



برنامه ثانیه



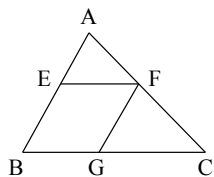
Kia-ac.ir



@Kia_ac



در شکل زیر چهارضلعی $EFGB$ متوازی الاضلاع است. اگر مساحت مثلث AEF را S_1 و مساحت مثلث FGC را S_2 بنامیم، مساحت متوازی الاضلاع $EFGB$ کدام است؟

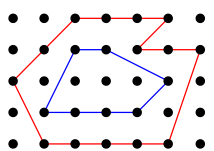


$(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ (۲)
 $2\sqrt{S_1 S_2}$ (۴)

$S_1 + S_2$ (۱)
 $\sqrt{S_1 S_2}$ (۳)

۱

در شکل زیر مساحت بین دو چندضلعی شبکه‌ای، چه کسری از مساحت چندضلعی بزرگ‌تر است؟



$\frac{23}{36}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{25}{36}$ (۲)

$\frac{5}{9}$ (۱)

۲

دو نقطه A و B به فاصله $3a + 7$ واحد از هم قرار دارند. اگر فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از هر کدام از دو نقطه A و B به فاصله $2a + 2$ باشد، مقدار a کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۳

در مثلث ABC ($\hat{C} = 20^\circ$)، عمود منصف ضلع BC ، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند. اندازه زاویه $\hat{ADB}$ کدام است؟ ($\hat{B} > \hat{C}$)

40° (۴)

30° (۳)

20° (۲)

10° (۱)

۴

به مرکز O واقع بر خط d ، کمانی به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه A قطع کند. سپس به مرکز A و همان شعاع قبلی کمان دیگری رسم می‌کنیم تا کمان قبلی را در نقطه B قطع کند. زاویه $\hat{AOB}$ چند درجه است؟

60° (۴)

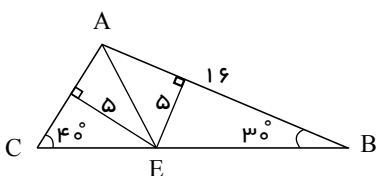
45° (۳)

30° (۲)

$22,5^\circ$ (۱)

۵

در شکل زیر، اندازه زاویه $\hat{CAE}$ کدام است؟



45° (۲)

40° (۱)

55° (۴)

50° (۳)

۶

اگر O نقطه هم‌رسمی عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC باشد و داشته باشیم $OA = x + 2$ ، $OB = 3x - 4$ و $OC = y + 2$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۷

اگر با رسم چند مثلث مختلف و اندازه‌گیری مجموع زوایای داخلی آن‌ها به این نتیجه برسیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است، از چه استدلالی استفاده کرده‌ایم؟

محاسباتی (۴)

استقرایی (۳)

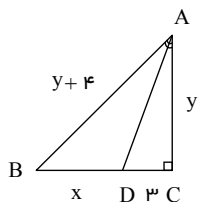
شهودی (۲)

استنتاجی (۱)

۸



در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه BAC است. x چند واحد است؟



- ۲ ۴
۳ ۵

- ۱ ۳
۲ ۴

۹

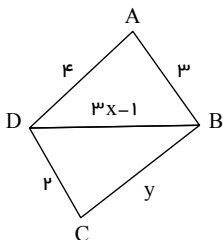
کدام گزینه می‌تواند مثال نقض برای عبارت زیر باشد؟
«در هر مثلث، هر ارتفاع از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.»

- ۲ مثلث قائم‌الزاویه
۴ عبارت فوق همواره درست است.

- ۱ مثلث متساوی‌الاضلاع
۳ مثلث متساوی‌الساقینی با یک زاویه 100°

۱۰

در شکل مقابل، حداکثر مقدار طبیعی y کدام است؟



- ۲ ۷
۴ ۹

- ۱ ۶
۳ ۸

۱۱

در مثلث ABC با مساحت ۷۵، نقطه D روی BC چنان واقع است که $BD = 3DC$ ، مساحت مثلث ABD کدام است؟

- ۴ ۳۰

- ۳ ۳۶

- ۲ ۴۰

- ۱ ۴۵

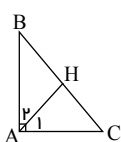
۱۲

کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ در استدلال استنتاجی از جزء به کل می‌رسیم.
۲ استدلالی که نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی است.
۳ قضیه، نتایج مهم و کاربردی است که با استدلال استقرایی بدست می‌آوریم.
۴ عکس قضیه هم مانند خود قضیه درست است.

۱۳

مطابق شکل زیر در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A}_1 \neq \hat{B}$ است. کدام گزینه همواره صحیح است؟

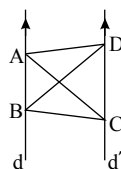


- ۲ $\hat{B} < \hat{C}$
۴ $\hat{A}\hat{H}\hat{B} = 90^\circ$

- ۱ $\hat{B} > \hat{C}$
۳ $\hat{A}\hat{H}\hat{B} \neq 90^\circ$

۱۴

دو خط d و d' با هم موازی‌اند و مساحت مثلث ABC برابر 12cm^2 است. اگر BD برابر 4cm باشد، در این صورت فاصله نقطه A از BD چند سانتی‌متر است؟



- ۲ ۴
۴ ۸

- ۱ ۲
۳ ۶

۱۵



در شکل مقابل اگر $AB \parallel CD \parallel EF$ باشد، طول DC کدام است؟

۱۶

۵ ☐ ۱

$\frac{16}{3}$ ☐ ۲

۶ ☐ ۳

$\frac{22}{3}$ ☐ ۴

در شکل مقابل محیط مثلث ABD کدام است؟

۱۷

۵۰ ☐ ۱

۵۴ ☐ ۳

۴۷ ☐ ۲

۴۵ ☐ ۴

در شکل زیر اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. مقدار $x + y$ کدام است؟

۱۸

۱۰ ☐ ۱

۱۳ ☐ ۳

۱۱٫۵ ☐ ۲

۱۳٫۵ ☐ ۴

در شکل مقابل محیط مثلث ABD کدام است؟

۱۹

۱۸ ☐ ۱

۱۵ ☐ ۳

۱۴ ☐ ۲

۱۶ ☐ ۴

در شکل مقابل $EF \parallel AB$ و $DE \parallel BC$ است. اگر $AE = 3$ ، $EC = 4$ ، مساحت مثلث EFC برابر ۲ و فاصله E از FC برابر ۱ باشد، مساحت متوازی الاضلاع $DEFB$ کدام است؟

۲۰

۳ ☐ ۱

۵ ☐ ۳

۴ ☐ ۲

۶ ☐ ۴

در شکل مقابل $\hat{A}_1 = 80^\circ$ و $\hat{D}_1 = 40^\circ$ می باشد. کدام گزینه لزوماً صحیح نیست؟

