqrt{2}$ $\to OH=2\sqrt{2}$

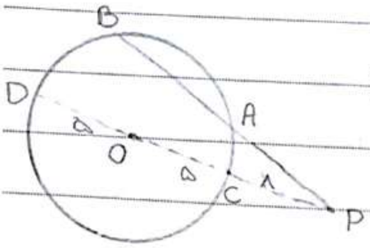
SAMEN

۵۲) گزینه ۳



$AC^2 + AB^2 = BC^2 \longrightarrow \boxed{BC = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6}$

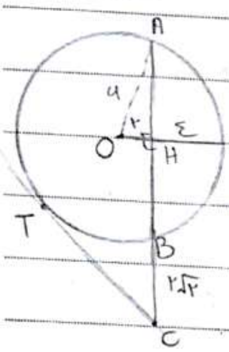
۵۳) گزینه ۳



$PC \times PD = PA \times PB \longrightarrow 8 \times 18 = (2 + AB)(2 + 2AB)$

$144 = 4 + 6AB + 2AB^2 \longrightarrow 70 = AB^2 + 3AB = AB(AB+3) \longrightarrow \boxed{AB = 7}$

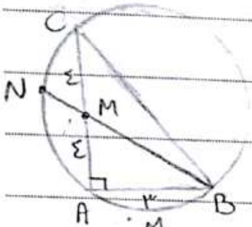
۵۴) گزینه ۱



$AH = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2} \longrightarrow CT^2 = CB \times CA$

$\longrightarrow CT^2 = (2\sqrt{2}) \times (10\sqrt{2}) = 40 \longrightarrow \boxed{CT = 2\sqrt{10}}$

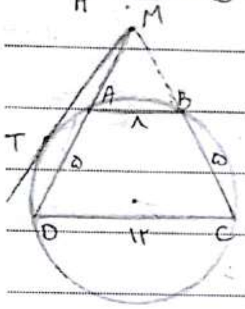
۵۵) گزینه ۳



$BM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \longrightarrow BM \times MN = CM \times AM$

$\longrightarrow 5 \times MN = 4 \times 4 \longrightarrow \boxed{MN = \frac{16}{5} = 3.2}$

۵۶) گزینه ۲



$\left.\begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{A} = \hat{D} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} M\hat{C}D \sim M\hat{B}A \longrightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MA} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$\longrightarrow \frac{5+x}{x} = \frac{3}{2} \longrightarrow 3x = 10 + 2x \longrightarrow x = 10$

$MT^2 = MA \times MD \longrightarrow MT^2 = 10 \times 15 = 150 \longrightarrow \boxed{MT = 5\sqrt{6}}$

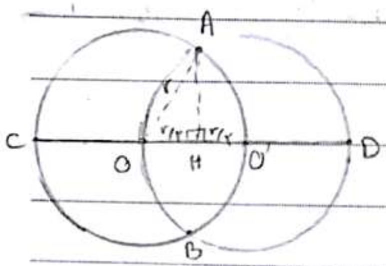
۵۷) گزینه ۴

$\pi(r^2 - r'^2) = 32\pi \longrightarrow r^2 - r'^2 = 32 \longrightarrow (r - r')(r + r') = 32$

$\longrightarrow r + r' = 8 \,,\, r - r' = 4 \longrightarrow r = 6 \,,\, r' = 2 \longrightarrow \boxed{\frac{r}{r'} = \frac{6}{2} = 3}$

subject:
Year: Month: Date:

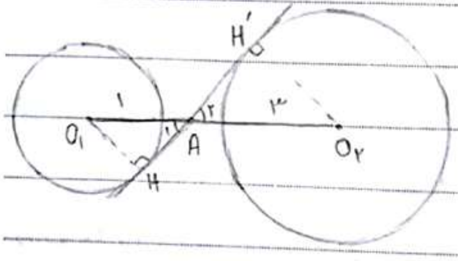
۵۸) گزینه ۴



$\longrightarrow AH^2 + OH^2 = OA^2 \longrightarrow AH = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}r \longrightarrow AB = \sqrt{3}r$

$\longrightarrow \frac{1}{2}\times\sqrt{3}r\times 3r = 18\sqrt{3} \longrightarrow r^2 = 12 \longrightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3}}$

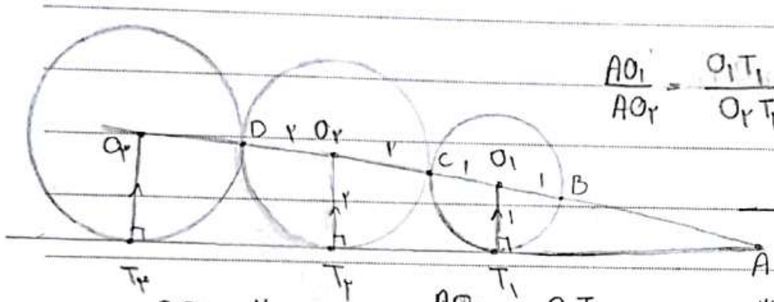
۵۹) گزینه ۴



$\left.\begin{array}{l}\hat A_1 = \hat A_2 \\ \hat H = \hat H' = 90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} A\hat H O_1 \sim A\hat H' O_2 \longrightarrow \frac{AH}{AH'} = \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1H}{O_2H'} = \frac{1}{3}$

$AO_2 = 3AO_1 \longrightarrow AO_1 + 3AO_1 = 6 \longrightarrow AO_1 = \frac{6}{4} \longrightarrow \boxed{AO_1 = \frac{3}{2}}$

۶۰) گزینه ۲



$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2} \longrightarrow \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{1}{2}$

$\longrightarrow \frac{AB+1}{AB+4} = \frac{1}{2} \longrightarrow 2AB + 2 = AB + 4$

$\longrightarrow AB = 2 \longrightarrow \frac{AO_1}{AO_3} = \frac{O_1T_1}{O_3T_3} \longrightarrow \frac{3}{8+r} = \frac{1}{r} \longrightarrow 3r = 8 + r \longrightarrow \boxed{r = 4}$

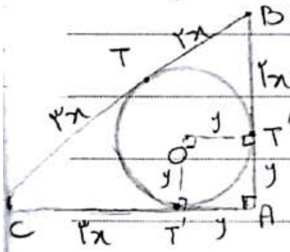
۶۱) گزینه ۳

$d + r + r' = 16 \xrightarrow{d = 10} r + r' = 6 \longrightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (r+r')^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

۶۲) گزینه ۴

اضلاع مثلث: ۳، $\sqrt{7}$، ۴ ⟵ مثلث قائم الزاویه است ⟵ $R = \frac{abc}{4S} = \frac{3\times 4\times\sqrt{7}}{4\times\frac{\sqrt{7}\times 3}{2}} \Longrightarrow \boxed{R = 2}$

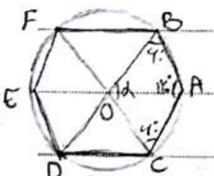
۶۳) گزینه ۲



مرکز دایره محیطی مثلث قائم الزاویه، از وسط وتر دایره می‌گذرد، پس شعاع آن $\frac{5}{2}x$ است.

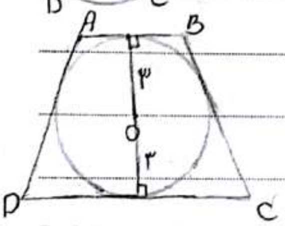
$\longrightarrow \frac{5}{2}x = 5 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow 10^2 = (4+y)^2 + (6+y)^2 \longrightarrow \boxed{y = 2}$

۶۴) گزینه ۳



$\hat A + \hat B + \hat C + \hat O = 360^\circ \longrightarrow \alpha = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 90^\circ) \longrightarrow \boxed{\alpha = 120^\circ}$

۶۵) گزینه ۲



$S = \frac{(AB+CD)}{2}\times 6 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} AB + CD = 15 \\ AB + CD = AD + BC \\ AD = BC \end{array}\right\} \longrightarrow 2AD = 15 \longrightarrow \boxed{AD = BC = 7.5}$

subject:
Year: Month: Date:

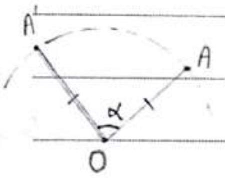
_ اگر تصویر خط $d: 4x+3y=13$ تحت انتقال با بردار $\vec{v}(3,k)$ از نقطه‌ی $(4,7)$ بگذرد، مقدار k را به دست آورید.

$$d: 4x+3y=13 \xrightarrow[y \to y-k]{x \to x-3} d': 4x-12+3y-3k=13 \longrightarrow d': 4x+3y=25+3k$$

$$(4,7) \longrightarrow 4\times4+3\times7=25+3k \longrightarrow 3k=12 \longrightarrow \boxed{k=4}$$

«دوران»

دوران R به مرکز نقطه‌ی ثابت O و زاویه‌ی α، تبدیلی از صفحه است که در آن A' تصویر نقطه A باشد، در اینصورت داریم:

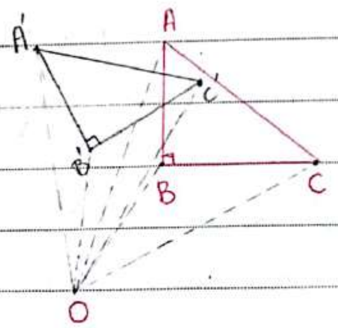


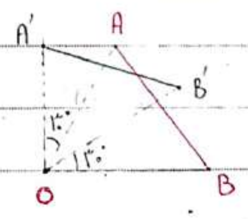
$OA=OA'$ $\quad\quad$ $A\hat{O}A'=\alpha$

«نکته ۱» اگر دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد (پادساعتگرد)، α مثبت و اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد (ساعتگرد)، α منفی است.

«یادآوری» برای دوران دادن یک شکل به مرکز O و زاویه α، هر نقطه از شکل مثل A را به مرکز دوران وصل کرده، سپس در جهت خواسته شده به کمک OA، زاویه‌ی α را رسم می‌کنیم و روی ضلع دیگر زاویه، OA' را برابر با OA جدا می‌کنیم.

_ شکل‌های زیر را به مرکز O و به اندازه‌ی 30° دوران دهید.



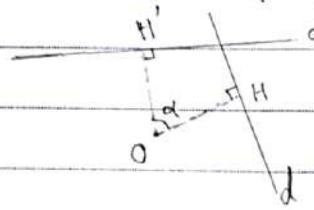


SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

• روش پیدا کردن دوران یافته‌ی یک خط •

خط d و نقطه O را در نظر بگیرید. برای دوران d به مرکز O و به اندازه‌ی α، از O عمود OH را بر d رسم می‌کنیم. نقطه H را به مرکز O و به اندازه α دوران می‌دهیم تا H' به دست آید. خط d' را عمود بر OH' رسم می‌کنیم. d' دوران یافته d به مرکز O و به اندازه α می‌باشد.

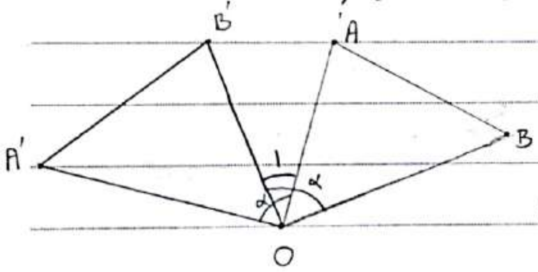


• نکته • با توجه به مطلب بالا، چون OH برابر با OH' است؛ پس O روی نیمساز محل تلاقی دو خط قرار می‌گیرد.

• قضیه • در هر دوران، اندازه‌ی هر پاره خط و تصویر آن باهم برابرند. (دوران یک تبدیل طولپاست.)

— برهان: حکم را در حالت‌های مختلف ثابت می‌کنیم.

حالت اول: مرکز دوران O بر پاره‌خط AB یا امتداد آن واقع نباشد و زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی $A\hat{O}B$ بیشتر باشد.



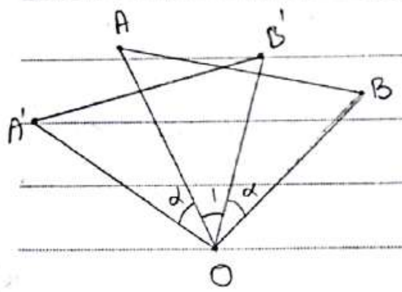
$A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = \alpha$

$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = \alpha - \hat{O}_1 \\ A'\hat{O}B' = \alpha - \hat{O}_1 \end{array}\right\} \longrightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$

طبق تعریف دوران $\left\{\begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \end{array}\right.$

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B' \longrightarrow \boxed{AB = A'B'}$

حالت دوم: مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی $A\hat{O}B$ کمتر باشد.



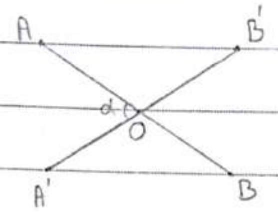
$A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = \alpha$

$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = \alpha + \hat{O}_1 \\ A'\hat{O}B' = \alpha + \hat{O}_1 \end{array}\right\} \longrightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$

طبق تعریف دوران $\left\{\begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \end{array}\right.$

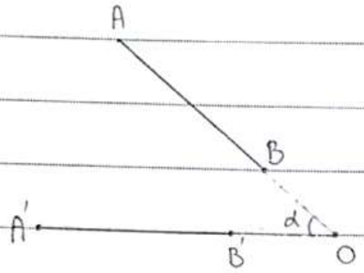
$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B' \longrightarrow \boxed{AB = A'B'}$

حالت سوم: مرکز دوران O روی پاره خط AB است.



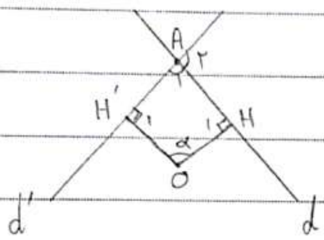
$$\left.\begin{aligned} OA &= OA' \\ OB &= OB' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} OA + OB = OA' + OB' \longrightarrow \boxed{AB = A'B'}$$

حالت چهارم: مرکز دوران O روی امتداد پاره خط AB است.



$$\left.\begin{aligned} OA &= OA' \\ OB &= OB' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-} OA - OB = OA' - OB' \longrightarrow \boxed{AB = A'B'}$$

ـ ثابت کنید زاویه‌ی بین یک خط و دوران یافته آن، برابر با زاویه دوران یا مکمل آن است.



$$\hat{H}_1 + \hat{H}'_1 = 180^\circ \longrightarrow \hat{A}_1 + \alpha = 180^\circ \longrightarrow \boxed{\hat{A}_1 = 180^\circ - \alpha}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \longrightarrow \boxed{\hat{A}_2 = \alpha}$$

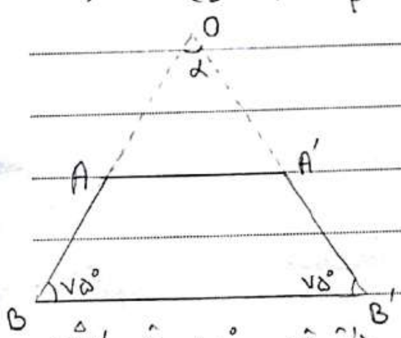
ـ معادله‌ی دوران یافته خط $2x + 3y = 4$ به مرکز $O(-1, 2)$ و با زاویه 90° درجه را بدست آورید.

مختصات نقطه $O(-1, 2)$ در خط d صدق می‌کند، چون زاویه‌ی بین خط و دوران یافته‌اش برابر زاویه دوران است، پس d' بر d عمود بوده و از نقطه O می‌گذرد.

$$m_d = \frac{-2}{3} \quad , \quad d' \perp d \longrightarrow m_{d'} = \frac{3}{2}$$

$$\longrightarrow d' : (y - 2) = \frac{3}{2}(x + 1) \longrightarrow d' : 3x - 2y + 7 = 0$$

ـ در ذوزنقه شکل مقابل، $A'B'$ دوران یافته AB است. زاویه دوران چند است؟



$$AB = A'B' \longrightarrow \hat{B} = \hat{B}' = 75^\circ$$

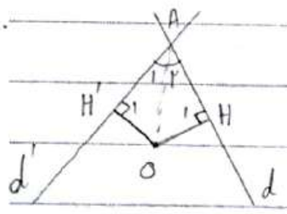
$$O\overset{\triangle}{B}B' : \hat{O} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{B}') = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

— خط $d: 2x+y=3$ را حول نقطه $O(a, 2a-1)$ با زاویه $180°$ دوران می‌دهیم. به ازای چه مقدار a، خط دوران یافته بر خط اولیه منطبق است؟

هرگاه خط را حول نقطه‌ای واقع بر آن دوران بدهیم با زاویه $180°$، بر خودش منطبق می‌شود.