۲۱

$\hat{A}_1 > \hat{A}_r$ ☐ ۱

$\hat{B} > \hat{A}_r$ ☐ ۳

$\hat{C} > \hat{B}$ ☐ ۲

$\hat{C} > \hat{A}_r$ ☐ ۴

در شکل مقابل $S_{ABED} = 12$ و $AB = 6$ و $DE = 3$ است. طول DC کدام است؟

۲۲

$\frac{5}{2}$ ☐ ۱

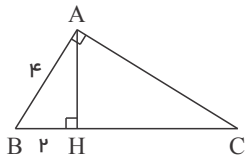
۲ ☐ ۲

$\frac{8}{3}$ ☐ ۳

۳ ☐ ۴



مثلث ABC در رأس A قائمه است. مطابق شکل، اگر $AB = 4$ و $BH = 2$ باشد، طول میانه وارد از رأس C بر ضلع AB کدام است؟



۸ ☐

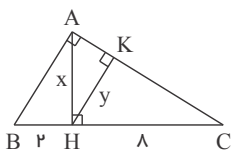
۱۰ ☐

$4\sqrt{3}$ ☐

$2\sqrt{13}$ ☐

۲۳

در شکل زیر مقدار y کدام است؟



$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ☐

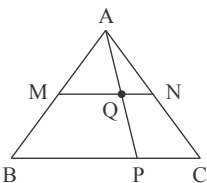
$4\sqrt{3}$ ☐

$\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ☐

$2\sqrt{3}$ ☐

۲۴

در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ، $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ و $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{2}$ می باشد. نسبت مساحت مثلث AQN به مساحت دوزنقه $MQPB$ کدام است؟



$\frac{2}{21}$ ☐

$\frac{1}{10}$ ☐

$\frac{2}{15}$ ☐

$\frac{3}{21}$ ☐

۲۵

چه تعداد از گزاره های زیر صحیح است؟

(الف) چهارضلعی ای که یک قطر آن عمودمنصف دیگری باشد، لوزی است.

(ب) متوازی الاضلاعی که قطرهای برابر دارد، مستطیل است.

(پ) متوازی الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمودند، لوزی است.

(ت) لوزی ای که یک زاویه قائمه دارد، مربع است.

۱ ☐

۲ ☐

۳ ☐

۴ ☐

۲۶

عکس کدام یک از قضیه های زیر درست نیست؟

۱ در هر دوزنقه متساوی الساقین، زاویه های مجاور به هر قاعده، هم اندازه اند.

۲ در هر دوزنقه متساوی الساقین، قطرهای مساوی یکدیگرند.

۳ در هر دوزنقه متساوی الساقین، زاویه های مقابل، مکمل هم هستند.

۴ در هر دوزنقه متساوی الساقین، زاویه های مجاور به ساقها، مکمل هم هستند.

۲۷

در متوازی الاضلاع شکل زیر، $AB = AC$ است. اندازه $\hat{A}_1$ ، چند برابر $\hat{A}_2$ است؟

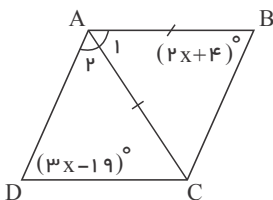
$\frac{8}{5}$ ☐

$\frac{13}{5}$ ☐

$\frac{5}{8}$ ☐

$\frac{13}{8}$ ☐

۲۸

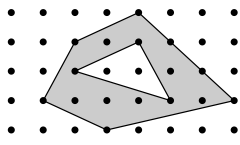


	در ذوزنقه $ABCD$، طول قاعده AB کدام است؟ ۱۰ ☐ ۱ ۱۲ ☐ ۲ ۱۳ ☐ ۳ ۱۵ ☐ ۴
زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد ۱، ۵ و ۶ متناسب هستند. اگر اندازه بزرگ‌ترین ضلع مثلث a باشد، مساحت آن کدام است؟ a^2 ☐ ۴ $\frac{1}{2}a^2$ ☐ ۳ $\frac{1}{4}a^2$ ☐ ۲ $\frac{1}{8}a^2$ ☐ ۱	
در چهارضلعی $ABCD$، وسط اضلاع AB و CD و وسط دو قطر AC و BD رئوس یک لوزی هستند. در مورد چهارضلعی $ABCD$ کدام درست است؟ $AD = BC$ ☐ ۴ $AB = CD$ ☐ ۳ متوازی‌الاضلاع است. ☐ ۲ لوزی است. ☐ ۱	
در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویه حاده 75°، طول میانه وارد بر وتر ۸ است. مساحت این مثلث کدام است؟ ۸۰ ☐ ۴ ۶۴ ☐ ۳ ۳۲ ☐ ۲ ۱۶ ☐ ۱	
سه زاویه داخلی از چندضلعی محدب 150°، 130° و 60° و سایر زاویه‌های این چندضلعی برابر 140° هستند. این چندضلعی چند قطر دارد؟ ۳۵ ☐ ۴ ۲۷ ☐ ۳ ۲۰ ☐ ۲ ۱۴ ☐ ۱	
با توجه به شکل زیر، اگر مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC = 6$) برابر ۱۵ و $MH = 2MH'$ باشد، آنگاه طول MH کدام است؟	۵ ☐ ۱ $\frac{5}{3}$ ☐ ۲ ۲٫۵ ☐ ۳ ۱۰ ☐ ۴
در شکل زیر مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟	۶۰ ☐ ۱ ۷۵ ☐ ۲ ۹۰ ☐ ۳ ۱۰۵ ☐ ۴
M، N و P وسط‌های اضلاع مثلث ABC مطابق شکل‌اند. مساحت مثلث NMC، چند برابر مساحت مثلث AGC است؟	$\frac{3}{4}$ ☐ ۱ $\frac{4}{3}$ ☐ ۲ $\frac{2}{3}$ ☐ ۳ $\frac{3}{2}$ ☐ ۴
اگر مساحت ذوزنقه $ABCD$، ۲۰۰ سانتی‌متر مربع باشد، طول AB چند سانتی‌متر است؟ ($BD = 20$)	$20 + 10\sqrt{3}$ ☐ ۱ $30 + 10\sqrt{3}$ ☐ ۲ $50 - 10\sqrt{3}$ ☐ ۳ $40 - 10\sqrt{3}$ ☐ ۴

نقاط A و B و خط d در صفحه مفروض اند. تعداد نقاطی از خط d که فاصله شان از دو نقطه A و B یکسان است، کدام نمی تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

در شکل زیر، مساحت سایه زده کدام است؟

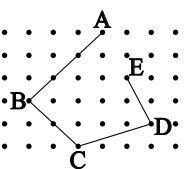


۱) $\frac{27}{2}$ ۲) $\frac{21}{2}$ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

مساحت یک چندضلعی شبکه ای، واسطه ای حسابی تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی آن است. کمترین مساحت این چندضلعی شبکه ای است؟

۱) $1/5$ ۲) $2/5$ ۳) $3/5$ ۴) $4/5$

با انتخاب رأس مناسب F و رسم شش ضلعی شبکه ای $ABCDEF$ ، کمترین مساحت ممکن برای آن کدام است؟



۱) $\frac{17}{2}$ ۲) ۹ ۳) $\frac{19}{2}$ ۴) ۱۰

کدام یک از موارد زیر، لزوماً دو خط موازی را در فضا مشخص می کند؟

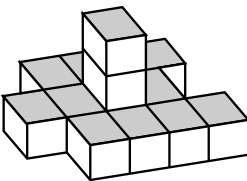
۱) دو خط عمود بر یک خط ۲) دو خط موازی با یک صفحه ۳) دو خط متناظر با یک خط ۴) دو خط عمود بر یک صفحه

چه تعداد از عبارت های زیر صحیح است؟

(الف) از هر نقطه داخل یک صفحه، بی شمار خط می گذرد.
 (ب) در صفحه از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، بی شمار خط متقاطع با آن خط می گذرد.
 (پ) در فضا از هر نقطه، بی شمار صفحه می گذرد.
 (ت) در فضا از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، تنها یک خط موازی با خط اولیه می گذرد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مجموع تعداد مربع های نماهای بالا، چپ و روبه روی جسم مقابل کدام است؟



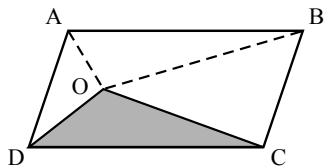
۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵

خط d داخل دو صفحه متمایز P_1 و P_2 قرار دارد. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر صفحه P با P_1 موازی باشد، می تواند با P_2 موازی باشد.
 ۲) اگر صفحه P با P_1 متقاطع باشد، با P_2 موازی است.
 ۳) اگر صفحه P با P_1 و P_2 متقاطع باشد، d در داخل P قرار دارد.
 ۴) اگر صفحه ای موازی با d باشد، حداقل با یکی از صفحات P_1 و P_2 متقاطع است.



در شکل زیر، O نقطه‌ای درون متوازی‌الضلاع $ABCD$ است. اگر مساحت متوازی‌الضلاع 300 و مساحت مثلث AOB برابر 65 باشد، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



۷۵ (۲)

۹۵ (۴)

۶۵ (۱)

۸۵ (۳)

۴۶

کدام یک از موارد زیر یک صفحه را مشخص نمی‌کند؟

(۱) سه نقطه متمایز A و B و C غیر واقع بر روی یک خط

(۲) چهار نقطه متمایز A و B و C و D که خط گذرنده از A و B با خط گذرنده از C و D متناظر است.

(۳) دو خط متمایز عمود بر یک صفحه مانند P

(۴) یک خط و یک نقطه خارج از خط مورد نظر

۴۷

دو صفحه متقاطع P و Q برهم عمودند و فصل مشترک آن‌ها خط d است. گزینه نادرست کدام است؟

(۲) هر صفحه عمود بر P ، با صفحه Q موازی است.

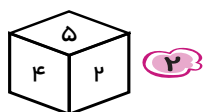
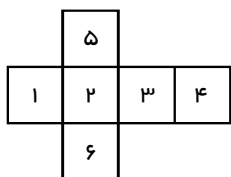
(۱) هر صفحه موازی با P ، بر صفحه Q عمود است.

(۴) صفحه گذرنده از خط d و عمود بر P ، بر صفحه Q منطبق است.

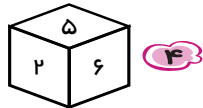
(۳) هر صفحه عمود بر خط d ، بر دو صفحه P و Q عمود است.

۴۸

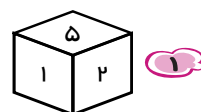
کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند مربوط به مکعب گسترده مقابل باشد؟



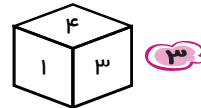
(۲)



(۴)



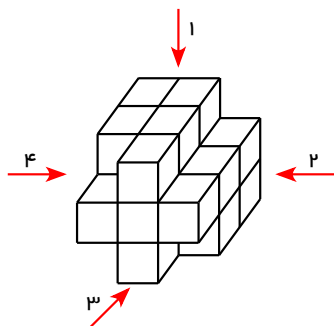
(۱)



(۳)

۴۹

نمای دیده‌شده شکل روبه‌رو، از کدام جهت با بقیه متفاوت است؟



(۱) ۴

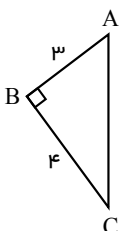
(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

۵۰

مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$) را 360 درجه حول بزرگ‌ترین ضلع آن دوران می‌دهیم. حجم شکل فضایی حاصل کدام است؟



(۲) $\frac{144\pi}{5}$

(۴) $\frac{144\pi}{25}$

(۱) $\frac{48\pi}{5}$

(۳) $\frac{48\pi}{25}$

۵۱

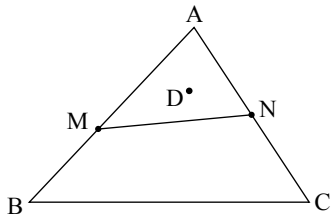


۵۲	مثلث ABC و دایره‌ای درون آن مفروض‌اند. چند نقطه روی محیط دایره وجود دارد که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله باشد؟ ۱ دقیقاً یک نقطه ۲ حداکثر یک نقطه ۳ دقیقاً دو نقطه ۴ حداکثر دو نقطه
۵۳	در شکل زیر، از نقطه N دلخواه خط d'' را موازی خط d رسم نموده‌ایم. محل تلاقی خط d' با این دو خط موازی را به ترتیب A و B می‌نامیم. اگر محل برخورد عمود منصف پاره خط AB با خط d را M بنامیم، کدام گزینه همواره صحیح است؟ ۱ AB لزوماً عمود منصف MN است. ۲ AB نیمساز $\hat{M}\hat{B}\hat{N}$ می‌باشد. ۳ نقاط M و B از نقطه H به یک فاصله‌اند. ۴ هیچ‌کدام
۵۴	عکس کدام یک از قضایای شرطی زیر، یک قضیه شرطی نمی‌باشد؟ ۱ مساحت‌های هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند. ۲ اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر زاویه آن 60° است. ۳ مثلثی که دو زاویه برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است. ۴ در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.
۵۵	در مثلث ABC ، $\hat{B} = 50^\circ$ ، $\hat{C} = 35^\circ$ و نقطه D روی ضلع BC چنان قرار دارد که $\hat{DAC} = 25^\circ$ است. کدام یک از نامساوی‌های زیر نادرست است؟ ۱ $AC > AB$ ۲ $AB > BD$ ۳ $AC > AD$ ۴ $BD > AD$
۵۶	خط d و نقطه P روی آن مفروض است. چند نقطه در صفحه پیدا می‌شود که از d و P ، فاصله ثابت r داشته باشند؟ ($r > 0$) ۱ دقیقاً ۲ نقطه ۲ دقیقاً ۴ نقطه ۳ حداکثر ۲ نقطه ۴ حداکثر ۴ نقطه
۵۷	نقطه O محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$ و $5AB = 12AC = 60$) است. فاصله O از ضلع BC کدام است؟ ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴
۵۸	از هر رأس مثلث مختلف‌الاضلاع ABC ، خطی به موازات ضلع مقابلش رسم می‌کنیم تا مثلث دیگری به وجود آید. کدام یک از اجزاء دو مثلث برهم منطبق‌اند؟ ۱ نیمسازهای زوایای داخلی ۲ میانه‌ها ۳ عمود منصف‌های اضلاع ۴ ارتفاع‌ها
۵۹	دو نقطه A و B به فاصله ۵ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. چند نقطه را می‌توان یافت که از نقطه A ، ۲ سانتی‌متر و از نقطه B ، ۴ سانتی‌متر فاصله داشته باشند؟ ۱ هیچ ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ بی‌شمار
۶۰	در شکل مقابل، اگر $AC = BC$ باشد، آنگاه زاویه α چند درجه است؟ ۱ ۱۰۸ ۲ ۱۱۶ ۳ ۱۲۶ ۴ ۱۳۲