$O \in d \longrightarrow 2a + 2a - 1 = 3 \longrightarrow a = 1$

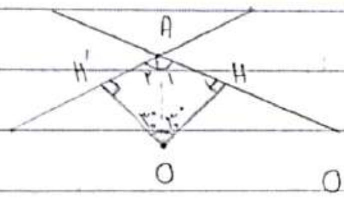
— در دوران به مرکز O و زاویه α درجه، خط d و تبدیل یافته‌اش در A متقاطع‌اند. اگر اندازه زاویه OA با خط d، $65°$ باشد، مقدار زاویه α را به دست آورید.



$OH = OH' \longrightarrow$ نیمساز $OA \longrightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 65°$

$\hat{H}_1 + \hat{H}'_1 = 180° \longrightarrow \alpha + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 180° \longrightarrow \alpha = 50°$

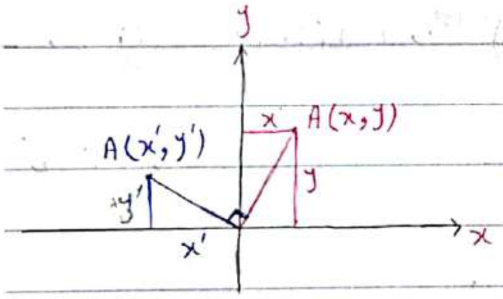
— در دوران به مرکز O و زاویه $60°$ درجه، خط d و تصویرش در نقطه A متقاطع‌اند. اگر $OA = 4$ باشد، آنگاه فاصله‌ی مرکز دوران از خط تصویر را به دست آورید.



$OH = OH' \longrightarrow$ نیمساز $OA \longrightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 60°$

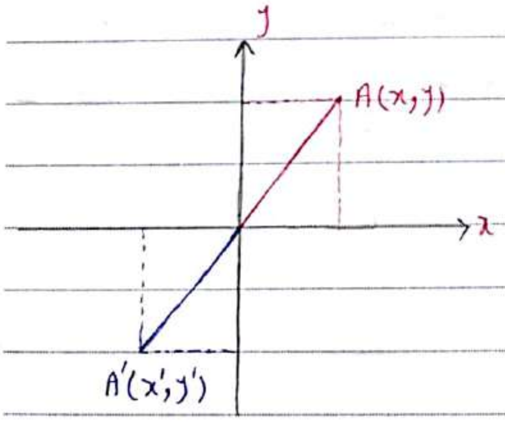
$O\hat{A}H': \sin 60° = \frac{OH'}{OA} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH'}{4} \longrightarrow OH' = 2\sqrt{3}$

نکته ۱۳: زوایای دوران خاص



$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \longrightarrow R(x,y) = (-y, x)$

زاویه دوران $90°$، مرکز دوران $O(0,0)$

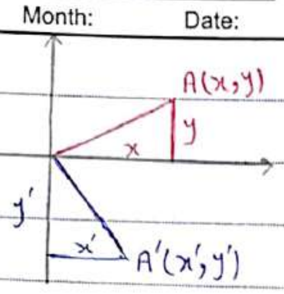


$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \longrightarrow R(x,y) = (-x, -y)$

زاویه دوران $180°$ و مرکز دوران $O(0,0)$

subject:

Year: Month: Date:



$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \longrightarrow R(x,y) = (y,-x)$

زاویه دوران 270° و مرکز دوران $O(0,0)$

ویژگی‌های دوران.

۱) دوران یک تبدیل طولپاست.

۲) دوران شیب خطوط را حفظ نمی‌کند، مگر در حالت $\alpha = 180^\circ$.

۳) دوران اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۴) دوران جهت شکل را حفظ می‌کند.

— دوران یافته خط $d: y-2x=3$ تحت زاویه 90° و به مرکز $O(0,0)$، خط d' است. معادله‌ی تصویر خط d' تحت انتقال $T(x,y)=(x+1,y+2)$ را بدست آورید.

$d: x-2y=3 \xrightarrow[y \to x]{x \to -y} d': x+2y=3 \xrightarrow[y \to y+2]{x \to x-1} d'': x-1+2y+4=3 \longrightarrow d'': x+2y=0$

— نقطه‌ی $A'(3b+1, 2a+2)$ تصویر نقطه $A(a+1, 2b)$ تحت زاویه دوران 270° حول مبدأ مختصات است. حاصل a^2+b^2 را بنویسید.

$R(x,y)=(y,-x) \longrightarrow R_{(A)} = R(a+1,2b) = (2b,-a-1) = A'(3b+1,2a+2)$

$\longrightarrow 2b = 3b+1 \longrightarrow b=-1 \quad , \quad -a-1 = 2a+2 \longrightarrow a=-1 \longrightarrow a^2+b^2 = 2$

— مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $3\sqrt{3}$ را حول مرکز ثقلش (محل برخورد میانه‌ها) به اندازه 60° دوران می‌دهیم، مساحت بین مثلث و تصویرش را بدست آورید.

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

«تجانس»

اگر O نقطه ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه A' را مجانس نقطه A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم.

هرگاه سه شرط زیر برقرار باشند: الف) سه نقطه O، A و A' روی یک خط راست باشند.

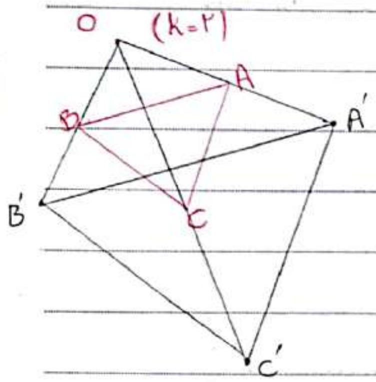
ب) $OA' = |k| . OA$ پ) ۱ـ اگر k مثبت باشد، A' روی نیم خط OA و نقاط A، A' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

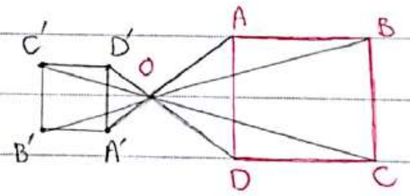
۲ـ اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط A و A' قرار می‌گیرد.

«نکته»: برای پیدا کردن مجانس نقطه A به مرکز O و نسبت k، ابتدا از A به O وصل می‌کنیم، اگر k مقداری مثبت باشد؛ روی نیم خط OA، نقطه A' را چنان پیدا می‌کنیم $OA' = k . OA$ و اگر k منفی باشد، نقطه A' را روی OA چنان پیدا می‌کنیم که نقطه O بین A، A' باشد و $OA' = |k| . OA$ باشد.

ـ در شکل‌های زیر، تصویر شکل‌ها را در تجانس به مرکز O و نسبت k به دست آورید.

$(k=2)$





$(k=-\frac{1}{2})$

در تجانس به مرکز O و نسبت k: الف) اگر $k>0$ باشد، تجانس را تجانس مستقیم می‌نامیم.

ب) اگر $k<0$ باشد، تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم. ج) اگر $|k|<1$ باشد، تصویر شکل کوچک‌تر می‌شود و آن را انقباض می‌نامیم.

د) اگر $|k|>1$ باشد، تصویر شکل بزرگ‌تر می‌شود و آن را انبساط می‌نامیم.

subject:

Year: Month: Date:

قضیه ۶: تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

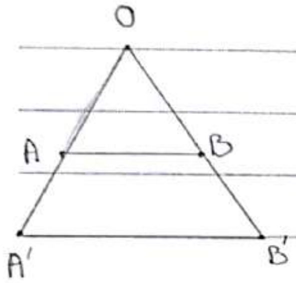
اثبات: تجانس به مرکز O و نسبت K در نظر می‌گیریم. تصویر پاره خط AB را تحت تجانس بدست می‌آوریم. دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول: نقطه O روی خط AB است.

در این حالت اگر $A'B'$ مجانس‌های A و B باشند، $A'B'$ بر روی خط AB قرار می‌گیرد، پس AB و $A'B'$ موازی‌اند.

حالت دوم: نقطه O غیر واقع بر AB باشد.

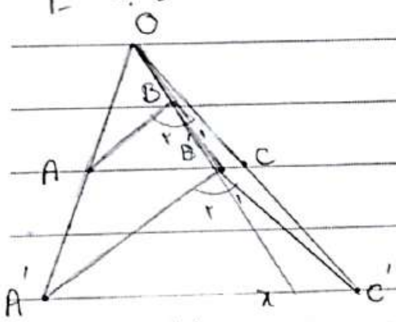
اگر A' و B' مجانس‌های A و B باشند، بنابر تعریف تجانس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} OA' = |K|OA \\ OB' = |K|OB \end{array}\right\} \rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = |K| \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AB \parallel A'B'$$

قضیه ۷: تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

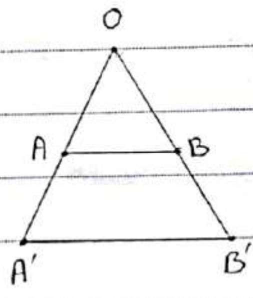
اثبات: فرض کنید زاویه $A'\hat{B'}C'$ مجانس زاویه $A\hat{B}C$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت K باشد. با توجه به قضیه قبل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{مورب } Ox} \hat{B}_1 = \hat{B'}_1 \\ AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{مورب } Ox} \hat{B}_2 = \hat{B'}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B'}_1 + \hat{B'}_2 \rightarrow A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$$

ـ ثابت کنید اگر پاره خط $A'B'$ مجانس AB تحت تجانس به مرکز O و نسبت K باشد، آنگاه $A'B' = |K|AB$

با فرض $K>1$ مسئله را حل می‌کنیم و در بقیه حالت‌ها به طور مشابه ثابت می‌شود.



$$\left.\begin{array}{l} OA' = |K|OA \\ OB' = |K|OB \end{array}\right\} \rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{|K|} \quad (1)$$

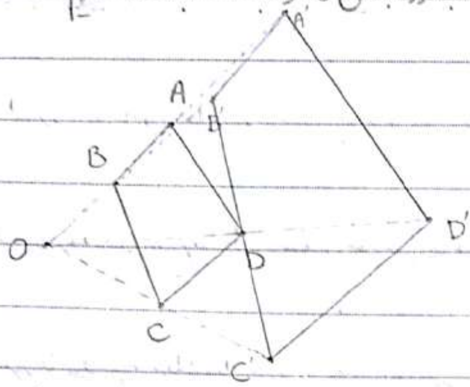
$$\text{بنابر قضیه ۶ } AB \parallel A'B' \xrightarrow[(1)]{\text{تالس}} \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{|K|} \rightarrow A'B' = |K|AB$$

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

ثابت کنید مجانس هر n ضلعی، یک n ضلعی است که با آن متشابه است. به عبارت دیگر هر دو شکل متجانس، متشابه اند.

فرض کنید چندضلعی $A'B'C'D'...$ مجانس چندضلعی $ABCD...$ به مرکز تجانس O و نسبت K باشد. داریم:



$$\left.\begin{aligned} A'B' &= |K|\,AB \\ A'D' &= |K|\,AD \\ B'C' &= |K|\,BC \\ D'C' &= |K|\,DC \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{D'C'}{DC} = |K| \quad ①$$

از طرفی طبق قضیه ۷، زاویه در تجانس حفظ می‌شود.

$\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$, $\hat{D} = \hat{D'}$ ②

①,② $\longrightarrow ABCD... \sim A'B'C'D'...$

«نکته»: دو n ضلعی که مجانس یکدیگر باشند، متشابه اند، ولی اگر دو n ضلعی، متشابه باشند، لزوماً مجانس یکدیگر نیستند. به عنوان مثال اگر دو مثلث $A'\hat{B'}C'$ و $A\hat{B}C$ و اضلاعشان موازی نباشد، چون در تجانس، پاره خط های مجانس موازی اند، پس این دو مثلث مجانس یکدیگر نیستند.

«ویژگی های تجانس»

۱) تجانس اندازه زاویه ها را حفظ می‌کند.

۲) در تجانس، پاره خط های متناظر، موازی می باشند، بنابراین تجانس شیب خطوط را حفظ می‌کند.

۳) خطوطی که نقاط متناظر را به هم وصل می‌کنند، همگی در مرکز تجانس همرس می باشند.

۴) در هر تجانس، نسبت طول پاره خط های متناظر، با قدرمطلق نسبت تجانس برابر است.

۵) در تجانس، شکل اولیه و تصویر آن، متشابه می باشند و نسبت این تشابه، با نسبت تجانس یکسان است، پس در تجانس، طول با ضریب K و مساحت با ضریب K^2 تغییر می‌کند.

۶) تجانس چه مستقیم و چه معکوس، جهت شکل را حفظ می‌کند.

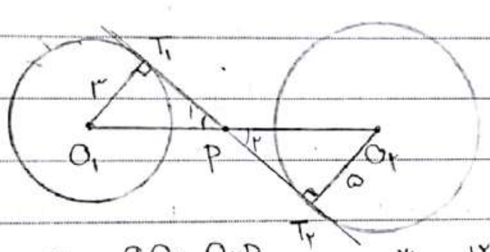
SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

۷) در تجانس، مرکز تجانس ثابت می ماند، یعنی مرکز تجانس، نقطه ی ثابت در تجانس است.

نکته: هر دو دایره، مجانس یکدیگر می باشند. مرکز تجانس مستقیم، محل برخورد خط المرکزین و مماس خارجی دو دایره و مرکز تجانس معکوس، محل برخورد خط المرکزین و مماس داخلی دو دایره می باشد. در این حالت ها نسبت اندازه های دو شعاع با قدر مطلق نسبت تجانس آن ها برابر می باشد. اگر دو دایره دارای شعاع های برابر باشند، فقط دارای تجانس معکوس با نسبت $k=-1$ است.

- O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره به شعاع های ۳ و ۵ هستند، اگر $O_1O_2=12$ باشد، فاصله مرکز تجانس معکوس این دو دایره از مرکز دایره بزرگ تر را به دست آورید. نقطه P، محل تلاقی خط المرکزین و مماس مشترک داخلی این دو دایره را، مرکز تجانس معکوس این دو دایره در نظر می گیریم.

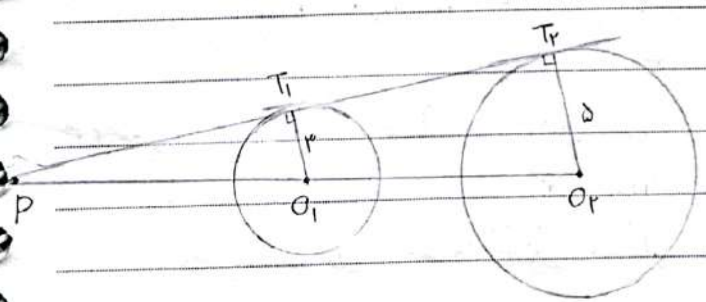


$$\left.\begin{array}{l}\hat{T_1}=\hat{T_2}=90^\circ\\ \hat{P_1}=\hat{P_2}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} O_1\hat{T_1}P \sim O_2\hat{T_2}P \longrightarrow \frac{O_1T_1}{O_2T_2}=\frac{O_1P}{O_2P}$$

$$\longrightarrow \frac{3}{5}=\frac{O_1O_2-O_2P}{O_2P} \longrightarrow \frac{3}{5}=\frac{12-O_2P}{O_2P} \longrightarrow \boxed{O_2P=7.5}$$

- در سؤال بالا با همان شرایط، فاصله مرکز تجانس مستقیم این دو دایره از مرکز دایره بزرگ تر به دست آورید.

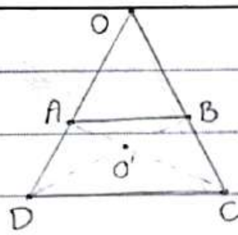
نقطه P، محل تلاقی خط المرکزین و مماس مشترک خارجی این دو دایره را مرکز تجانس معکوس این دو دایره در نظر می گیریم.



$$\hat{T_1}=\hat{T_2}=90^\circ \longrightarrow O_1T_1 \parallel O_2T_2 \xrightarrow{\text{تالس}}$$

$$\frac{O_1P}{O_2P}=\frac{O_1T_1}{O_2T_2} \longrightarrow \frac{O_1P}{O_1O_2+O_1P}=\frac{3}{5}$$

$$\longrightarrow \frac{O_1P}{12+O_1P}=\frac{3}{5} \longrightarrow \boxed{O_1P=30}$$

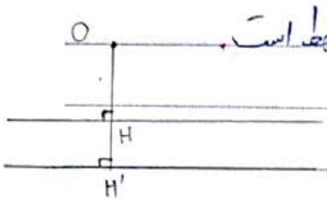


نکته: الف) هر دو پاره‌خط موازی و غیرمساوی، می‌توانند به طور مستقیم یا معکوس مجانس یکدیگر باشند.

O: مرکز تجانس مستقیم   O': مرکز تجانس معکوس

ب) اگر دو پاره‌خط موازی و در یک راستا نباشند، تجانس مستقیم ندارند و فقط تجانس معکوس با نسبت $K=-1$ دارند.

پ) هر دو خط موازی، مجانس یکدیگر می‌باشند و قدر مطلق نسبت تجانس، برابر با نسبت فاصله‌های مرکز تجانس تا دو خط است.

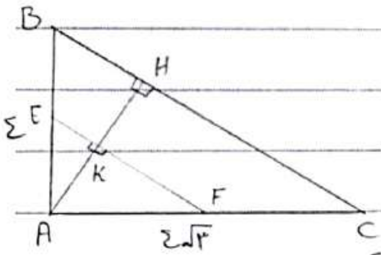


$$|K| = \frac{OH'}{OH}$$

- در مثلثی با اضلاع $AB=4$ ، $AC=4\sqrt{3}$ و $BC=8$ ، هرگاه EF مجانس BC نسبت به مرکز A و نسبت $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، فاصله EF از A را بدست آورید.

$8^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4^2 \longrightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 \longrightarrow \hat{A} = 90^\circ$

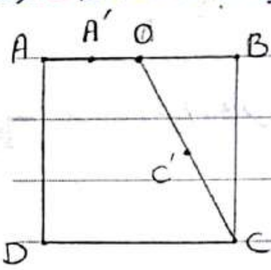
چون نسبت تجانس مثبت و کوچکتر از 1 است، پس EF درون مثلث است و موازی BC است.



$\frac{AK}{AH} = K = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1) , $S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC$

$4 \times 4\sqrt{3} = AH \times 8 \longrightarrow AH = 2\sqrt{3} \xrightarrow{(1)} \boxed{AK = 3}$

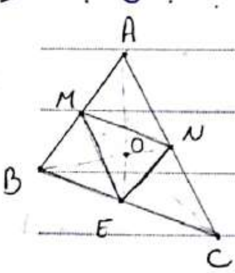
- در شکل مقابل، طول ضلع مربع چهار واحد است و $OA' = AA' = \frac{AB}{4}$ اگر نقطه A' تصویر نقطه A در تجانس به مرکز O باشد، فاصله نقطه C از تصویر خود در این تجانس را بدست آورید.



$K = \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2} \longrightarrow$ C' وسط OC است.

$OB = \frac{AB}{2} = 2 , BC = 4 \longrightarrow O\hat{B}C : OC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \longrightarrow CC' = \sqrt{5}$

- وسط اضلاع مثلث $A\hat{B}C$ را M، N و E می‌نامیم. ثابت کنید مثلث $M\hat{N}E$ مجانس مثلث $A\hat{B}C$ است. مرکز و نسبت تجانس را بدست آورید.



اگر O مرکز ثقل مثلث، محل برخورد میانه‌های مثلث باشد، داریم:

$OE = \frac{1}{2} OA \longrightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{1}{2}$

$ON = \frac{1}{2} OB \longrightarrow \frac{ON}{OB} = \frac{1}{2}$

$OM = \frac{1}{2} OC \longrightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{1}{2}$

$M\hat{N}E$ مجانس $A\hat{B}C$ به مرکز تجانس O و نسبت $-\frac{1}{2}$ است.

(چون O بین A و E قرار دارد، پس نسبت تجانس منفی است.)

- اگر A' مجانس A به مرکز O و نسبت k باشد و A'' مجانس A' به مرکز O و نسبت k' باشد، در اینصورت ثابت کنید A'' مجانس A به مرکز O می‌باشد و نسبت تجانس را بدست آورید.

$OA' = k.OA$ ① A مجانس A' ، $OA'' = k'.OA'$ ② A' مجانس A''

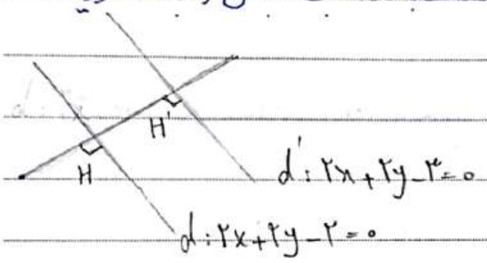
①, ② $\longrightarrow OA'' = k'(k.OA) \longrightarrow OA'' = (kk')OA \longrightarrow$ A'' مجانس A به مرکز O و نسبت kk'

- نقطه $A'(-1,5)$ مجانس نقطه $A(-1,-1)$ و نقطه $B'(5,-4)$ مجانس نقطه $B(1,-4)$ است. نسبت تجانس را بدست آورید.

چون A' مجانس A و B' مجانس B است، پس $A'B'$ مجانس AB است. بنابراین نسبت $A'B'$ به AB همان نسبت تجانس است.

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{13} \quad , \quad A'B' = \sqrt{(5+1)^2 + (-4-5)^2} = 3\sqrt{13} \longrightarrow |k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \longrightarrow k = \pm 3$$

- اگر خط $d': 2x+2y-3=0$ تصویر خط $d: x+y-1=0$ در تجانس به مرکز مبدأ مختصات باشد، نسبت تجانس را بدست آورید.



$$|k| = \frac{OH'}{OH} = \frac{\frac{|2\times 0 + 2\times 0 + (-3)|}{\sqrt{2^2+2^2}}}{\frac{|2\times 0 + 2\times 0 + (-2)|}{\sqrt{2^2+2^2}}} = \frac{3}{2}$$

تعریف: تبدیل T را همانی گوییم هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم: $T(A) = A$

تذکر: معمولاً تبدیل همانی را با I نشان می‌دهند.

- ثابت کنید تبدیل همانی، تبدیل طولپا است. دو نقطه A و B را در صفحه P و تبدیل همانی I را در نظر می‌گیریم، داریم:

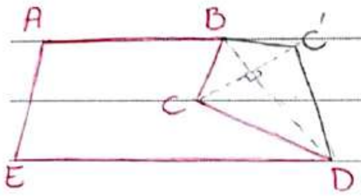
$I_{(A)} = A \ , \ I_{(B)} = B \longrightarrow AB = AB$

کاربرد تبدیل‌ها

دو کاربرد مهم بازتاب

۱- مسائل هم محیطی یا هم پیرامونی: در اینگونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط و تعداد اضلاع یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را افزایش دهیم.

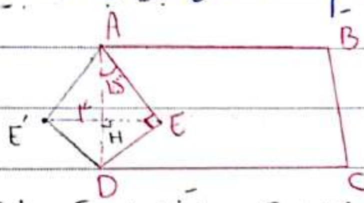
— زمینی به شکل چندضلعی ABCDE وجود دارد. دور آن را حصار کشیده‌ایم. می‌خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازه حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم. این کار چگونه ممکن است؟



دو رأس B و D را به هم وصل می‌کنیم. بازتاب C را نسبت به BD بدست آورده و آن را C′ می‌نامیم.

مساحت چندضلعی ABC′DE به اندازه مساحت BC′DC از مساحت ABCDE بیشتر است. از طرفی چون بازتاب تبدیلی طولپاست، پس BC = BC′ و DC = DC′ است، در نتیجه محیط چندضلعی‌های ABC′DE و ABCDE با هم برابر است.

— می‌خواهیم بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چندضلعی ABCDE، مساحت را افزایش دهیم. مساحت شکل جدید چند واحد بیشتر از مساحت شکل اولیه است؟

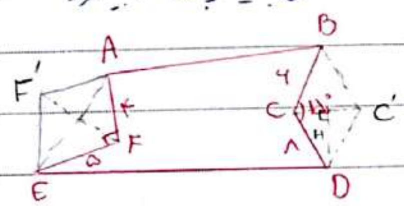


نقطه E را نسبت به پاره‌خط AB، بازتاب می‌دهیم.

چندضلعی ABCDE′، چندضلعی مطلوب است. در مثلث قائم‌الزاویه ADE، یک زاویه ۱۵° است، پس ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است.

$$EH = \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4}\times ۴ = ۱ \longrightarrow \text{میزان افزایش مساحت: } S_{AEDE'} = ۲S_{AED} = ۲\times\frac{1}{۲}\times AD\times EH = ۴\times ۱ = ۴$$

— می‌خواهیم بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چندضلعی ABCDEF، مساحت را افزایش دهیم. مساحت شکل جدید، چند واحد بیشتر از مساحت شکل اولیه است؟



C را نسبت به BD و F را نسبت به AE بازتاب می‌دهیم.

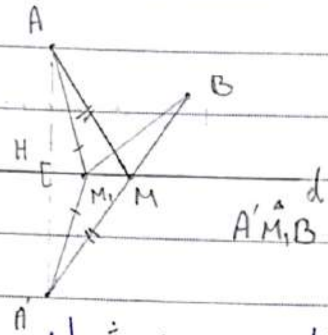
چندضلعی ABC′DEF′، چندضلعی مطلوب است. میزان افزایش مساحت برابر است با:

$$S_{AFEF'} + S_{BC'DC} = ۲S_{AFE} + ۲S_{BCD} = ۲\times\frac{1}{۲}\times ۵\times ۴ + ۲\times\frac{1}{۲}\times ۶\times ۸\times \sin ۱۵۰^\circ = ۲۰ + ۲۴ = ۴۴$$

۲_ مسئله پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن (مسئله اول هرون):

— مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه‌ی مستقیم دارد، برود و بعد سطل آب را به اصطبل ببرد که در همان طرف رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد تا مسافتی که در مجموع طی می‌کند کمترین حالت ممکن باشد؟

بازتاب نقطه A را نسبت به محور d بدست آوریم و آن را A' می‌نامیم. محل برخورد $A'B$ با d را M می‌نامیم، ثابت می‌کنیم، M جواب مسئله است. اگر M_1 نقطه‌ی دلخواه دیگری روی d باشد، باید ثابت کنیم $AM+MB < AM_1+M_1B$ است

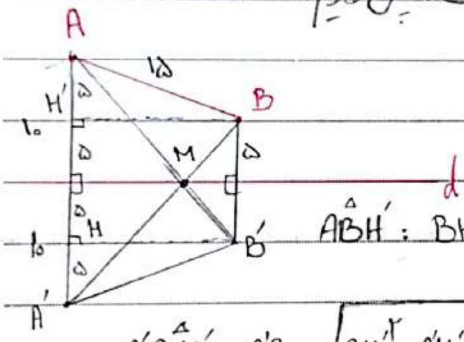


AA' محور بازتاب d $\longrightarrow \begin{cases} M_1A = M_1A' \\ MA = MA' \end{cases}$ (1)

$A'\hat{M_1}B \xrightarrow{\text{حمار}} M_1A'+M_1B > A'B \longrightarrow M_1A'+M_1B > MA'+MB \xrightarrow{(1)} M_1A+M_1B > MA+MB$

ـ در شکل زیر هرگاه فاصله دو نقطه A و B از خط d به ترتیب ۱۰ و ۵ باشد و همچنین طول پاره خط AB، ۱۵ باشد. طول کوتاه‌ترین مسیر $AM+MB$ که نقطه M روی خط d است را بدست آورید.

با توجه به مسئله اول همون، برای پیدا کردن طول کوتاه‌ترین مسیر $AM+MB$، قرینه دو نقطه A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'B'$ یک ذوزنقه متساوی الساقین است، چون $AM=MA'$ است، پس داریم:

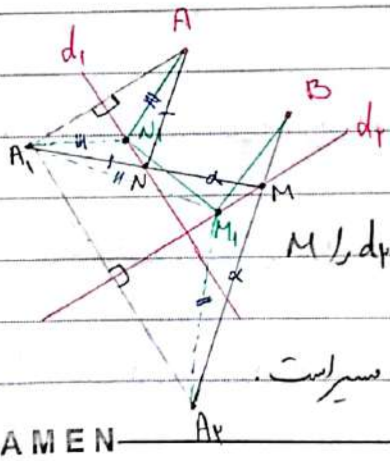


$$AM+MB \xrightarrow{AM=A'M} A'M+MB = A'B$$

$$A\hat{B}H' : BH' = \sqrt{AB^2-AH'^2} = \sqrt{15^2-5^2} = \sqrt{200}$$

$$A'\hat{B}H' : A'B = \sqrt{BH'^2+A'H'^2} = \sqrt{200+15^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$$

ـ دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقطه‌ها ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند. چگونه می‌توان با طی کوتاه‌ترین مسیر، از نقطه A آغاز به حرکت کرده و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 به نقطه B رسید؟



بازتاب نقطه A را نسبت به خط d_1 بدست می‌آوریم و آن را A_1 می‌نامیم. سپس قرینه نقطه A_1 نسبت به خط d_2 را بدست می‌آوریم و آن را A_2 می‌نامیم. محل برخورد A_2B با خط d_2 را M و محل برخورد A_1M با خط d_1 را N می‌نامیم. نشان می‌دهیم، مسیر ANMB کوتاه‌ترین مسیر است.

ابتدا ثابت می‌کنیم، طول این مسیر برابر با A_2B است.

$$AN+NM+MB \xrightarrow{AN=A_1N} (A_1N+NM)+MB = A_1M+MB \xrightarrow{A_1M=A_2M} A_2M+MB = A_2B \quad (1)$$

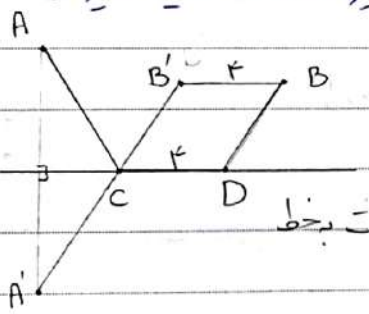
حال مسیر دلخواه AN_1M_1B را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم مسیر $ANMB$ از مسیر AN_1M_1B کوتاه‌تر است.

$$A_2\hat{M_1}B \xrightarrow{\text{حمار}} A_2M_1+M_1B > A_2B \xrightarrow{A_2M_1=A_1M_1} A_1M_1+M_1B > A_2B \quad (2)$$

$$A_1\hat{N}M_1 \xrightarrow{\text{حمار}} A_1N_1+N_1M > A_1M_1 \xrightarrow{A_1N_1=AN_1} AN_1+N_1M_1 > A_1M_1 \xrightarrow{+M_1B} AN_1+N_1M_1+M_1B > A_1M_1+M_1B$$

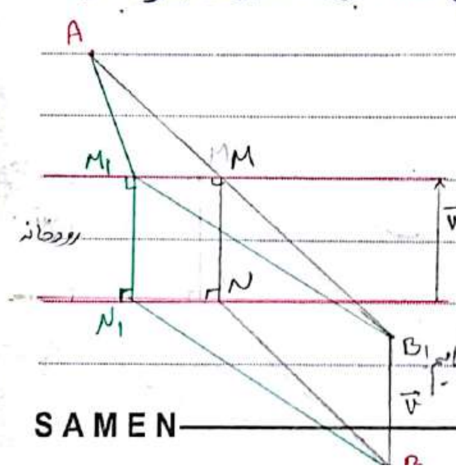
$$\xrightarrow{(2)} AN_1+N_1M_1+M_1B > A_2B \xrightarrow{(1)} AN_1+N_1M_1+M_1B > AN+NM+MB \rightarrow \boxed{\text{مسیر } AN_1M_1B > \text{مسیر } ANMB}$$

— دو شهر A و B مطابق شکل، در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری‌که چهار کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این چهار کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد.



ابتدا نقطه‌ی B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ کیلومتر و موازی رودخانه و در جهت A، به نقطه‌ی B' انتقال می‌دهیم. حال مسئله شبیه مسئله اول همین است. بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه بدست می‌آوریم تا به A' برسیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا نقطه C بدست آید، از نقطه‌ی C و در امتداد رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ کیلومتر حرکت می‌کنیم تا به نقطه D برسیم. با توجه به مسئله قبل مسیر ACDB کوتاه‌ترین مسیر است.

— اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌طوری‌که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد.



محل احداث پل را ایجاد در نظر بگیریم که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد.

بردار $\vec{v}$ را عمود بر مسیر رودخانه و به طول فاصله‌ی دو ساحل رودخانه درنظر می‌گیریم. نقطه B را با بردار $\vec{v}$ انتقال می‌دهیم تا B_1 بدست آید. محل برخورد AB_1 با ساحل رودخانه را M می‌نامیم.

از M، پل MN را عمود بر مسیر رودخانه رسم می‌کنیم. اگر M_1N_1 پل دیگری باشد، نشان می‌دهیم: طول مسیر $AMNB$ < طول مسیر AM_1N_1B

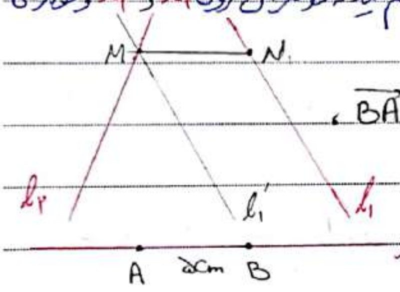
$MN \parallel B_1B$ ، $B_1B \parallel$ ۲
$MN = B_1B =$ ۲
$\Big\} \longrightarrow MNBB_1$ متوازی‌الاضلاع $\longrightarrow MB_1 = NB$ (۱)

$M_1N_1 \parallel B_1B$ ، $B_1B \parallel$ ۲
$M_1N_1 = B_1B =$ ۲
$\Big\} \longrightarrow M_1N_1BB_1$ متوازی‌الاضلاع $\longrightarrow M_1B_1 = N_1B$ (۲)

$A\hat{M_1}B_1 \xrightarrow{\text{حاده}} AM_1 + M_1B > AB_1 \longrightarrow AM_1 + M_1B_1 > AM + MB_1 \xrightarrow[(۲)]{(۱)} AM_1 + N_1B > AM + NB$

$\xrightarrow[(+)]{MN = M_1N_1} AM_1 + M_1N_1 + N_1B > AM + MN + NB \longrightarrow$ طول مسیر AM_1N_1B > طول مسیر $AMNB$

— سه خط دو به دو غیرموازی l و l_1 و l_2 در صفحه مفروض اند. پاره‌خطی به طول پنج سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l_1 و l_2 و موازی l باشد.