	در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، ۸ واحد مربع است. اگر $BD = 4$ باشد، فاصله نقطه C از BD کدام است؟ ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۸ ۶۱
	در شکل مقابل، مساحت مثلث‌های AOB و DOC به ترتیب برابر ۴ و ۹ واحد مربع است. مساحت ذوزنقه $ABCD$ کدام است؟ ۱ ۲۴ ۲ ۲۵ ۳ ۲۷ ۴ ۳۰ ۶۲
در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، از نقطه M وسط AC، عمود MH را بر ضلع BC رسم می‌کنیم (H روی ضلع BC است). اگر اندازه‌های AB و MH به ترتیب برابر ۴ و $\sqrt{3}$ باشند، اندازه ضلع BC برابر کدام است؟	۱ ۶ ۲ ۸ ۳ ۹ ۴ ۱۲ ۶۳
	در مستطیل شکل زیر، $(AB = 2\sqrt{3}, BC = 2)$، فاصله نقطه H از ضلع AB کدام است؟ ۱ ۱ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۶۴
	در مثلث ABC مطابق شکل، AM میانه ضلع BC و $DE \parallel AM$ است. اگر DE ضلع AC را در F قطع کند به طوری که $\frac{EF}{AM} = \frac{3}{5}$ باشد، آنگاه نسبت $\frac{DE}{AM}$ کدام است؟ ۱ ۱٫۵ ۲ ۱٫۴ ۳ ۱٫۶ ۴ ۱٫۲ ۶۵
کدام حکم کلی نادرست است؟ ۱ مجموع زوایای خارجی هر مثلث، ۱۸۰ درجه است. ۲ هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است. ۳ سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث هم‌رسانند. ۴ عمودمنصف هر وتر دایره از مرکز آن می‌گذرد. ۶۶	
	در مثلث قائم‌الزاویه شکل زیر، عمودمنصف ضلع BC را رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطه F قطع کند. می‌دانیم $FH = AF$. زاویه C چند درجه است؟ ۱ ۱۵ ۲ ۳۰ ۳ ۴۵ ۴ ۶۰ ۶۷

ارتفاع AH و BH' از مثلث ABC یکدیگر را در نقطه D قطع می‌کنند. اگر D محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث AMN باشد، طول MC برابر کدام است؟



AH ۲

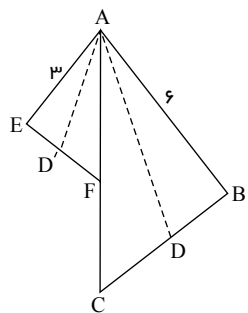
BH' ۴

BC ۱

AC ۳

۶۸

در شکل زیر AC نیمساز زاویه $B\hat{A}E$ ، $AC = ۸$ و $AF = ۴$ است. اگر $AD = ۶m + ۴$ و $AD' = m + ۳$ به ترتیب نیمسازهای دو زاویه $B\hat{A}C$ و $E\hat{A}F$ باشند، مقدار m کدام است؟



۲ ۱

۳ ۲

$\frac{1}{2}$ ۳

$\frac{1}{3}$ ۴

۶۹

عکس کدام یک از قضایای زیر، لزوماً صحیح نیست؟

۱ اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهای آن منصف یکدیگر هستند.

۲ اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آنگاه قطرهای آن عمودمنصف یکدیگر هستند.

۳ اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آنگاه اندازه دو قطر آن مساوی و عمود برهم هستند.

۴ اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد آنگاه قطرهای آن مساوی و منصف هم هستند.

۷۰

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، طول میانه وارد بر وتر برابر ۶ واحد و $\hat{B} = 30^\circ$ است. فاصله وسط وتر، از ضلع AB کدام است؟

$\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ۴

۴ ۳

$2\sqrt{2}$ ۲

۳ ۱

۷۱

اگر نقطه O محل تلاقی نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و D در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد، آنگاه در صورتی که $AB = ۸$ و $BC = ۶$ باشند، فاصله نقطه O از وسط ضلع AD کدام است؟

۴ ۴

۳ ۳

$\frac{8}{3}$ ۲

۲ ۱

۷۲

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای، دو برابر مجذور ارتفاع وارد بر وتر آن است. اندازه بزرگ‌ترین زاویه خارجی این مثلث چند درجه است؟

۱۶۵ ۴

۱۵۰ ۳

۱۳۵ ۲

۱۲۰ ۱

۷۳

در اثبات عکس قضیه «در مثلث ABC اگر $AB > AC$ آن‌گاه $\hat{C} > \hat{B}$ » با استفاده از برهان خلف، فرض اولیه کدام است؟

$AB \leq AC$ ۴

$AC > AB$ ۳

$\hat{B} \geq \hat{C}$ ۲

$\hat{B} > \hat{C}$ ۱

۷۴

اگر $\frac{x}{x-2} = \frac{y}{y+5}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{2xy}{(x+y)^2}$ کدام است؟

جواب منحصر به فرد ندارد. ۴

۱ ۳

$-\frac{20}{9}$ ۲

$\frac{20}{9}$ ۱

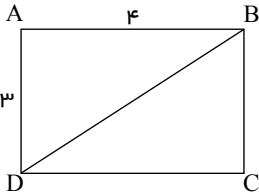
۷۵



۷۶	دوزنقه‌ای با ساق‌های ۴ و ۶ و قاعده کوچک ۳ قابل رسم می‌باشد. قاعده بزرگ این دوزنقه کدام عدد نمی‌تواند باشد؟	۹ (۱)	۵ (۲)	۱۲ (۳)	۸ (۴)
۷۷	مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، با طول ساق ۴ مفروض است. از نقطه M روی وتر BC ، عمودهایی بر دو ساق مثلث رسم می‌کنیم. اگر قدرمطلق تفاضل طول دو عمود رسم شده برابر ۲ باشد، فاصله نقطه M از رأس A کدام است؟	$\sqrt{6}$ (۱)	$\sqrt{5}$ (۲)	۲ (۳)	$\sqrt{10}$ (۴)
۷۸	چند مثلث متساوی‌الساقین با طول اضلاع صحیح و محیط ۱۶ واحد می‌توان رسم کرد؟	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
۷۹	در مثلثی به اضلاع $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 7$ ، نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C در نقطه O ، یکدیگر را قطع می‌کنند. نسبت مساحت مثلث BOC به مساحت چهارضلعی $ABOC$ کدام است؟	$\frac{2}{3}$ (۱)	$\frac{7}{9}$ (۳)	$\frac{4}{11}$ (۴)	$\frac{4}{7}$ (۲)
۸۰	در دوزنقه $ABCD$ ، نقاط A' و B' وسط اضلاع AD و AB هستند. اگر $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$ باشد، مساحت چهارضلعی $A'B'BD$ چه کسری از مساحت دوزنقه $ABCD$ است؟	$\frac{2}{5}$ (۱)	$\frac{3}{8}$ (۳)	$\frac{3}{10}$ (۴)	$\frac{1}{8}$ (۲)
۸۱	کدام مورد مثال نقض ندارد؟	چهارضلعی‌ای که قطرهای آن نیمساز زوایا باشند، لوزی است. (۱)	چهارضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر باشند، مستطیل است. (۳)	چهارضلعی‌ای که قطرهایش بر هم عمود باشند، لوزی است. (۲)	چندضلعی‌ای که زوایایش با هم برابر باشند، منتظم است. (۴)
۸۲	دو صفحه متقاطع P و Q بر هم عمودند و فصل مشترک آن‌ها خط d است. گزینه نادرست کدام است؟	هر صفحه موازی با P ، بر صفحه Q عمود است. (۱)	هر صفحه عمود بر خط d ، بر دو صفحه P و Q عمود است. (۳)	هر صفحه موازی با P ، با صفحه Q موازی است. (۲)	صفحه گذرنده از خط d و عمود بر P ، بر صفحه Q منطبق است. (۴)
۸۳	دو خط متناظر d و d' با صفحه P متقاطع هستند. چند خط یافت می‌شود که این دو خط را قطع کند و با صفحه P موازی باشد؟	بی‌شمار (۱)	یک (۲)	دو (۳)	هیچ (۴)
۸۴	اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x + 2y + 3z$ کدام است؟	۱۵ (۱)	۱۰ (۲)	۱۸ (۳)	۱۲ (۴)