روی خط l، پاره‌خط AB را مساوی پنج سانتی‌متر جدا می‌کنیم. حال تحت بردار $\overrightarrow{BA}$، خط l_1 را انتقال می‌دهیم تا خط l_2 را در M قطع کند. از M خطی موازی l رسم می‌کنیم تا l_1 را در N قطع کند. MN جواب مسئله است زیرا M انتقال یافته N، تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ است، پس:

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{NM} = ۵$ ، $NM \parallel l$

subject:

Year: Month: Date:

«تست‌های تبدیل‌های هندسی»

۱) گزینه‌ی ۳ چون با سه بار دوران، به نقطه‌ی اولیه رسیده‌ایم، پس یک ۳۶۰° کامل تقسیم بر ۳ می‌شود و در نتیجه زاویه‌ی دوران ۱۲۰° است.

۲) گزینه‌ی ۳ $\alpha + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + ۲\times ۷۵^\circ = ۳۶۰^\circ \longrightarrow \alpha = ۳۰^\circ$

۳) گزینه‌ی ۴ $O\ M''\ M\ M'$ (x, x, $۲x$) $\longrightarrow OM' - OM'' = ۳x = \frac{۳}{۲}OM$

۴) گزینه‌ی ۴ $AA' = OA + OA' = ۶ + \frac{۷}{۲}\times ۶ = ۶ + ۲۱ = ۲۷$

۵) گزینه‌ی ۳ $r + \frac{۲}{۳}r = ۱۰ \longrightarrow \frac{۵}{۳}r = ۱۰ \longrightarrow r = ۶ , r' = ۴ \xrightarrow{\text{مماس مشترک خارجی}} \sqrt{۱۰^۲ - (۶-۴)^۲} = ۴\sqrt{۶}$

۶) گزینه‌ی ۲ دو مثلث $A\hat{B}F$ و $D\hat{C}E$ تصویر یکدیگر، با یک دوران ۱۸۰° می‌باشند.

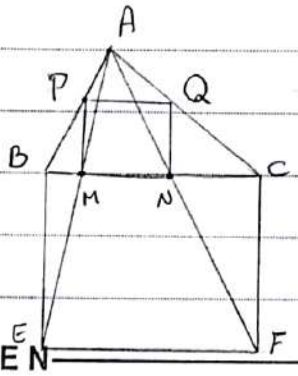
۷) گزینه‌ی ۲ ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال است.

۸) گزینه‌ی ۳ بازتاب. بازتاب یک نقطه بر یک خط همان نقطه است ولی دوران دوران و انتقال انتقال یک نقطه لزوماً همان نقطه نیست.

۹) گزینه‌ی ۴ دو دایره با شعاع‌های نامساوی با تبدیل تجانس، تصویر یکدیگر می‌شوند.

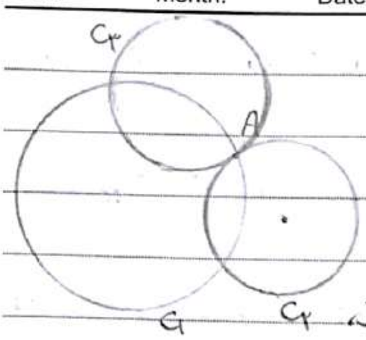
۱۰) گزینه‌ی ۱ مجانس دایره‌ی C به مرکز A، دایره‌ای مماس خارج با دایره‌ی C و به شعاع 2R است.

۱۱) گزینه‌ی ۴ روی ضلع BC، مربع BCFE را رسم می‌کنیم. از A خطوطی به E و F وصل می‌کنیم تا BC را در M و N قطع کنند. از نقاط M و N، عمودهایی رسم می‌کنیم، تا AB و AC را در P و Q قطع کنند. چهارضلعی MNQP، مجانس چهارضلعی BCEF به مرکز A است.



SAMEN

subject:
Year: Month: Date:



۱۲) گزینه‌ی ۴ اگر دایره‌ی C_2 را حول نقطه‌ی A، به اندازه‌ی $180°$ دوران دهیم، دایره‌ی C_3 بدست می‌آید.

دایره‌ی C_3، دایره‌ی C_1 را در B قطع می‌کند. امتداد BA، C_2 را در B' قطع می‌کند. $AB = AB'$

پس دوران امکان پذیر است. حال اگر C_2 را نسبت به خط مماس که در نقطه‌ی A بر آن رسم شده است،

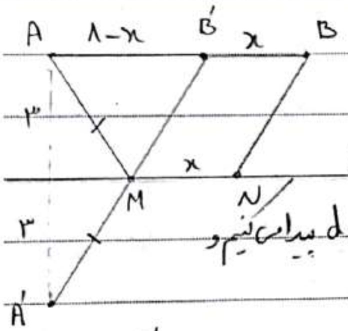
بازتاب کنیم، باز C_3 بدست می‌آید. پس با بازتاب امکان پذیر است. همچنین می‌توان C_3 را مجانس C_2 نسبت به مرکز A و نسبت تجانس

$k = -1$ نشان داد. پس با تجانس نیز امکان پذیر است.

۱۳) گزینه‌ی ۴ اگر خط p را $180°$ حول P دوران دهیم. در این صورت تصویر d، یعنی d'، دایره را در نقطه M قطع می‌کند. امتداد

MP، خط d را در N قطع می‌کند (در صورت وجود). حال اگر دایره‌ی c را نسبت به نقطه‌ی P با زاویه‌ی 180 دوران دهیم تا خط d را قطع کند و از

محل تلاقی تصویر دایره و d به P وصل کنیم و امتداد می‌دهیم. پاره خط حاصل جواب مسئله است.

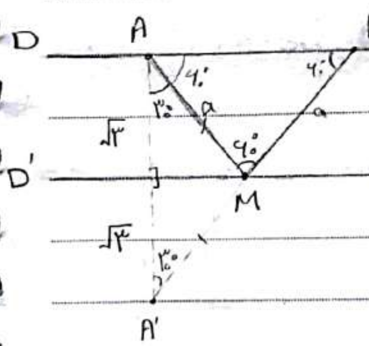


۱۴) گزینه‌ی ۴ برای بدست آوردن حداکثر جاده‌ای که از کنار ساحل می‌گذرد، باید

$AM + NB$ کمترین مقدار خود باشد. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر AMB'، قرینه A را نسبت به ساحل d پیدا می‌کنیم و

آن را A' می‌نامیم. AA' خط d را در M قطع می‌کند. $AM = MA'$ ①

$AM + MB' \overset{①}{=} A'M + MB' = A'B' = 12 - x \longrightarrow A'B'^2 = 6^2 + (8-x)^2 = (12-x)^2 \longrightarrow x = 5{,}5$



۱۵) گزینه‌ی ۳

$\frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3} \longrightarrow a = 2$

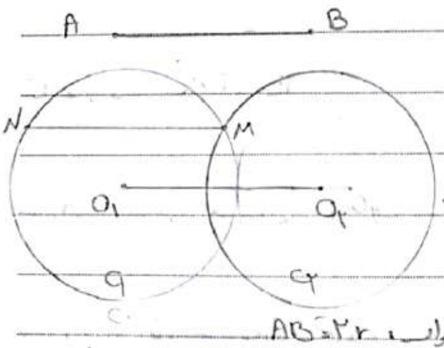
$\longrightarrow S_{\overset{\triangle}{AMB}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \longrightarrow S_{\overset{\triangle}{AMB}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$

با توجه به قاعده‌ی هرون AMB کوتاه‌ترین مسیر است.

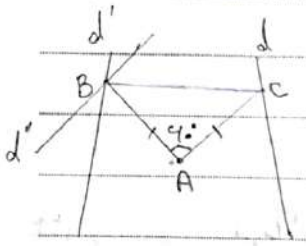
SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

۱۷) گزینه‌ی ۲ — با توجه به توضیحات سؤال ۱۲، می‌توان همچین شکلی را رسم کرد و این حالت یکتاست و فقط یک حالت وجود دارد.



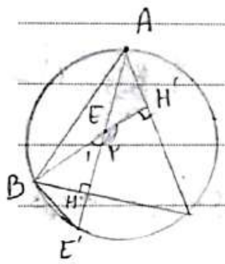
۱۸) گزینه‌ی ۴ — دایره‌ی C_1 را با بردار AB انتقال می‌دهیم تا C_2 بدست آید. از نقطه M محل تلاقی C_1 و C_2، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره C_1 را در N قطع کند، در اینصورت M انتقال یافته N می‌باشد. در اینصورت داریم: $NM \parallel AB,\ NM = AB$ شرط وجود جواب، $AB \le 2r$



۱۶) گزینه‌ی ۲ — خط d را با مرکز A و زاویه‌ی ۹۰° دوران می‌دهیم تا خط d'' بدست آید. نقطه‌ی B، نقطه‌ی تلاقی d' و d'' است. B را با مرکز A و زاویه‌ی ۹۰° دوران می‌دهیم تا به نقطه C روی خط d برسیم. مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

زیرا: ABC متساوی الاضلاع است: $AB = AC$ شعاع دوران، $B\hat{A}C = 90°$

۱۹) گزینه‌ی ۱ — اگر E محل تلاقی ارتفاع های مثلث باشد، EH را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی را در E' قطع کند، داریم:

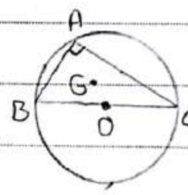


$$\left.\begin{array}{l} EH'CH:\ H + H' = 180° \rightarrow \hat{E}_2 + \hat{C} = 180° \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180° \end{array}\right\} \rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$\rightarrow \hat{E}' = \hat{E}_1 \rightarrow BE = BE' \xrightarrow{\text{عمود منصف } BH}$ E' بازتاب E نسبت به BC است.

۲۰) گزینه‌ی ۱ — $MA + MB = MA' + MB = A'B = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-4)^2} = 5$

۲۱) گزینه‌ی ۴ — چون $AM = \frac{1}{3}AB$ است، یعنی M مجانس B، در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{1}{3}$ می‌باشد. با تغییر B روی محیط دایره، نقطه M روی مجانس دایره C حرکت می‌کند که دایره‌ای است به شعاع $\frac{2}{3}$.



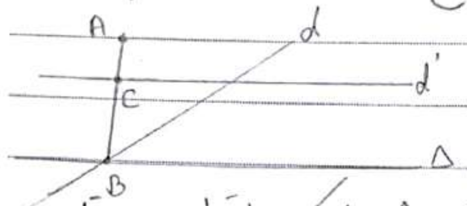
۲۲) گزینه‌ی ۱ — نقطه G روی دایره‌ای به شعاع $\frac{2}{3}$ بوده و r شعاع دایره بزرگ است. داریم: $r = \frac{BC}{2}$

در نتیجه G روی دایره به شعاع $\frac{BC}{6}$ قرار دارد.

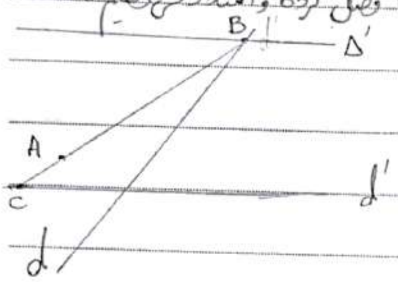
SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

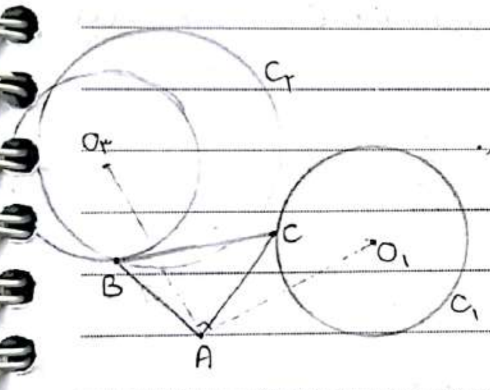
۲۳) گزینه‌ی ۳ Δ مجانس d' را به مرکز A و نسبت ۳ رسم می‌کنیم تا خط d را در B قطع کند، از A به B وصل می‌کنیم تا d' را در C قطع کند. $AB = ۳AC$



حال اگر Δ' مجانس d' به مرکز A و نسبت -۳ باشد، تا خط d را در B قطع کند، از B به A وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا d' را در C قطع کند. $AB = ۳AC$

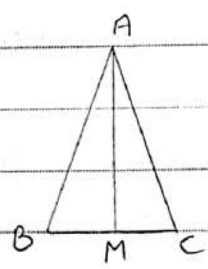


۲۴) گزینه‌ی ۲ اگر AB خط مورد نظر باشد، در اینصورت $AM = ۳MB$ یعنی A مجانس B به مرکز M و نسبت -۳ است، پس کافیست دایره‌ی C''، مجانس دایره‌ی C را به مرکز M و نسبت -۳ رسم کنیم تا C' را در A قطع کند. از A به M وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی C را در B قطع کند، در اینصورت $AM = ۳MB$



۲۵) گزینه‌ی ۴ دایره‌ی C_1 را حول نقطه‌ی A و به اندازه‌ی ۹۰° دوران می‌دهیم تا دایره‌ی C_3 بدست آید. محل تلاقی C_3 و C_2 را B می‌نامیم. حال B را حول A و به اندازه‌ی -۹۰° دوران می‌دهیم تا C بدست آید. مثلث $A\hat{B}C$ جواب مسئله است.

۲۶) گزینه‌ی ۳ چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس میانه‌ی آن نیمساز یا محور بازتاب است.



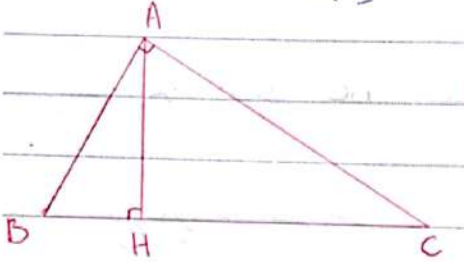
$$\left.\begin{array}{l} S(A) = A \\ S(B) = C \end{array}\right\} \longrightarrow S(AB) = AC$$

subject:
Year: Month: Date:

روابط طولی در مثلث

منظور از روابط طولی، رابطه هایی است که در مورد اندازه های پاره خط ها و زاویه ها در شکل های مختلف بحث می کند.

یادآوری: در مثلث قائم الزاویه $\hat{ABC}$ که $\hat{A}=90^\circ$ و AH ارتفاع وارد بر وتر است، رابطه های زیر برقرار است.



1) $\hat{A}=90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} BC^2=AB^2+AC^2$

2) $AB^2=BH\times BC$ 3) $AC^2=CH\times BC$

4) $AH^2=BH\times CH$ (ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین قطعه های ایجاد شده روی وتر است.) 5) $AH\times BC=AB\times AC$

- در مثلثی $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$ و $a^2+b^2+c^2=16$ است. شعاع دایره محیطی این مثلث را بدست آورید.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه، شعاع دایره محیطی، نصف وتر است.

$\hat{B}+\hat{C}=90^\circ \to \hat{A}=90^\circ \to a^2=b^2+c^2 \to a^2+b^2+c^2=16 \to a=2\sqrt{2} \to R=\sqrt{2}$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر با اندازه وتر است.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=a$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر با اندازه قطر دایره محیطی آن است. (قضیه سینوس ها)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=a=2R$$ (در مثلث قائم الزاویه)

محل برخورد عمود منصف ها در مثلث قائم الزاویه، وسط وتر است. پس مرکز دایره محیطی آن، همان وسط وتر است.

- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه $\hat{ABC}$ $(\hat{A}=90^\circ)$ و $AH=h_a$ داریم: $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}h_a\times a \to bc=h_a\times a$ (1) , $\hat{A}=90^\circ \to b^2+c^2=a^2 \xrightarrow[(1)]{\times h_a^2} h_a^2 b^2+h_a^2 c^2=b^2c^2 \xrightarrow{\div h_a^2 b^2 c^2} \frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

subject:
Year: Month: Date:

ـ اگر در یک مثلث قائم الزاویه‌ای، یک ضلع زاویه قائمه دو برابر ضلع دیگر باشد، ثابت کنید ارتفاع وارد بر وتر، وتر را به نسبت $\frac{1}{4}$ تقسیم می‌کند.

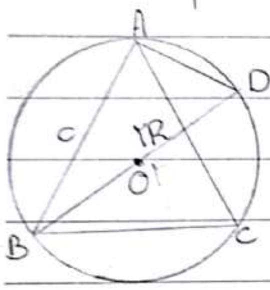
$$\left.\begin{array}{l} b^2 = CH \times a \\ c^2 = BH \times a \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{c^2}{b^2} = \frac{BH}{CH} \longrightarrow \frac{c^2}{(2c)^2} = \frac{BH}{CH} \longrightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{1}{4}$$

ـ قضیه سینوس‌ها. در مثلث $\hat{ABC}$، $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ داریم: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

حالت $\hat{A} = 90°$ در قضیه ۲ ثابت کرده‌ایم، برای $\hat{A} < 90°$, $\hat{A} > 90°$ قضیه را ثابت می‌کنیم:

الف) اگر $\hat{A} < 90°$ باشد، دایره محیطی مثلث $\hat{ABC}$ به مرکز O را رسم کرده و قطر BD را رسم، از D به A وصل می‌کنیم.

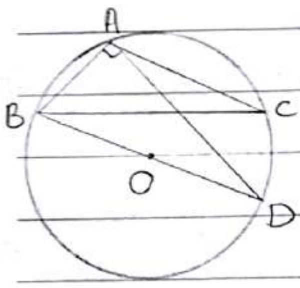


$\hat{C} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$, $B\hat{A}D = 90°$ (محاطی مقابل به قطر)

$B\hat{A}D: \sin C = \sin D = \frac{c}{2R} \longrightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

ب) اگر $\hat{A} > 90°$ باشد، دایره محیطی مثلث را رسم کرده، قطر BD را رسم می‌کنیم و از D به A وصل می‌کنیم.



$\hat{C} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$, $B\hat{A}D = 90°$ (محاطی مقابل به قطر)

$B\hat{A}D: \sin C = \sin D = \frac{c}{2R} \longrightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

SAMEN

subject:

Year: Month: Date:

در مثلث $A\hat{B}C$ اگر $BC=10$ ، $\hat{A}=120^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ باشد اندازه زاویه $\hat{B}$ را بدست آورید.

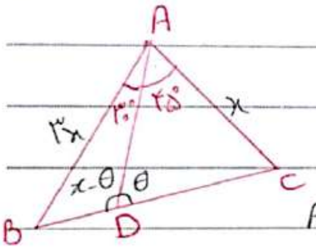
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \longrightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ}=\frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B} \longrightarrow \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \hat{B}=\begin{cases}45^\circ \checkmark \\ 135^\circ \ ,(A=120^\circ)\ \times\end{cases}$$

در مثلث $A\hat{B}C$ داریم: $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=6$ اگر $\hat{C}=120^\circ$ باشد، طول ضلع کوچک این مثلث را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}\\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B} \longrightarrow \tan A=\tan B \longrightarrow \begin{cases}\hat{A}+180^\circ=\hat{B}\ \times \\ \hat{A}=\hat{B} \longrightarrow \hat{A}=\hat{B}=30^\circ\end{cases}$$

$$\frac{a}{\cos 30^\circ}=6 \longrightarrow a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$$

در مثلث $A\hat{B}C$ شکل مقابل، $AB=3AC$ است. نسبت $\frac{BD}{DC}$ را بدست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}D:\ \frac{AB}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{BD}{\sin 30^\circ} \longrightarrow \frac{3x}{\sin\theta}=\frac{BD}{1/2} \\ A\hat{D}C:\ \frac{AC}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin 45^\circ} \longrightarrow \frac{x}{\sin\theta}=\frac{DC}{\sqrt{2}/2}\end{array}\right\}$$

$$\longrightarrow \frac{BD}{1/2}=\frac{3CD}{\sqrt{2}/2} \longrightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

اگر در مثلث $A\hat{B}C$ ، رابطه $c=(b^2-2)\frac{\sin C}{\sin B}$ برقرار باشد، مقدار b را بدست آورید.

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \longrightarrow \frac{b}{\sin B}=\frac{(b^2-2)\frac{\sin C}{\sin B}}{\sin C} \longrightarrow b^2-2=b \longrightarrow b=2$$

در مثلث $A\hat{B}C$ رابطه $a^2\cos^2 B+b^2\sin^2 A=8$ برقرار است اندازه a را بدست آورید.

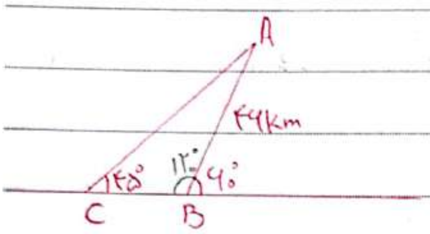
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \longrightarrow a\sin B=b\sin A \longrightarrow a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A \quad (1)$$

$$a^2\cos^2 B+b^2\sin^2 A=8 \xrightarrow{(1)} a^2\cos^2 B+a^2\sin^2 B=8 \longrightarrow a^2(\sin^2 B+\cos^2 B)=8$$

$$\longrightarrow a^2=8 \longrightarrow a=2\sqrt{2}$$

subject:
Year: Month: Date:

دو موشک از نقطه های B و C به ترتیب تحت زاویه های 60° و 45° نسبت به سطح زمین پرتاب می شوند اگر موشک اول، پس از طی 46km به نقطه A برسد، موشک دوم پس از طی چند کیلومتر به همین نقطه می رسد؟



$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \rightarrow \frac{AC}{\sqrt{3}/2} = \frac{46}{\sqrt{2}/2} \rightarrow AC = 23\sqrt{6}$$

تست های روابط طولی در مثلث

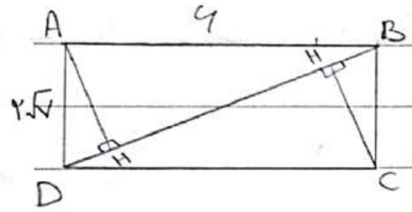
۱) گزینه ۲

$$a^2+c^2=b^2 \rightarrow a^2+c^2=2ac \rightarrow a^2+c^2-2ac=0 \rightarrow (a-c)^2=0 \rightarrow a=c$$

۲) گزینه ۴

$$\frac{a\times b}{2}=9 \rightarrow a\times 2a=18 \rightarrow a=3 \rightarrow b=6 \rightarrow c=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$$

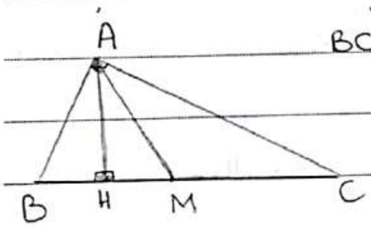
۳) گزینه ۱



$$\left.\begin{array}{l} B\hat{C}D:\ BC^2 = BH'\times BD \\ A\hat{B}D:\ AD^2 = DH\times BD \end{array}\right\} \rightarrow BH'=DH,\ BD=8$$

$$\rightarrow BH'=DH=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}=3{,}5 \rightarrow HH'=BD-BH'-DH=8-3{,}5-3{,}5=1$$

۴) گزینه ۳



$$BC^2 = AB^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}AB\right)^2=\frac{9}{4}AB^2 \rightarrow BC=\frac{3}{2}AB$$

$$AH\times BC = AB\times AC \rightarrow AH=\frac{AB\times\frac{\sqrt{5}}{2}AB}{\frac{3}{2}AB}=\frac{\sqrt{5}}{3}AB$$

$$AB^2=BH\times BC \rightarrow BH=\frac{AB^2}{\frac{3}{2}AB}=\frac{2}{3}AB,\ BM=\frac{BC}{2}=\frac{3}{4}AB \rightarrow MH=\frac{1}{12}AB$$

$$\rightarrow \frac{S_{A\hat{B}C}}{S_{A\hat{M}H}}=\frac{AB\times AC}{AH\times MH}=\frac{AB\times\frac{\sqrt{5}}{2}AB}{\frac{\sqrt{5}}{3}AB\times\frac{1}{12}AB}=\frac{3\times 12}{2}=18$$

۵) گزینه ۳

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}} \rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}} \rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2\sin\hat{B}}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sin\hat{B}} \rightarrow \sin\hat{B}=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{B}=60^\circ \rightarrow \hat{A}=75^\circ \times \\ B=120^\circ \rightarrow \hat{A}=15 \rightarrow \hat{B}=8\hat{A} \end{array}\right.$$

SAMEN

subject:

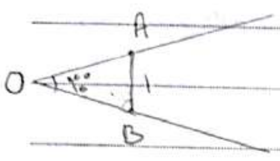
Year: Month: Date:

۶) گزینه‌ی ۴ $\hat A=75^\circ,\ \hat B=45^\circ \to \hat C=60^\circ \to \frac{AB}{\sin\hat C}=\frac{AC}{\sin\hat B} \to \frac{AB}{AC}=\frac{\sin\hat C}{\sin\hat B}=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\sqrt6}{2}$

۷) گزینه‌ی ۱ $\frac{AB}{\sin\hat C}=\frac{AC}{\sin\hat B} \to \frac{AC}{AB}=\frac{\sin\hat B}{\sin\hat C}=\frac{\sin\hat B}{\cos\hat C} \to \sin\hat C=\cos\hat C \to \hat C=45^\circ \to \hat B=30^\circ$

۸) گزینه‌ی ۲ $\frac{a}{\sin\hat A}=\frac{b}{\sin\hat B} \to \frac{a}{b}=\frac{\sin\hat A}{\sin\hat B}=\frac{\sin\hat A}{\cos\hat C} \to \sin\hat B=\cos\hat C \to \hat B=22/5^\circ$

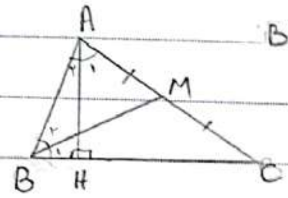
۹) گزینه‌ی ۳



$\frac{AB}{\sin\hat O}=\frac{1}{\frac12}=2 \to \frac{OA}{\sin\hat B}=2$

$\to OA=2\sin\hat B \to \max(OA)=2\times\max(\sin\hat B)=2\times1=2$

۱۰) گزینه‌ی ۱



$B\hat MC:\ \frac{CM}{\sin\hat B_1}=\frac{BM}{\sin\hat C}=\frac{BC}{\sin\hat M},\quad A\hat HC:\ \sin\hat C=\frac{AH}{AC}=\frac{BM}{AC}$

$\to \frac{BM}{\frac{BM}{AC}}=AC=\frac{CM}{\sin\hat B_1} \to \sin\hat B_1=\frac{CM}{AC}=\frac12 \to \hat B_1=30^\circ$

۱۱) گزینه‌ی ۳ $\frac{\sin\hat A}{a}=\frac{\sin\hat B}{b}=\frac{\sin\hat C}{c}=\frac{1}{2R} \to \sin\hat A\sin\hat B\sin\hat C=abc\times\left(\frac{1}{2R}\right)^3,\ R=\frac{abc}{4S}$

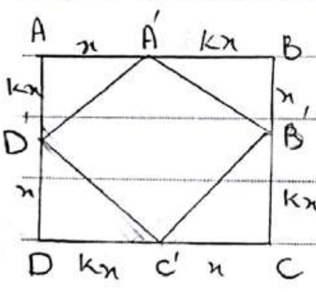
$\to abc=4S\times R \to \sin\hat A\sin\hat B\sin\hat C=4S\times R\times\frac{1}{8R^3}=\frac{S}{2R^2}$

اثبات نکته: $R=\frac{abc}{4S}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \to \sin C=\frac{c}{2R}$

$S=\frac12 ab\sin C=\frac12 ab\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R} \to R=\frac{abc}{4S}$

ـ هریک از رأس‌های یک مربع، بر روی ضلع‌های مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت این دو مربع $\frac58$ باشد، رأس مربع کوچک، ضلع مربع بزرگ را با چه نسبتی قطع می‌کند؟



$a=x+kx=(k+1)x$

$b=\sqrt{x^2+k^2x^2}=x\sqrt{k^2+1}$

$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{(k^2+1)x^2}{(k+1)^2x^2}=\frac58 \to 8k^2+8=5k^2+10k+5$

$\to 3k^2-10k+3=0 \to k=\frac13, 3 \to$ با توجه به شکل $k=3 \to \frac{x}{kx}=\frac1k=\frac13$

subject:
Year: Month: Date:

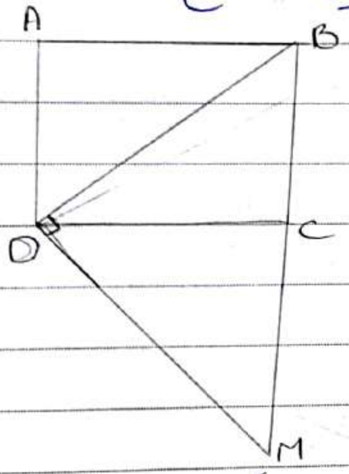
— اگر در مثلث $A\hat{B}C$، رابطه $ab = 64\sin A\sin B$ برقرار باشد شعاع دایره محیطی را بدست آورید.

$$ab = 64\sin A\sin B \longrightarrow \frac{a}{\sin A}\cdot\frac{b}{\sin B} = 64$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$$
$$\longrightarrow (2R)^2 = 64 \longrightarrow 2R = 8 \longrightarrow \boxed{R = 4}$$

— اگر R شعاع دایره محیطی مثلث $A\hat{B}C$ باشد، و $AB = R\sqrt{2}$ باشد اندازه زاویه C کدام می‌تواند باشد؟

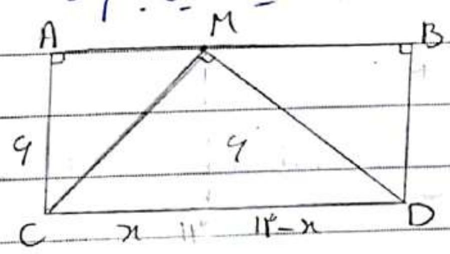
$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \longrightarrow \sin\hat{C} = \frac{R\sqrt{2}}{2R} \longrightarrow \sin\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \hat{C} = \begin{cases} 45^\circ \\ 135^\circ \end{cases}$$

— در مستطیلی به ابعاد ۱ و ۲، از انتهای یک قطر، عمودی رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک مستطیل را در M قطع کند، فاصله M از سر دیگر این قطر چقدر است؟



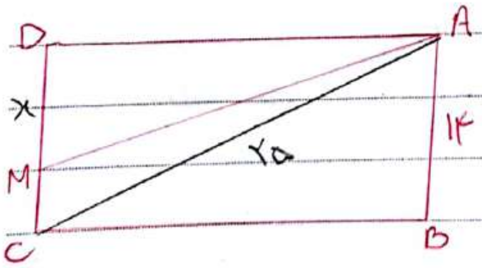
$$BD = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$
$$A\hat{B}D: BD^2 = BC \times BM \longrightarrow 5 = 1 \times BM \longrightarrow BM = 5$$

— در مستطیلی، به ابعاد ۱۳ و ۶، نقطه M روی ضلع بزرگ قرار دارد و خطهای واصل M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عمودند. فاصله نزدیکترین رأس مستطیل از M کدام است؟



$$6^2 = (13-x)x \longrightarrow x = \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases} \longrightarrow \text{نزدیکترین} : 4$$

— در شکل روبرو، پاره‌خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت های $\frac{5}{9}$ تقسیم کرده است. اگر طول قطر مستطیل ۲۵ باشد، طول پاره‌خط AM چند است؟

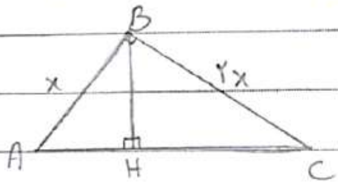


$$AD = \sqrt{429}$$
$$S_{A\hat{M}D} = \frac{5}{9+5} S_{\text{کل}} \longrightarrow \frac{1}{2} x \times AD = \frac{5}{14} \times 14 \times AD \longrightarrow x = 10$$
$$A\hat{D}M: AM = \sqrt{429+100} = \sqrt{529} = 23$$

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

ـ اگر نسبت طول دو ضلع زاویه قائمه یک مثلث قائم الزاویه $\frac{1}{2}$ باشد، نسبت طول پاره‌خط‌هایی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر ایجاد می‌کند چقدر است؟

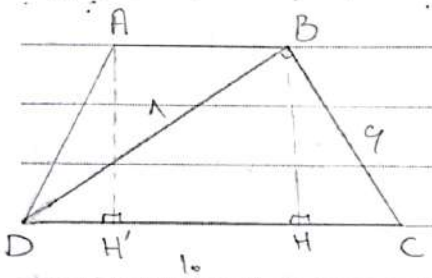


$AB^2 = AH \times AC$

$BC^2 = CH \times AC$

$\longrightarrow \frac{AH}{CH} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{x}{2x}\right)^2 = \frac{1}{4}$

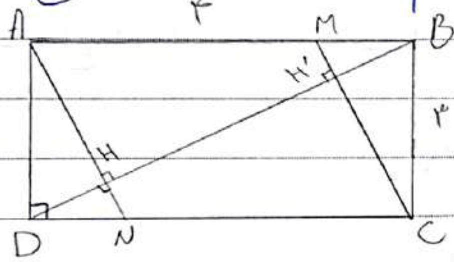
ـ در یک ذوزنقه متساوی الساقین قطر عمود بر ساق است، اگر اندازه قاعده بزرگتر و قطر به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد، اندازه قاعده کوچکتر را بدست آورید.