در مثلث ABC، میانه AM را رسم می کنیم. اگر $\hat{BAC} = \hat{AMC}$، آنگاه نسبت $\frac{AM}{AB}$ کدام است؟	۱ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	۸۵
در شکل روبه رو $ABCD$ دوزنقه است. طول قاعده CD کدام است؟	۱ ۱۰ ۲ ۱۳ ۳ ۱۲ ۴ $\frac{۳۲}{۳}$	۸۶
در شکل زیر، AD نیمساز زاویه BAC و $DE \parallel AC$ است. طول پاره خط DE کدام است؟	۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴	۸۷
طول دو ضلع از مثلث ABC برابر ۴ و ۷ طول دو ضلع از مثلث DEF برابر ۷ و ۱۴ است. اگر این دو مثلث متشابه بوده ولی همنهشت نباشند، آنگاه بیش ترین مقدار مجموع اضلاع سوم این دو مثلث چقدر است؟	۱ $\frac{۵۳}{۲}$ ۲ $\frac{۲۳}{۲}$ ۳ $\frac{۷۵}{۴}$ ۴ $\frac{۸۱}{۴}$	۸۸
مثلثی با طول اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ با مثلثی که ارتفاع وارد بر بزرگ ترین ضلع آن $۱۴/۴$ می باشد، متشابه است. اندازه ضلع متوسط مثلث دوم کدام است؟	۱ ۱۲ ۲ ۱۸ ۳ ۲۴ ۴ ۳۰	۸۹
اگر مساحت مربعی که اندازه ضلع آن برابر قطر بزرگ یک لوزی است، $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مربعی باشد که اندازه ضلع آن برابر قطر کوچک همان لوزی است، نسبت محیط مربع بزرگ تر به محیط لوزی کدام است؟	۱ $\frac{۸}{۵}$ ۲ $\frac{۶۴}{۲۵}$ ۳ $\frac{۶}{۵}$ ۴ $\frac{۳۶}{۲۵}$	۹۰
در شکل زیر، اگر مساحت مثلث AMN با مساحت متوازی الاضلاع $MNPB$ برابر شده باشد، نسبت $\frac{AN}{NC}$ برابر کدام است؟	۱ $\frac{۳}{۲}$ ۲ ۲ ۳ $\frac{۴}{۳}$ ۴ ۱	۹۱

در مستطیل زیر، از رأس A بر قطر BD عمود می‌کنیم. فاصله پای عمود تا محل تقاطع قطرهای مستطیل کدام است؟



۱ $\frac{6}{5}$ ۲ $\frac{7}{5}$ ۳ $\frac{8}{5}$ ۴ $\frac{9}{5}$

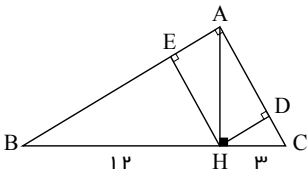
اگر مساحت‌های دو مثلث متشابه را با S_1 و S_2 و محیط‌های آن‌ها را به ترتیب با P_1 و P_2 نشان دهیم، کدام رابطه همواره درست است؟

۱ $S_1 P_2 = S_2 P_1$ ۲ $P_1 S_1 = P_2 S_2$ ۳ $P_1 S_2 = P_2 S_1$ ۴ $S_1 P_2 = S_2 P_1$

در مثلث ABC ، نقطه D روی ضلع BC چنان واقع است که $\widehat{BAD} = C$ می‌باشد. اگر $AB = 6$ و $CD = 5$ ، طول BD کدام است؟

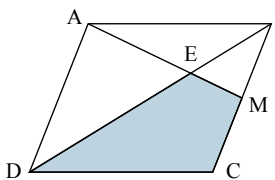
۱ ۴ ۲ ۵ ۳ $\frac{4}{5}$ ۴ ۳

در شکل زیر، اگر AH ارتفاع نظیر ضلع BC باشد، آنگاه مساحت مستطیل $ADHE$ کدام است؟



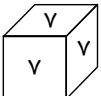
۱ $14\frac{4}{5}$ ۲ $15\frac{2}{5}$ ۳ $12\frac{6}{5}$ ۴ $13\frac{8}{5}$

در شکل زیر، اگر نقطه M وسط ضلع BC و مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ۳۰ باشد، آنگاه مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟



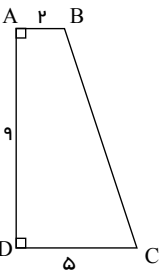
۱ ۱۰ ۲ $11\frac{25}{5}$ ۳ ۱۲ ۴ $12\frac{5}{5}$

روی تمام وجوه یک مکعب، عدد ۷ نوشته شده است. چه تعداد از این معکب‌ها را به صورت ستونی روی هم قرار دهیم تا مجموع تمام اعدادی که قابل رؤیت هستند برابر ۳۱۵ شود؟



۱ ۹ ۲ ۱۰ ۳ ۱۱ ۴ ۱۲

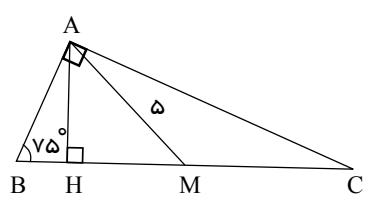
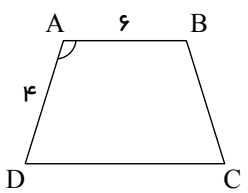
دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ را حول ضلع AD دوران داده و سپس شکل حاصل را با صفحه‌ای به موازات قاعده‌ها و به فاصله ۳ واحد از قاعده بزرگ برش می‌دهیم. مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟



۱ 9π ۲ 16π ۳ 12π ۴ 20π

از هر ۴ رأس متوالی در یک ده ضلعی محدب، در مجموع چند قطر متمایز می‌گذرد؟

۱ ۲۵ ۲ ۲۶ ۳ ۲۷ ۴ ۲۸

کدام مورد زیر در تعریف چندضلعی لزوماً وجود ندارد؟	۱۰۰
۱. چندضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره خط متوالی. ۲. هر پاره خط در چندضلعی، دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع می کند. ۳. هر دو پاره خط در چندضلعی که در یک انتها مشترک اند، روی یک خط نیستند. ۴. با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع در چندضلعی، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع می شوند.	
تعداد قطرهای یک چندضلعی، دو برابر تعداد اضلاع آن است. این چند ضلعی حداکثر چند زاویه 140° درجه می تواند داشته باشد؟	۱۰۱
۱. ۶ ۲. ۵ ۳. ۴ ۴. ۳	
در مثلث قائم الزاویه ABC ، اندازه یکی از زاویه های حاده، سه برابر اندازه زاویه حاده دیگر است. اگر طول ارتفاع وارد بر وتر برابر ۲ باشد، طول وتر کدام است؟	۱۰۲
۱. ۴ ۲. $4\sqrt{2}$ ۳. ۸ ۴. $8\sqrt{2}$	
 در مثلث قائم الزاویه $(\hat{A} = 90^\circ)$ AM میانه وارد بر وتر است. اندازه HM کدام است؟	۱۰۳
۱. $\frac{9}{4}$ ۲. $\frac{5}{2}$ ۳. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ۴. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$	
در یک متوازی الاضلاع که طول قطرهای آن برابر ۴ و ۷ واحد است، از هر رأس خطی به موازات یکی از قطرهای رسم کرده ایم، محیط چهارضلعی حاصل از تقاطع این خطوط کدام است؟	۱۰۴
۱. ۲۲ ۲. ۱۱ ۳. ۲۸ ۴. ۱۶	
در متوازی الاضلاع $ABCD$ که محیط آن برابر ۲۴ است، از نقطه M وسط ضلع AB به دو رأس C و D وصل می کنیم. اگر $AB = 2AD$ و $\hat{B} = 60^\circ$ باشد، حاصل $MC \times MD$ کدام است؟	۱۰۵
۱. $8\sqrt{3}$ ۲. $9\sqrt{3}$ ۳. $16\sqrt{3}$ ۴. $18\sqrt{3}$	
مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۲ برابر مجذور ارتفاع وارد بر وتر است. بزرگ ترین زاویه خارجی این مثلث کدام است؟	۱۰۶
۱. 165° ۲. 150° ۳. 135° ۴. 120°	
در مثلث متساوی الساقینی به طول ساق ۱۰ و قاعده ۱۲، مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده از دو ساق آن کدام است؟	۱۰۷
۱. ۴٫۸ ۲. ۷٫۲ ۳. ۹٫۶ ۴. ۱۲	
در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ دوزنقه است. اگر اندازه زاویه C نصف اندازه زاویه A باشد، طول قاعده DC کدام است؟	۱۰۸
 ۱. ۱۱ ۲. ۱۲ ۳. ۱۰ ۴. ۱۴	

۱۰۹	قطرهای یک دوزنقه بر هم عمودند. وسط‌های اضلاع مجاور آن را به هم وصل می‌کنیم تا یک چهارضلعی به محیط ۲۸ تشکیل شود. اگر مساحت دوزنقه برابر ۹۶ باشد، آن گاه طول پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌های دوزنقه را به هم وصل می‌کند، کدام است؟	۵ (۱)	۸ (۲)	۱۰ (۳)	۱۴ (۴)
۱۱۰	در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع قائم ۳ و ۴، فاصله نقطه هم‌رسی میانه‌ها تا وسط وتر کدام است؟	$\frac{4}{5}$ (۱)	$\frac{5}{6}$ (۲)	$\frac{5}{4}$ (۳)	$\frac{6}{5}$ (۴)
۱۱۱	نقطه M به فاصله $1 + 2a$ از خط d قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای به فاصله ۷ از نقطه M روی خط d وجود نداشته باشد، a کدام می‌تواند باشد؟	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
۱۱۲	چهارضلعی ABCD در شکل زیر دوزنقه است $(AB \parallel CD)$ ، اگر مساحت مثلث‌های DOC و AOD به ترتیب برابر ۱۲ و ۶ باشند، آنگاه مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟	۲۴ (۱)	۳۰ (۳)	۲۷ (۲)	۳۲ (۴)
۱۱۳	در مثلث ABC، $AB = 4$ و $AC = 2\sqrt{2}$ است. اگر محل تلاقی عمودمنصف‌های این دو ضلع به روی ضلع BC قرار داشته باشد، آنگاه فاصله نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها تا نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC کدام است؟	$\sqrt{2}$ (۱)	$\sqrt{3}$ (۲)	۲ (۳)	$\sqrt{6}$ (۴)
۱۱۴	قطر یک مستطیل با یکی از اضلاع آن، زاویه ۱۵ درجه می‌سازد. یک نقطه روی بزرگ‌ترین ضلع مستطیل از دو قطر آن به فاصله‌های ۱ و ۲ واحد قرار دارد اندازه مساحت مستطیل کدام است؟	۱۸ (۱)	۳۶ (۲)	۴۸ (۳)	۷۲ (۴)
۱۱۵	در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، فاصله نقطه دلخواه F درون مثلث از سه ضلع آن به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. مجموع فواصل نقطه هم‌رسی میانه‌ها از سه رأس این مثلث کدام است؟	۶ (۱)	۹ (۲)	۱۲ (۳)	۱۸ (۴)
۱۱۶	اگر تعداد مرزی درونی یک چندضلعی شبکه‌ای را دو برابر کنیم، مساحت آن چندضلعی چگونه تغییر می‌کند؟	۱ (۱) دقیقاً دو برابر می‌شود.	۲ (۲) کمتر از دو برابر می‌شود.	۳ (۳) بیشتر از دو برابر می‌شود.	۴ (۴) بسته به تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی، هر یک از سه حالت امکان‌پذیر است.
۱۱۷	کمترین مساحت ممکن برای یک چندضلعی شبکه‌ای که حاصل ضرب تعداد نقاط درونی و نقاط مرزی آن ۴۰ باشد، کدام است؟	$7\frac{1}{5}$ (۱)	۸ (۲)	$9\frac{1}{5}$ (۳)	۱۱ (۴)

تعریف های بیان شده در موارد (الف)، (ب) و (پ) به ترتیب از راست به چپ مربوط به کدام دو خط است؟ (الف) صفحه ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آن ها باشد و نقطه اشتراکی هم نداشته باشند. (ب) صفحه ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آن ها باشد و نقطه اشتراک داشته باشد. (پ) هیچ صفحه ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آن ها باشد.	متنافر - متقاطع - موازی (۱) موازی - متنافر - متقاطع (۲) موازی - متنافر - متقاطع (۳) متنافر - موازی - متقاطع (۴)
---	--

در مکعب روبه رو، خط شامل یال AD با چه تعداد از خط های گذرنده از یال های مکعب متنافر است؟	۲ (۱) ۴ (۳) ۳ (۲) ۵ (۴)
--	----------------------------------

کدام قضیه دوشرطی نمی باشد؟	۱ اگر دو صفحه متقاطع P_1 و P_2 بر صفحه Q عمود باشند، آن گاه فصل مشترک P_1 و P_2 بر Q عمود است. ۲ دو صفحه عمود بر هم P و Q مفروض اند. اگر خط d بر P عمود باشد، آن گاه $d \parallel Q$ یا $d \in Q$. ۳ خط d_1 عمود بر صفحه P مفروض است. اگر d_2 بر P عمود باشد، آن گاه $d_1 \parallel d_2$. ۴ اگر خط d در نقطه A بر صفحه P عمود باشد، آن گاه d بر تمام خطوط صفحه P که از A می گذرند، عمود است.
----------------------------	---