$B\hat{C}D: BC = \sqrt{CD^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

$BC^2 = CH \times DC \longrightarrow CH = 3{,}6 \longrightarrow DH' = 3{,}6 \longrightarrow HH' = AB = 2{,}8$

ـ در مستطیلی به طول ضلع‌ها ۳ و ۴ واحد از هر دو رأس مقابل، عمودی بر قطر دیگر مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی الاضلاع حاصل کدام است؟



$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

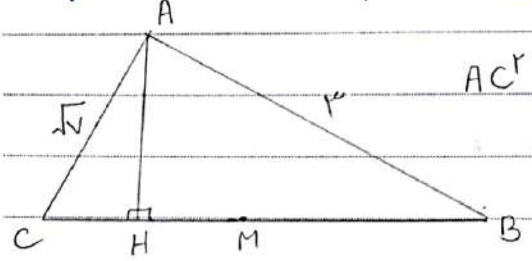
$A\hat{D}B: AD \times AB = AH \times BD \longrightarrow 3 \times 4 = AH \times 5 \longrightarrow AH = \frac{12}{5}$

$A\hat{D}N: AD^2 = AH \times AN \longrightarrow 9 = \frac{12}{5} \times AN \longrightarrow AN = \frac{15}{4}$

$A\hat{D}N: DN = \sqrt{AN^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{225}{16} - 9} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4} \longrightarrow NC = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$

$S_{AMCN} = AD \times NC = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25$

ـ در مثلث قائم الزاویه‌ای، طول ضلع‌های زاویه قائمه آن ۳ و $\sqrt{7}$ است. ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. فاصله‌ی پای عمود از وسط وتر کدام است؟

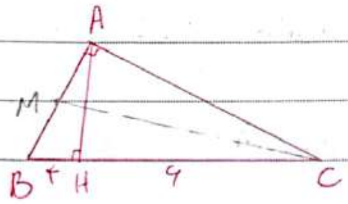


$AC^2 = CH \times BC \longrightarrow CH = 7/4$

$\longrightarrow MH = 2 - 7/4 = 1/4$

subject:
Year: Month: Date:

— در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، طول میانه وارد بر ضلع AB کدام است؟

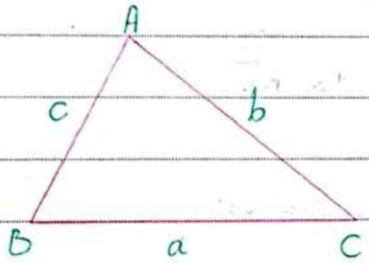


$AB^2 = BH \times BC \longrightarrow AB = 2\sqrt{10} \longrightarrow AM = \sqrt{10}$

$AC^2 = CH \times BC \longrightarrow AC = 2\sqrt{15} \longrightarrow CM = \sqrt{10 + 60} = \sqrt{70}$

«رابطه کسینوس‌ها»: یکی دیگر از روابط طولی، قضیه کسینوس‌هاست که با کمک آن می‌توان با داشتن طول سه ضلع مثلث، تمام زوایای مثلث و اندازه سه میانه را بدست آورد.

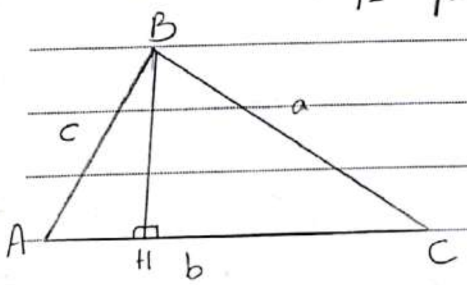
«قضیه کسینوس‌ها»: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع، برابر با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین آن هاست.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

«اثبات»: الف) در مثلث $A\hat{B}C$، اگر A کوچکتر از ۹۰° باشد، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم، داریم:



$A\hat{B}H : \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow \sin A = \frac{BH}{c} \longrightarrow BH = c\sin A$ (۱)

$A\hat{B}H : \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow \cos A = \frac{AH}{c} \longrightarrow AH = c\cos A$

$HC = b - AH \longrightarrow HC = b - c\cos A$ (۲)

$B\hat{H}C : H = 90^\circ \longrightarrow a^2 = BH^2 + CH^2 \xrightarrow[(2)]{(1)} a^2 = c^2\sin^2 A + (b - c\cos A)^2$

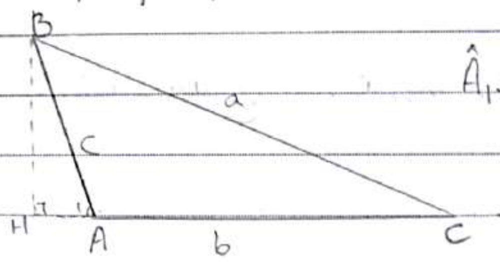
$= c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc\cos A = c^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc\cos A$

$\longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

ب) اگر در مثلث $A\hat{B}C$، $\hat{A} > 90^\circ$ باشد، در اینصورت ارتفاع BH را خارج مثلث $A\hat{B}C$ رسم می‌کنیم، داریم:



$$\hat{A}_1 + \hat{A} = 180^\circ \longrightarrow \hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \sin\hat{A}_1 = \sin\hat{A} \\ \cos\hat{A}_1 = -\cos\hat{A} \end{cases} \quad (I)$$

$$A\hat{B}H: \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow \sin\hat{A}_1 = \frac{BH}{c} \longrightarrow BH = c\sin\hat{A}_1 \overset{(I)}{=} c\sin\hat{A} \quad (1)$$

$$A\hat{B}H: \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow \cos\hat{A}_1 = \frac{AH}{c} \longrightarrow AH = c\cos\hat{A}_1 = -c\cos A$$

$$HC = b + AH \longrightarrow HC = b - c\cos A \quad (2)$$

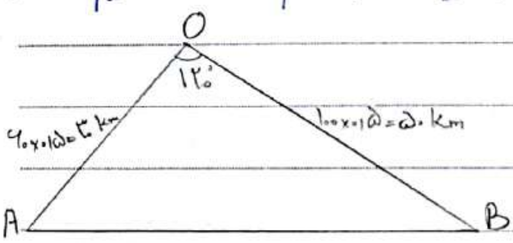
$$B\hat{H}C: \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow a^2 = BH^2 + HC^2 \xrightarrow[(2)]{(1)} a^2 = c^2\sin^2 A + (b - c\cos A)^2$$

$$= c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc\cos A = c^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc\cos A$$

$$\longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

ج) اگر در مثلث $A\hat{B}C$، $\hat{A} = 90^\circ$ باشد، در اینصورت $\cos A = 0$ پس طبق فیثاغورث داریم: $a^2 = b^2 + c^2$ پس قضیه برقرار است.

— دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌ها $60km$ بر ساعت و $100km$ بر ساعت و با زاویه 120 درجه از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق، در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟



$$O\hat{A}B: AB^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \cos 120^\circ \longrightarrow AB = 70\ km$$

— در مثلث $A\hat{B}C$ اگر $a = 5$، $b^2 + c^2 = 25 + 40\sqrt{3}$، $\hat{A} = 30^\circ$ باشد، مساحت مثلث $A\hat{B}C$ را بدست آورید.

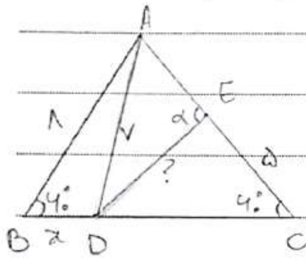
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 30^\circ \longrightarrow 25 = 25 + 40\sqrt{3} - 2bc \times \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow 40\sqrt{3} = bc\sqrt{3} \longrightarrow bc = 40$$

$$S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2} bc \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 40 \times \frac{1}{2} = 10$$

subject:
Year: Month: Date:

— در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع هشت واحد، نقطه‌ی D که به فاصله هفت واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟

(CD>BD) نقطه E که به فاصله پنج واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه $A\hat{E}D$ چند درجه است؟



$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.BD.\cos\hat{B}$

$49 = 64 + x^2 - 8x \longrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \checkmark & (CD>BD) \\ x = 5 \times \end{cases}$

$(EC = CD = 5 , \hat{C} = 60^\circ) \longrightarrow D\hat{E}C$ متساوی الاضلاع $\longrightarrow \boxed{DE = 5} , \hat{E}_1 = 60^\circ \longrightarrow \boxed{\alpha = 120^\circ}$

— یک کشتی از یک نقطه با سرعت 60km بر ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 45° انحراف به راست، با سرعت 40km بر ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \longrightarrow a^2 = (60)^2 + (20)^2 - 2\times 60\times 20\times \underbrace{\cos 135^\circ}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

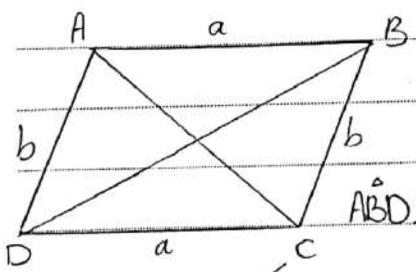
$\longrightarrow a^2 = 3600 + 400 + 1200\sqrt{2} = 400\times(10 + 3\sqrt{2}) \longrightarrow a = 20\sqrt{10 + 3\sqrt{2}}$

— در مثلث $A\hat{B}C$، بین ضلع‌ها رابطه $2bc = \sqrt{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ برقرار است. اندازه زاویه A چند درجه است؟

$2bc = \sqrt{2}(b^2 + c^2 - a^2) \xrightarrow{\div\sqrt{2}} \sqrt{2}bc = b^2 + c^2 - a^2 \longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc$

رابطه کسینوس‌ها، $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \longrightarrow \cos\hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \hat{A} = 45^\circ$

— ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، مجموع مربع‌های دو قطر، مساوی مجموع مربع‌های اضلاع است:



$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \longrightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} \longrightarrow \cos\hat{A} = -\cos\hat{B}$ (1)

$A\hat{B}D \xrightarrow{\text{کسینوس‌ها}} BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{A}$

$A\hat{B}C \xrightarrow{\text{کسینوس‌ها}} AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{B} \xrightarrow{(1)} AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\hat{A}$

$\longrightarrow AC^2 + BD^2 = 2\times(a^2 + b^2)$

subject:

Year: Month: Date:

ـ به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید، در مثلث $A\hat{B}C$:

الف) $\hat{A}>90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2>b^2+c^2$

ب) $\hat{A}<90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2<b^2+c^2$

ج) $\hat{A}=90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2=b^2+c^2$

الف) $\hat{A}>90^\circ \xrightarrow[0<\hat{A}<180^\circ]{90^\circ<\hat{A}<180^\circ} \cos\hat{A}<0 \longleftrightarrow -2ab\cos\hat{A}>0 \longleftrightarrow b^2+c^2-2ab\cos\hat{A}>b^2+c^2$

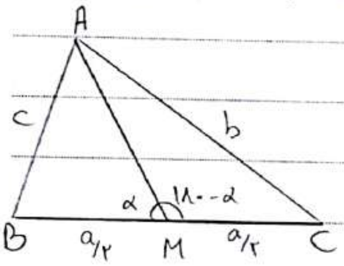
$\xleftrightarrow{\text{قضیه کسینوس ها}} a^2>b^2+c^2$

ب) $\hat{A}<90^\circ \xrightarrow[0<\hat{A}<180^\circ]{0<\hat{A}<90^\circ} \cos\hat{A}>0 \longleftrightarrow -2ab\cos\hat{A}<0 \longleftrightarrow b^2+c^2-2ab\cos\hat{A}<b^2+c^2$

$\xleftrightarrow{\text{قضیه کسینوس ها}} a^2<b^2+c^2$

ج) $\hat{A}=90^\circ \xleftrightarrow[0<\hat{A}<180^\circ]{} \cos\hat{A}=0 \longleftrightarrow -2ab\cos\hat{A}=0 \longleftrightarrow b^2+c^2-2ab\cos\hat{A}=b^2+c^2 \xleftrightarrow[\text{قضیه کسینوس ها}]{} a^2=b^2+c^2$

قضیه میانه ها: در مثلث $A\hat{B}C$ اگر $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ و اندازه میانه AM برابر m_a باشد، ثابت کنید: $b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$



$A\hat{B}M \xrightarrow{\text{قضیه کسینوس ها}} c^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}-2m_a\times\frac{a}{2}\cos\alpha$ (1)

$A\hat{M}C \xrightarrow{\text{قضیه کسینوس ها}} b^2=m_a^2+\frac{a^2}{4}-2m_a\times\frac{a}{2}\cos(180^\circ-\alpha)=m_a^2+\frac{a^2}{4}+2m_a\times\frac{a}{2}\cos\alpha$ (2)

(1)+(2) $\longrightarrow b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$

ـ در مثلث $A\hat{B}C$، اگر m_a ، m_b ، m_c اندازه میانه ها باشند، ثابت کنید: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

$m_a^2=\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$, $m_b^2=\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$, $m_c^2=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$

$\rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

SAMEN

subject:

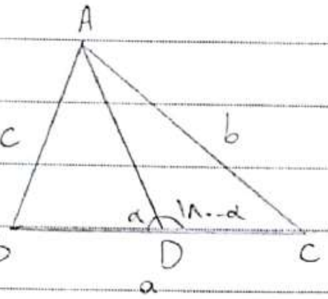
Year: Month: Date:

۱۱- در مثلث $\hat{ABC}$ ، $a=\sqrt{6}$ ، $b=2$ ، $m_c=\frac{\sqrt{10}}{2}$ است. مساحت این مثلث را بدست آورید.

$a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2} \to 6+4=2\times\frac{10}{4}+\frac{c^2}{2} \to c^2=10 \to a^2+b^2=c^2$

← مثلث $\hat{ABC}$ قائم الزاویه است ← $S_{\hat{ABC}}=\frac{2\times\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

- اگر نقطه دلخواه D، روی ضلع BC از مثلث $\hat{ABC}$ قرار داشته باشد، آنگاه: $b^2.BD+c^2.DC=AD^2.a+BD.DC.a$



$A\hat{B}D: c^2=AD^2+BD^2-2AD.BD\cos\alpha$

$\xrightarrow{\times DC} c^2.DC=AD^2.DC+BD^2.DC-2AD.BD.DC\cos\alpha$ ①

$A\hat{D}C: b^2=AD^2+DC^2-2AD.DC\cos(180-\alpha) \xrightarrow{\times BD} b^2.BD=AD^2.BD+DC^2.BD+2AD.DC.BD.\cos\alpha$ ②

① + ② $\to b^2.BD+c^2.DC=\underline{AD^2.DC}+\underline{AD^2.BD}+\underline{BD^2.DC}+\underline{BD.DC^2}$

$=AD^2(DC+BD)+BD.DC(BD+DC)=AD^2.a+BD.DC.a$

«تست های روابط طولی در مثلث»

۱۲) گزینه ۱ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta \to (\sqrt{2-\sqrt{2}})^2=x^2+x^2-2x.x.\cos135°$

$\to 2-\sqrt{2}=2x^2+\sqrt{2}x^2 \to 2-\sqrt{2}=x^2(2+\sqrt{2}) \to x^2=2 \to x=\sqrt{2}$

۱۳) گزینه ۲ $AB^2<BC^2+AC^2 \to \hat{C}<90° \to$ مرکز دایره محیطی مثلث، درون مثلث قرار دارد.