یک مربع شبکه ای با مساحت ۸ واحد مربع مفروض است. اختلاف بیشترین تعداد نقاط مرزی و کمترین نقاط درونی آن کدام است؟	۳ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۶ (۴)
---	-----------------------------------

در مثلث ABC ، زاویه A حاده است. اگر عمود منصف های دوضلع AC و AB یکدیگر را در نقطه O قطع کنند در این صورت زاویه $\hat{BOC}$ همواره برابر کدام است؟	$90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A}$ (۱) $\hat{B} + \hat{C}$ (۲) $\frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$ (۳) $2\hat{A}$ (۴)
---	--

در شکل زیر، محیط مثلث ABC برابر ۲۴ و $BC = 9$ می باشد. نیمسازهای زاویه های داخلی B و C خطی که از رأس A موازی ضلع BC رسم شده است را به ترتیب در نقاط M و N قطع می کنند. اگر I محل تقاطع این دو نیمساز باشند آنگاه فاصله I از پاره خط MN ، چند برابر فاصله I از ضلع BC است؟	۲ (۱) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۴)
---	--

در دوزنقه شکل زیر، زوایای مجاور قاعده بزرگ برابر 30° و 60° هستند. اگر $AB = 5$ و $CD = 13$ قاعده های دوزنقه باشند، اندازه ارتفاع AH کدام است؟	$4\sqrt{3}$ (۱) $4\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۴)
---	--

دو صفحه P و Q بر هم عمودند. چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) هر خط عمود بر یکی از این دو صفحه، با دیگری موازی است.
(ب) هر صفحه عمود بر یکی از این دو صفحه، با دیگری موازی است.
(پ) هر خط موازی با یکی از این دو صفحه، بر دیگری عمود است.
(ت) هر صفحه موازی با یکی از این دو صفحه، بر دیگری عمود است.

۱۲۵

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

چه تعداد از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟

(الف) از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه فقط می‌توان یک خط بر آن صفحه عمود کرد.
(ب) از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه فقط می‌توان یک صفحه بر آن عمود کرد.
(پ) اگر خطی بر یکی از خطوط صفحه‌ای عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

۱۲۶

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

روی تمام وجه‌های تعدادی مکعب، حرف F را نوشته و ۹ تا از آن‌ها به صورت ستونی روی هم قرار می‌دهیم. چند حرف F دیده می‌شود؟ (اولین مکعب روی زمین قرار می‌گیرد).

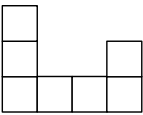
۱۲۷

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یکی از ضلع‌های قائمه‌اش دوران می‌دهیم. سطح مقطع حاصل از برخورد شکل حاصل با صفحه P کدام یک از موارد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱۲۸

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

حداقل و حداکثر چند مکعب از شکل زیر برداریم تا نمای بالا به صورت  شود؟

۱۲۹

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه زیر حول محور d چقدر است؟ ($\pi = 3$)

۱۳۰

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

مساحت سطح مقطع یک استوانه قائم با صفحه‌ای که از محور آن می‌گذرد با مساحت سطح مقطع آن با صفحه‌ای که عمود بر ارتفاع، آن را قطع می‌کند، برابر است. نسبت مساحت جانبی به مساحت کل استوانه کدام است؟

۱۳۱

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

در دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ ، قطر AC به طول $4\sqrt{3}$ با قاعده AB زاویه 30° می سازد. مساحت دوزنقه کدام است؟

$16\sqrt{3}$ (۴)

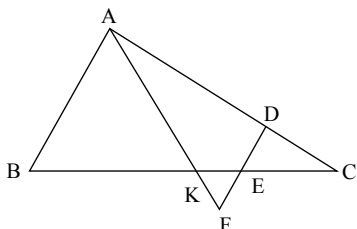
$12\sqrt{3}$ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

۱۳۲

در شکل مقابل، $DE \parallel AB$ ، $DE = 3$ ، $EF = 2$ ، $AB = 8$ و $CE = 6$ باشد، طول BK کدام است؟



۱۲ (۱)

۱۰ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۱۳۳

در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر $\hat{C} = 15^\circ$ و ارتفاع وارد بر وتر $AH = 2$ باشد، طول عمود رسم شده از نقطه H بر ضلع AB کدام است؟

$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (۴)

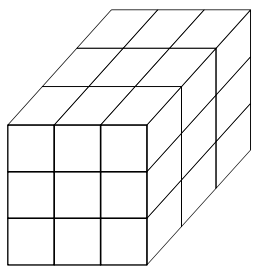
$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (۳)

$\sqrt{\sqrt{2}-1}$ (۲)

$\sqrt{\sqrt{2}+1}$ (۱)

۱۳۴

تمام وجه های مکعب شکل زیر را رنگ آمیزی می کنیم. تعداد مکعب های کوچکی که دو وجه رنگ شده دارند، چقدر بیشتر از تعداد مکعب های کوچکی است که تنها یک وجه آن ها رنگ آمیزی شده است؟



صفر (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۶ (۴)

۱۳۵

اگر نقطه O ، از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله باشد، این نقطه لزوماً:

(۲) محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث ABC است.

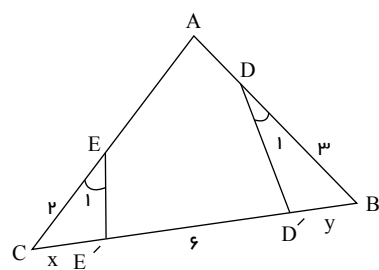
(۱) محل برخورد نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC است.

(۴) محل برخورد های ارتفاع های مثلث ABC است.

(۳) محل برخورد میانه های مثلث ABC است.

۱۳۶

در شکل زیر $\hat{D}_1 = \hat{C}$ و $\hat{E}_1 = \hat{B}$ است. اگر $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$ باشد، $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



$\frac{3}{2}$ (۲)

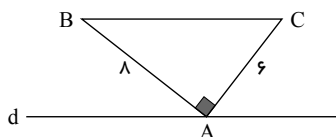
$\frac{9}{4}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۱)

۱ (۳)

۱۳۷

در شکل زیر مثلث ABC قائم الزاویه ($\hat{A} = 90^\circ$) و وتر BC با خط d موازی است. اگر این مثلث را حول خط d دوران دهیم، تفاضل حجم شکل های حاصل از دوران اضلاع AB و AC تقریباً کدام است؟



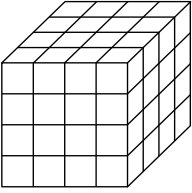
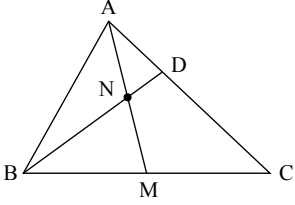
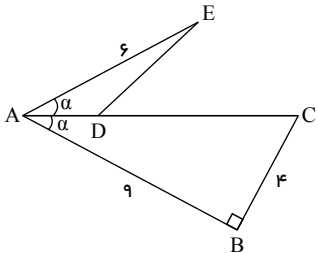
18.4π (۲)