۱۴) گزینه ۲ $S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A} \to 10\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin\hat{A} \to \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\to \cos\hat{A}=\frac{1}{2} \to a^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\frac{1}{2}=49 \to a=7 \to$ محیط مثلث $=5+7+8=20$

۱۵) گزینه ۳ $(a+b+c)(a+b-c)=3ab \to (a+b)^2-c^2=3ab \to a^2+b^2+2ab-c^2=3ab$

SAMEN $\to c^2=a^2+b^2-ab \to \cos\hat{C}=\frac{1}{2} \to \hat{C}=60°$

subject:
Year: Month: Date:

۱۶) گزینه ۴

$AB^2 = 2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos150° = 4+4-8\times(-\frac{\sqrt3}{2}) = 8+4\sqrt3$

$\to AB=\sqrt{8+4\sqrt3}=\sqrt{6+4\sqrt3+2}=\sqrt{(\sqrt6+\sqrt2)^2}=\sqrt6+\sqrt2$

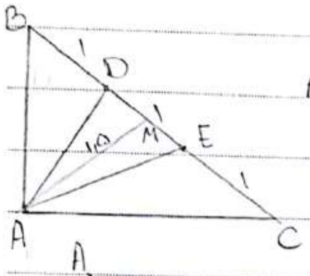
۱۷) گزینه ۲

$\hat A+\hat C=180° \to \hat A=180°-\hat C \to \cos\hat A=-\cos\hat C$

$A\hat BD:\ 7^2=6^2+5^2-2\times6\times5\times\cos\hat A \to \cos\hat A=\frac15 \to \cos\hat C=-\frac15$

$C\hat BD:\ 7^2=4^2+x^2-2\times4\times x\times(-\frac15) \to x^2+\frac85x-33=0 \to x=5$

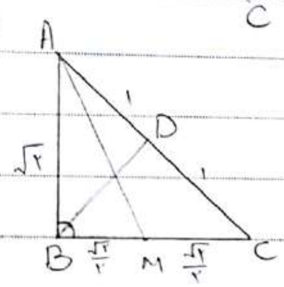
۱۸) گزینه ۲



$AD^2+AE^2=2AM^2+\frac{DE^2}{2} \to AD^2+AE^2=2\times(\frac32)^2+\frac12$

$\to AD^2+AE^2=\frac92+\frac12=\frac{10}{2}=5$

۱۹) گزینه ۳



$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2} \to 2+4=2AM^2+\frac22$

$\to AM^2=\frac52 \to AM=\sqrt{\frac52} \to \frac{AM}{BD}=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

۲۰) گزینه ۴

$AB^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos135°=4+4+4\sqrt2=8+4\sqrt2$, $AB=BC$, $\hat B=90°$

$\to S_{\triangle ABC}=\frac12\times AB\times BC=\frac12AB^2=\frac12\times(8+4\sqrt2)=4+2\sqrt2$

۲۱) گزینه ۳

$BC^2>AC^2+AB^2 \to \hat A>90° \to$ محل برخورد ارتفاع های مثلث خارج مثلث است

۲۲) گزینه ۳

$a^2=(2)^2+(4)^2-2\times2\times4\times\cos60°=12$, $b^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos120°=28 \to \frac ba=\sqrt{\frac73}$

۲۳) گزینه ۳

$A\hat BD:\ AD^2=AB^2+BD^2 \to BD=\sqrt{15} \to \cos\hat D_1=\frac{\sqrt{15}}{4} \to \sin\hat D_1=\frac14$

$\to \cos\hat C=-\sin\hat D_1=-\frac14 \to (\sqrt{15})^2=1^2+x^2-2\times1\times x\times(-\frac14) \to 15=1+x^2+\frac x2$

$\to x^2+\frac x2-14=0 \to x=3/5$

SAMEN

۲۴) گزینه‌ی ۴ $\quad a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=\frac{4}{3}\times(16+25+49)=\frac{4}{3}\times 90=120$

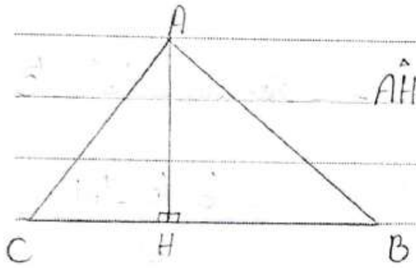
۲۵) گزینه‌ی ۲ $\quad (\sqrt{80})^2+x^2=2\times(3^2+7^2)\longrightarrow x^2=116-80=36\longrightarrow x=6$

۲۶) گزینه‌ی ۳ $\quad 5^2=3^2+6^2-2\times3\times6\times\cos\hat{B}\longrightarrow\cos\hat{B}=\frac{5}{9}$

$$\frac{3}{\sin\hat{C}}=\frac{5}{\sin\hat{B}}\longrightarrow\frac{\sin 2\hat{B}}{\sin\hat{C}}=\frac{2\sin\hat{B}\cos\hat{B}}{\frac{3}{5}\sin\hat{B}}=\frac{10}{3}\times\cos\hat{B}=\frac{10}{3}\times\frac{5}{9}=\frac{50}{27}$$

۲۷) گزینه‌ی ۴ $\quad 2=5+5-2\times5\cos\hat{\theta}\longrightarrow\cos\hat{\theta}=\frac{4}{5}\longrightarrow\sin\hat{\theta}=\frac{3}{5}$

۲۸) گزینه‌ی ۴



$A\hat{H}C:\ \sin\hat{C}=\frac{AH}{b}\longrightarrow b\sin\hat{C}=AH$

$A\hat{H}C:\ \cos\hat{C}=\frac{CH}{b}\longrightarrow b\cos\hat{C}=CH\longrightarrow a-b\cos\hat{C}=BH$

$$\longrightarrow\frac{b\sin C}{a-b\cos C}=\frac{AH}{BH}=\tan\hat{B}$$

۲۹) گزینه‌ی ۱ $\quad 28=(2x)^2+x^2-2\times2x\times x\times\cos120^\circ\longrightarrow 28=7x^2\longrightarrow x=2\longrightarrow v=\frac{2}{4}=0/5\ m/s$

۳۰) گزینه‌ی ۳ $\quad y^2=x^2+x^2-2x^2\cos135^\circ=2x^2+\sqrt{2}x^2\longrightarrow y=x\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$t=\frac{\sqrt{2}}{2}x\longrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}x+x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2}x+x=x(1+\sqrt{2})\longrightarrow\frac{y}{z}=\frac{x\sqrt{2+\sqrt{2}}}{x(1+\sqrt{2})}$$

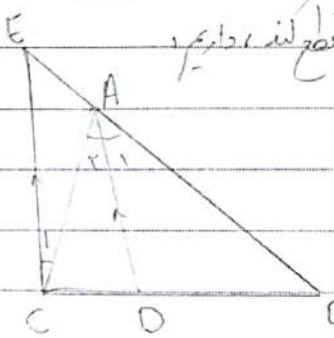
$$\longrightarrow\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2+\sqrt{2}})(\sqrt{2}-1)$$

• قضیه نیمسازهای زوایای داخلی:

در هر مثلث نیمساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ $\qquad$ حکم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

اثبات: از رأس C خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند، داریم:



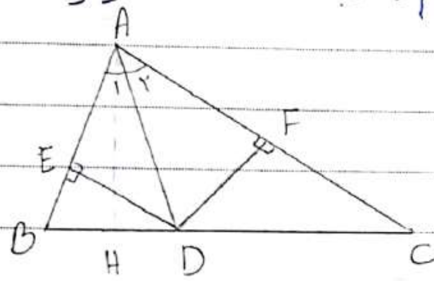
$AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_2 = \hat{C}_1$

$AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } BE} \hat{A}_1 = \hat{E}$ $\longrightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \longrightarrow AE = AC$ (1)

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$B\hat{E}C: \; AD \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{(1)} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

- در شکل مقابل، AD نیمساز است. از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کرده و به کمک مساحت، قضیه نیمسازهای زوایای داخلی را اثبات کنید.



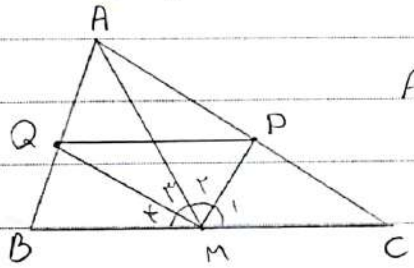
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{بنابر قضیه‌ای}} DE = DF$ (1)

$\frac{S_{A\hat{B}D}}{S_{A\hat{D}C}} = \frac{\frac{1}{2} DE \times AB}{\frac{1}{2} DF \times AC} = \frac{AB}{AC}$ (2)

$\frac{S_{A\hat{B}D}}{S_{A\hat{D}C}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BD}{\frac{1}{2} AH \times DC} = \frac{BD}{DC}$ (3)

$(2), (3) \longrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای $A\hat{M}C$ و $A\hat{M}B$ هستند، ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

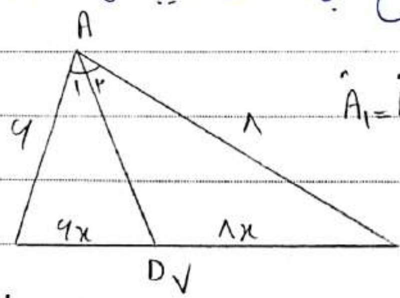


$A\hat{M}C: \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC}$

$A\hat{M}B: \hat{M}_3 = \hat{M}_4 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB}$ $\longrightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$

M وسط BC $\longrightarrow CM = BM$

- اندازه سه ضلع مثلثی ۶، ۷، ۸ واحد است، نیمساز زاویه متوسط، روی ضلع مقابل آن دو قطعه ایجاد می‌کند. طول این قطعات را بدست آورید.



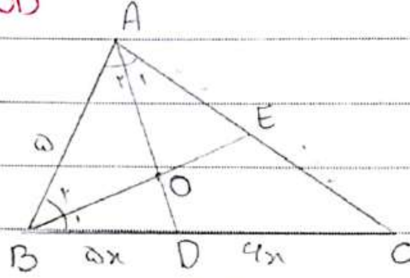
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \longrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \longrightarrow \frac{BD}{7 - BD} = \frac{3}{4} \longrightarrow BD = 3$

$CD = 4$

روش تستی: $14x = 7 \longrightarrow x = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} BD = \frac{6}{2} = 3 \\ CD = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$

subject:
Year: Month: Date:

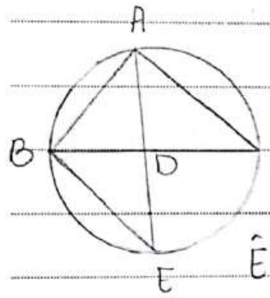
- نیمساز AD از مثلث ABC، نیمساز BE را در نقطه O قطع می‌کند. اگر $AB=۵$ ، $AC=۶$ ، $BC=۷$ باشد، نسبت $\frac{OA}{OD}$ را بدست آورید.



$\hat{ABC}, \hat{A}_1=\hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} ۵x+۶x=۷ \to x=\frac{۷}{۱۱} \to BD=\frac{۳۵}{۱۱}$

$\hat{ABD}: \hat{B}_1=\hat{B}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AO}{OD}=\frac{AB}{BD}=\frac{۵}{\frac{۳۵}{۱۱}}=\frac{۵۵}{۳۵}=\frac{۱۱}{۷}$

«قضیه محاسبه طول نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث»: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



اثبات: نیم ساز AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث ABC را در E قطع کند. از E به B وصل می‌کنیم.

داریم:

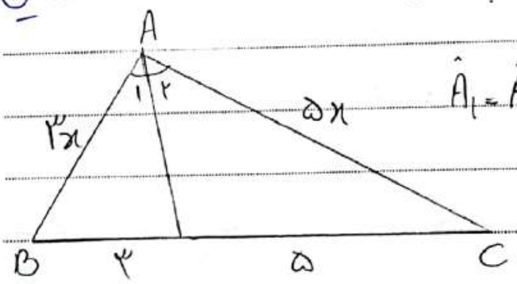
$\left.\begin{array}{l}\hat{E}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \hat{ADC} \sim \hat{ABE} \to \frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AE}$

روابط طولی دایره: $AD.DE=BD.DC$

$AD.AE=AB.AC \to AD(AD+DE)=AB.AC \to AD^۲=AB.AC-AD.DE$

$\to AD^۲=AB\times AC-BD\times DC$

- محیط مثلثی ۲۴ و اندازه پاره خط هایی که نیمساز یکی از زاویه های داخلی، بر ضلع مقابل آن ایجاد کرده است ۳ و ۵ است. طول این نیمساز را بدست آورید.

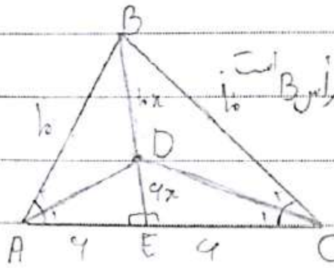


$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} ۳x+۵x+۳+۵=۲۴$

$\to ۸x=۱۶ \to x=۲ \to \begin{cases} AB=۲\times ۳=۶\\ AC=۲\times ۵=۱۰\end{cases}$

$AD^۲=AB\times AC-BD\times DC=۶\times ۱۰-۳\times ۵=۴۵ \to AD=۳\sqrt{۵}$

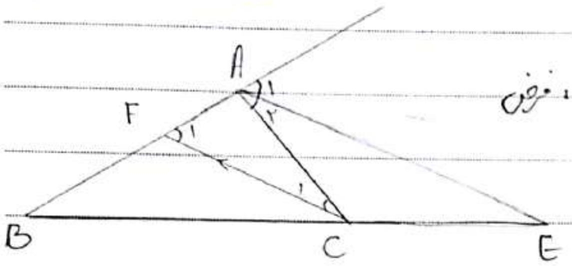
— در مثلث متساوی‌الساقین $A\hat{B}C$ ، $AB = BC = 10$ و $AC = 12$ نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی A و C یکدیگر را در نقطه D قطع کرده‌اند. طول BD را بدست آورید. چون نیمسازهای داخلی مثلث همرس اند، پس BE نیمساز زاویه B است.



$AB = BC \xrightarrow{\text{نیمساز = میانه = ارتفاع}} \hat{E} = 90^\circ \longrightarrow BE = \sqrt{100-36} = 8$

$A\hat{B}E$ ، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} 6x + 10x = 8 \longrightarrow x = \frac{1}{2} \longrightarrow BD = 10x = \frac{10}{2} = 5$

« قضیه نیمسازهای زوایای خارجی: فرض کنید در مثلث $A\hat{B}C$ ، نیمساز زاویه خارجی $\hat{A}$ ، امتداد BC را در E قطع کند، در اینصورت داریم:



فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$

از C خطی به موازات AE رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند، داریم:

$FC \parallel AE \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_2 = \hat{C}_1$

$FC \parallel AE \xrightarrow{\text{مورب } BA} \hat{A}_1 = \hat{F}_1 \longrightarrow \hat{C}_1 = \hat{F}_1 \longrightarrow AF = AC$ (1)

فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

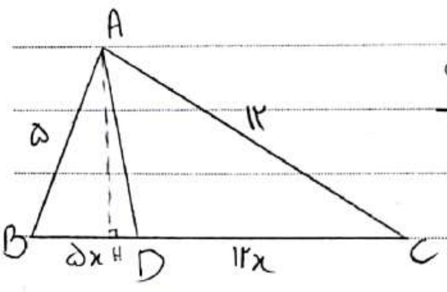
$B\hat{A}E$: $CF \parallel AE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AF} = \frac{BE}{CE} \xrightarrow{(1)} \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$

« نکته » در قضیه قبل طول نیمساز AE از رابطه زیر بدست می‌آید.

$AE^2 = BE.CE - AB.AC$

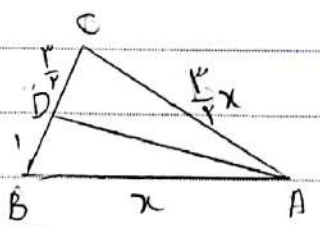
« تست های روابط طولی در مثلث »

۳۱) گزینه ۲



$$\frac{S_{A\hat{B}D}}{S_{A\hat{B}C}} = \frac{BD}{BC} = \frac{5x}{5x+12x} = \frac{5x}{17x} = \frac{5}{17}$$

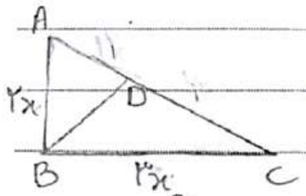
۳۲) گزینه ۲



$$\frac{3}{2} + 1 = 2x \longrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\longrightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{1}{x} = \frac{4}{5}$$

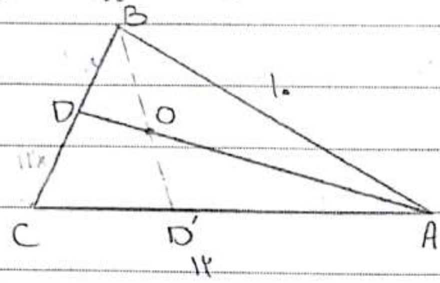
۳۳) گزینه‌ی ۲



$$\frac{2x \times 3x}{2} = 27 \longrightarrow x = 3$$

$$\longrightarrow AC = \sqrt{(2x)^2 + (3x)^2} = x\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$$

۳۴) گزینه‌ی ۲

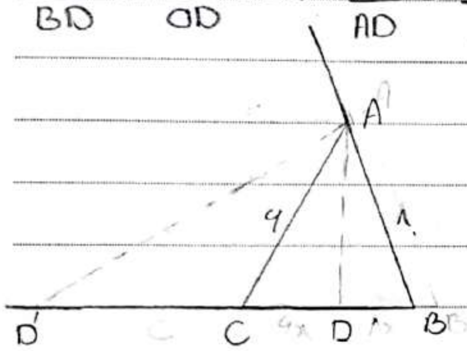


$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \quad BC = 8$$

$$\longrightarrow BD = \frac{40}{11}, \quad CD = \frac{48}{11}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AO}{OD} \longrightarrow \frac{AO}{AD} = \frac{AB}{AB+BD} = \frac{10}{10+\frac{40}{11}} = \frac{10}{\frac{150}{11}} \longrightarrow \frac{S_{B\hat{A}O}}{S_{B\hat{A}D}} = \frac{11}{15}$$

۳۵) گزینه‌ی ۳



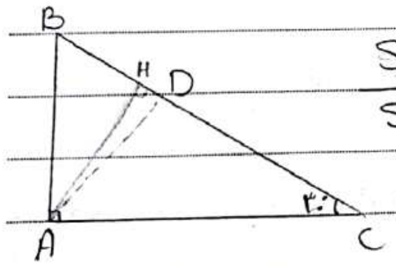
$$\frac{BD}{CD} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \quad BC = 5$$

$$\longrightarrow BD = \frac{20}{7}, \quad CD = \frac{15}{7}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD'}{CD'} \longrightarrow \frac{BD'}{CD'} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \longrightarrow \frac{\overset{5}{BC}}{CD'} = \frac{1}{3}$$

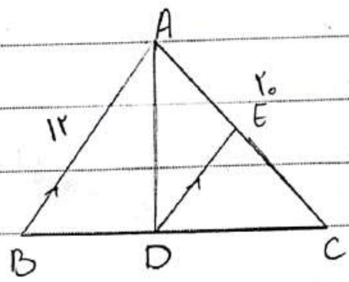
$$\longrightarrow CD' = 15 \longrightarrow DD' = 15 + \frac{15}{7} = \frac{120}{7}$$

۳۶) گزینه‌ی ۱



$$\frac{S_{A\hat{B}D}}{S_{A\hat{C}D}} = \frac{AB}{AC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

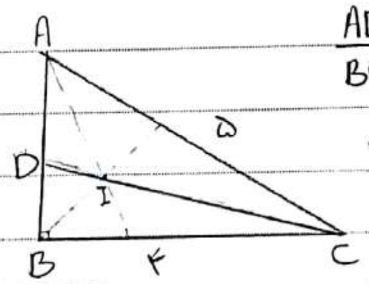
۳۷) گزینه‌ی ۲



$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \longrightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{5}{8}$$

$$ED \parallel AB \longrightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{CD}{BC} \longrightarrow \frac{CE}{20} = \frac{5}{8} \longrightarrow CE = 12{,}5$$

۳۸) گزینه‌ی ۳



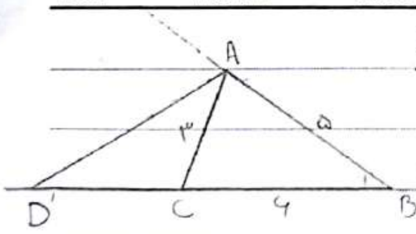
$$\frac{AD}{BD} = \frac{5}{4} \longrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{5}{9} \longrightarrow AD = \frac{5}{3}, \quad BD = \frac{4}{3}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}, \quad \frac{CI}{DI} = \frac{AC}{AD} \longrightarrow \frac{CI}{CD} = \frac{AC}{AD+AC}$$

$$\longrightarrow \frac{CI}{\frac{4\sqrt{10}}{3}} = \frac{5}{\frac{20}{3}} \longrightarrow CI = \sqrt{10}$$

subject:

Year: Month: Date:

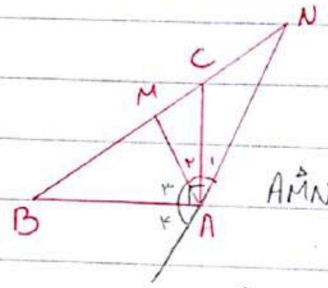


۳۹) گزینهٔ ۲

$$\frac{S_{A\hat{B}D'}}{S_{A\hat{C}D'}} = \frac{BD'}{CD'} = \frac{5}{3} \longrightarrow \frac{CD'}{BD'} = \frac{3}{5}$$

$$\longrightarrow \frac{BC}{BD'} = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{BD'}{BC} = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{S_{A\hat{B}D'}}{S_{A\hat{B}C}} = \frac{3}{2}$$

— در شکل مقابل، مثلث $A\hat{B}C$ قائم‌الزاویه است. $(\hat{A}=90^\circ)$ اگر $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $BC=12$، $NC=10$، طول MC را بدست آورید.



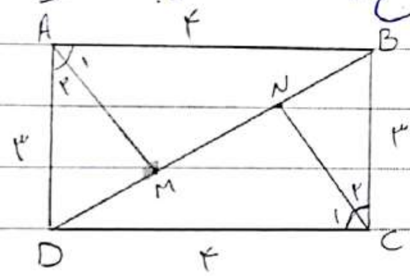
نکته: در هر مثلث نیمسازهای خارجی و داخلی هر مثلث بر هم عمودند.

$$A\hat{M}N:\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 \longrightarrow \frac{MC}{CN} = \frac{AM}{AN} \quad (1)$$

$$C\hat{A}B = 90^\circ \xrightarrow{\text{نکته}} \text{نیمساز خارجی } AB,\ A\hat{M}N:\ \hat{A}_3=\hat{A}_4 \xrightarrow{\text{قضیه}} \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN} \quad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow \frac{MC}{CN} = \frac{BM}{BN} \longrightarrow \frac{MC}{10} = \frac{12-MC}{12+10} \longrightarrow \boxed{MC = \frac{15}{4}}$$

— در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل، قطر مستطیل را در M و N قطع می‌کند. اندازه MN را بدست آورید.

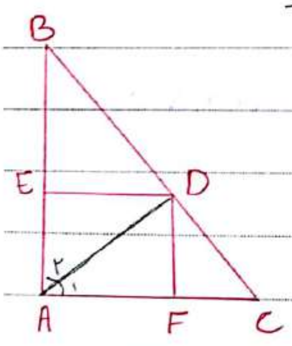


$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{BM}{DM} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{3} \longrightarrow \begin{cases} BM = 4x \\ DM = 3x \end{cases}$$

$$\hat{C}_1=\hat{C}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{BN}{DN} = \frac{BC}{CD} = \frac{3}{4} \longrightarrow \begin{cases} BN = 3x \\ DN = 4x \end{cases}$$

$$BD = 3x+4x = 5 \longrightarrow x = \frac{5}{7},\quad MN = BM - BN = 4x - 3x = x \longrightarrow MN = \frac{5}{7}$$

— در شکل مقابل $AEDF$ مربع است. اگر $\frac{BD}{DC} = 3$ باشد، نسبت $\frac{AB}{AC}$ را بدست آورید.



قطر AD را رسم می‌کنیم. در مربع، قطر نیمساز زاویه‌هاست، پس:

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = 3$$

subject:
Year: Month: Date:

قضیه هرون: محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث.

اگر در مثلث $A\hat{B}C$، $BC=a$ ، $AB=c$ و $AC=b$ باشد، مساحت مثلث از رابطه زیر بدست می آید:

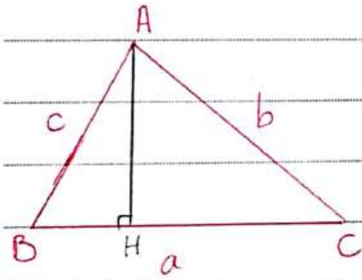
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad p=\frac{a+b+c}{2} \ \text{(نصف محیط)}$$

- مساحت مثلثی با اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را به کمک دستور هرون بدست آورده و طول سه ارتفاع را محاسبه کنید.

$$p=\frac{13+14+15}{2}=21 \longrightarrow S=\sqrt{21\times 8\times 7\times 6}=7\times 3\times 4=84$$

$$84=\frac{13\times h_a}{2} \longrightarrow h_a=\frac{84\times 2}{13} \ , \ h_b=\frac{84\times 2}{14}=12 \ , \ h_c=\frac{84\times 2}{15}=\frac{56}{5}=11.2$$

قضیه: مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصل ضرب اندازه هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آن ها است.

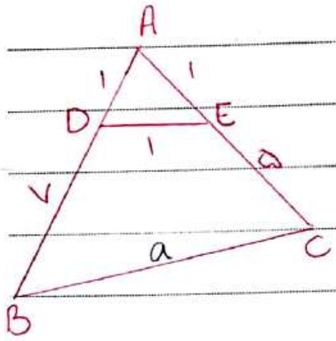


$$S_{A\hat{B}C}=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم. $A\hat{B}H: \sin\hat{B}=\frac{AH}{c} \longrightarrow AH=c\sin\hat{B}$ ①

$$S_{A\hat{B}C}=\frac{1}{2}AH\times a \overset{①}{=} \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$$

- در شکل مقابل، طول ضلع BC و مساحت چهارضلعی DECB را بدست آورید.



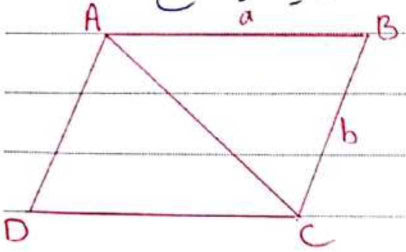
$$AD=DE=AE=1 \longrightarrow \hat{A}=60^\circ$$

$$A\hat{B}C: a^2=6^2+8^2-2\times 6\times 8\times \cos 60^\circ=52 \longrightarrow a=2\sqrt{13}$$

$$S_{DECB}=S_{A\hat{B}C}-S_{A\hat{D}E}=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times \sin 60^\circ-\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 60^\circ=12\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{47\sqrt{3}}{4}$$

subject:
Year: Month: Date:

ـ ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع، برابر حاصل ضرب اندازه های دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین این دو ضلع است.



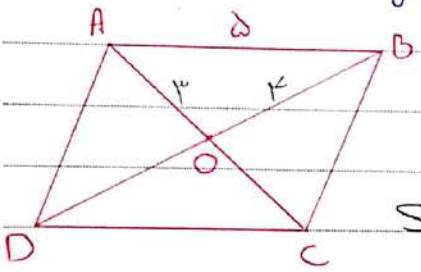
$$S_{ABCD} = ab\sin\hat{B}$$

قطر AC را رسم می‌کنیم تا متوازی الاضلاع را به دو مثلث هم نهشت تقسیم کند.

$$S_{ABCD} = 2S_{A\hat{B}C} = 2\times\frac{1}{2}ab\sin\hat{B} = ab\sin\hat{B}$$

ـ در متوازی الاضلاع ABCD اگر $AB=5$, $AC=6$, $BD=8$ باشد، مساحت این متوازی الاضلاع را بدست آورید.

نکته: در متوازی الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند و آن را به چهار مثلث هم مساحت تبدیل می‌کنند.

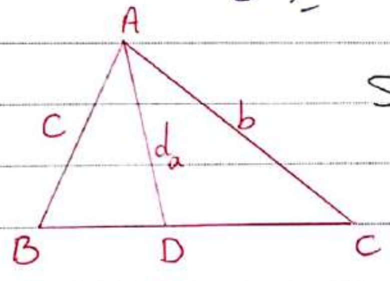


$$P = \frac{3+4+5}{2} = 6 \longrightarrow S_{O\hat{A}B} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)} = 6$$

$$S_{ABCD} = 4S_{O\hat{A}B} = 4\times 6 = 24$$

*ـ در مثلث $A\hat{B}C$، a و b و c طول سه ضلع مثلث هستند و d_a طول نیمساز نظیر رأس A است.

ثابت کنید: $d_a = \dfrac{2bc\cos\frac{\hat{A}}{2}}{b+c}$



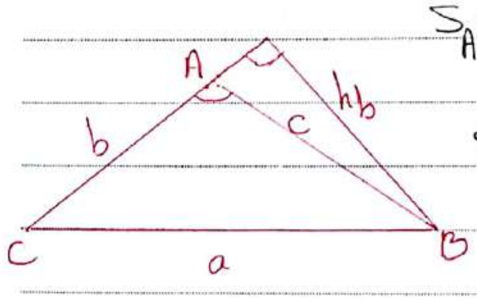
$$S_{A\hat{B}C} = S_{A\hat{B}D} + S_{A\hat{D}C}$$

$$\frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}cd_a\sin\frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2}bd_a\sin\frac{\hat{A}}{2}$$

$$bc\times 2\sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2} = d_a\sin\frac{\hat{A}}{2}(b+c) \longrightarrow d_a = \frac{2bc\cos\frac{\hat{A}}{2}}{b+c}$$

ـ در مثلث $A\hat{B}C$، زاویه $\hat{A}$ منفرجه است، اگر $b=h_b$, $ac=2b^2$ اندازه زاویه $\hat{B}$ را بدست آورید.

$$S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}\times 2b^2\times\sin\hat{B} = b^2\sin\hat{B} \quad (1)$$



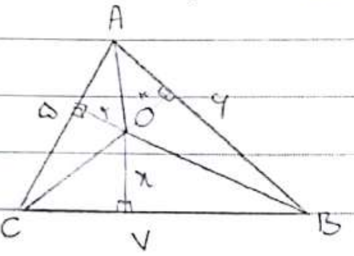
$$S_{A\hat{B}C} = \frac{1}{2}h_b\times b = \frac{1}{2}b^2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \longrightarrow b^2\sin\hat{B} = \frac{1}{2}b^2 \longrightarrow \sin\hat{B} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases}\hat{B} = 30^\circ \checkmark \\ \hat{B} = 150^\circ \times\end{cases}$$

subject:

Year: Month: Date:

در مثلث $\hat{ABC}$ به اضلاع ۵، ۶، ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول های ۵، ۶ به فاصله ۲ و ۳ سانتی‌متر است، از ضلع بزرگتر چه فاصله‌ای دارد؟ از O به رئوس مثلث وصل می‌کنیم.



$$p=\frac{5+6+7}{2}=9 \longrightarrow S_{\hat{ABC}}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$$

$$S_{\hat{ABC}}=S_{\hat{AOB}}+S_{\hat{AOC}}+S_{\hat{BOC}} \longrightarrow 6\sqrt{6}=\frac{6\times 3}{2}+\frac{5\times 2}{2}+\frac{7x}{2}$$

$$\longrightarrow 12\sqrt{6}=18+10+7x \longrightarrow x=\frac{12\sqrt{6}}{7}-4$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{ABC}$ که $\hat{A}=90^\circ$ اگر p نصف محیط مثلث و S مساحت مثلث باشد، ثابت کنید:

$$S=p(p-a)=(p-b)(p-c)$$

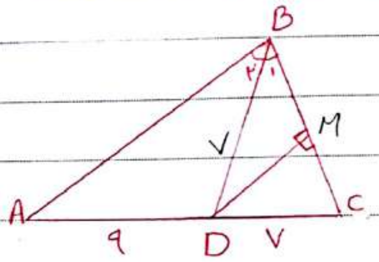
$$p(p-a)=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)=\frac{(b+c+a)}{2}\times\frac{(b+c-a)}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}$$

$$=\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4}=\frac{bc}{2}=S \qquad (a^2)$$

رابطه هرون: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{S(p-b)(p-c)} \longrightarrow S^2=S(p-b)(p-c)$

$$\longrightarrow S=(p-b)(p-c)$$

* در مثلث $\hat{ABC}$ عمودمنصف BC ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند و BD زاویه $\hat{ABC}$ را نصف می‌کند. اگر AD=۹ و DC=۷ مساحت مثلث ABD را بدست آورید.



DM عمودمنصف BC $\longrightarrow BD=CD=7$

$$\hat{B}_1=\hat{B}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC} \longrightarrow AB=9x\,,\ BC=7x$$

$$\hat{B}_1=\hat{B}_2 \xrightarrow{\text{طول نیمساز}} BD^2=AB\times BC-AD\times DC \longrightarrow 49=9x\cdot 7x-9\times 7 \longrightarrow 63x^2=112$$

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

$x^2 = \frac{112}{63} = \frac{16}{9} \longrightarrow x = \frac{4}{3} \longrightarrow AB = 9x = \frac{9 \times 4}{3} = 12$

$\hat{ABD} : P = \frac{12+7+9}{2} = 14 \longrightarrow S_{\hat{ABD}} = \sqrt{14(14-12)(14-9)(14-7)} = 14\sqrt{5}$

- در شکل مقابل $\hat{C} = 120^\circ$ و $AC = 3$, $BC = 6$ اگر CD نیم‌ساز زاویه C باشد، اندازه CD را بدست آورید.

$CD = d_c = \frac{2ab\cos\frac{\hat{C}}{2}}{a+b} = \frac{2 \times 3 \times 6 \times \cos\frac{120^\circ}{2}}{3+6} = \frac{18}{9} = 2$ بافرمول:

بدون فرمول: $S_{\hat{ABC}} = S_{\hat{ACD}} + S_{\hat{DCB}} \longrightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times d_c \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 6 \times d_c \times \sin 60^\circ$

$\longrightarrow 18 = 3d_c + 6d_c = 9d_c \longrightarrow d_c = 2$

SAMEN