24π (۴)

15.3π (۱)

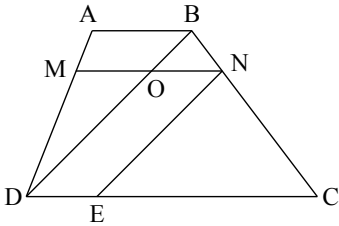
21.5π (۳)

۱۳۸

همه وجه‌های مکعب زیر را رنگ آمیزی کرده‌ایم. در این صورت تعداد مکعب‌های کوچکی که فقط دو وجه آن رنگ آمیزی شده است، چند برابر تعداد مکعب‌های کوچکی است که سه وجه آن رنگ آمیزی شده است؟ 	۱۳۹ ۱ ☐ ۳/۲ ۲ ☐ ۲ ۳ ☐ ۴ ۴ ☐ ۳
در شکل زیر، AM میانه ضلع BC و N وسط AM است. مساحت چهارضلعی $DNMC$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟ 	۱۴۰ ۱ ☐ ۱/۴ ۲ ☐ ۱/۳ ۳ ☐ ۵/۱۲ ۴ ☐ ۳/۸
در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ واحد، O نقطه هم‌رسمی عمود منصف‌ها است. فاصله O از ضلع بزرگ‌تر این مثلث چند واحد است؟	۱۴۱ ۱ ☐ ۰٫۶۲۵ ۲ ☐ ۰٫۷۵ ۳ ☐ ۰٫۸۷۵ ۴ ☐ ۱
برای رسم نیمساز زاویه $\hat{XOY} = 60^\circ$ این گونه عمل می‌کنیم: «ابتدا به مرکز O کمانی به شعاع واحد رسم می‌کنیم تا OX و OY را در A و B قطع کند. سپس به مرکزهای A و B دو کمان به شعاع‌های R که $R > a$ رسم می‌کنیم.» کمترین مقدار a کدام است؟	۱۴۲ ۱ ☐ ۱ ۲ ☐ ۱/۲ ۳ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴ ☐ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
دو خط متقاطع d و d' و نقطه M در یک صفحه مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خطوط d و d' به یک فاصله بوده و از نقطه M به فاصله ثابت r واقع باشد؟ ($r > 0$)	۱۴۳ ۱ ☐ هیچ ۲ ☐ ۱ ۳ ☐ ۲ ۴ ☐ ۴
در شکل مقابل اگر E روی عمود منصف CD واقع باشد، آنگاه طول ED کدام است؟ 	۱۴۴ ۱ ☐ ۳٫۵ ۲ ☐ ۴ ۳ ☐ ۵ ۴ ☐ ۴٫۵
برای رسم خط موازی با یک خط مفروض در صفحه حداقل چند کمان باید رسم کنیم؟ (با تغییر)	۱۴۵ ۱ ☐ ۱ ۲ ☐ ۲ ۳ ☐ ۳ ۴ ☐ ۴
نقطه A روی خط d واقع است، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A و d به فاصله x باشد؟ ($x > 0$)	۱۴۶ ۱ ☐ ۱ ۲ ☐ ۲ ۳ ☐ ۴ ۴ ☐ بی‌شمار

با داشتن حداقل چند نقطه روی محیط یک دایره می‌توانیم مرکز آن را به کمک خط‌کش و پرگار پیدا کنیم؟	۱۴۷ ۱ ☐ ۵ ☐ ۲ ☐ ۴ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐
در مستطیل $ABCD$ ($AB = 2BC$)، از رأس A خطی عمود بر قطر BD رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در نقطه M قطع کند نسبت DM به CM کدام است؟	۱۴۸ ۱ ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ ۲ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ ۴ ☐ $\frac{2}{5}$ ☐
در شکل زیر، مثلث‌های ABC و BED قائم‌الزاویه هستند. اگر $DH = 1$ و $CD = 8$ باشد، آنگاه طول پاره‌خط EH چه کسری از طول پاره‌خط AE است؟	۱۴۹ ۱ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ ۲ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ ۴ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐
در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $\hat{A} = 90^\circ$، نیمساز زاویه داخلی B، ضلع AC را در D قطع می‌کند، اگر $AD = \frac{8}{3}$ و مجموع طول‌های دو ضلع AB و BC برابر با ۱۸ واحد باشد، مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟	۱۵۰ ۱ ☐ ۲۴ ☐ ۲ ☐ ۲۶ ☐ ۳ ☐ ۲۸ ☐ ۴ ☐ ۳۰ ☐
در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) ساق AB را از طرف B تا نقطه D امتداد می‌دهیم، به‌طوری که $BD = BC$. اگر $CD = AC$، آنگاه نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث ACD کجا واقع است؟	۱۵۱ ۱ ☐ درون $\triangle ACD$ ☐ ۲ ☐ بیرون $\triangle ACD$ ☐ ۳ ☐ نقطه C ☐ ۴ ☐ وسط AD
در شکل مقابل، AH میانه مثلث ABC است و پاره‌خط‌های EF و AH در نقطه O متقاطعند. اگر عمودمنصف AE از O بگذرد، زاویه AEF لزوماً برابر کدام است؟	۱۵۲ ۱ ☐ $\hat{C}$ ☐ ۲ ☐ $\hat{A}$ ☐ ۳ ☐ $90^\circ - \hat{C}$ ☐ ۴ ☐ $90^\circ - \hat{A}$
می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف ثابت کنیم «اگر در مثلث ABC داشته باشیم $AB \neq AC$، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$». برای این کار ابتدا چه فرضی را انجام می‌دهیم؟	۱۵۳ ۱ ☐ $BC = AC$ یا $BC = AB$ ☐ ۲ ☐ $\hat{B} = \hat{C}$ ☐ ۳ ☐ $\hat{A} = \hat{B}$ یا $\hat{A} = \hat{C}$ ☐ ۴ ☐ $AB = AC$
در مثلث ABC، نقطه E روی ضلع AB طوری قرار دارد که از دو ضلع AC و BC به یک فاصله است. کدام نامساوی همواره درست است؟	۱۵۴ ۱ ☐ $CE < AC$ ☐ ۲ ☐ $BC < CE$ ☐ ۳ ☐ $AE < AC$ ☐ ۴ ☐ $BE < CE$

در شکل زیر، $AB \parallel MN \parallel CD$ و $NE \parallel BD$ است. اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{3}$ و $MO = ON$ باشد، آنگاه طول پاره خط CE چند برابر طول پاره خط AB است؟



- ۱۵۵
- ۱ ☐ ۳
- ۲ ☐ ۲٫۵
- ۳ ☐ ۲٫۲۵
- ۴ ☐ ۲

در دو چندضلعی با تعداد اضلاع متفاوت، تفاضل تعداد قطرهای دو برابر تعداد اضلاع، یکسان است. اختلاف تعداد رئوس این دو چندضلعی کدام است؟

- ۱۵۶
- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۴

در مثلث قائم الزاویه $(\hat{C} = \hat{B}, \hat{A} = 90^\circ)$ ، از نقطه H پای ارتفاع وارد بر وتر، دو عمود HD و HE به ترتیب بر اضلاع AB و AC رسم شده است. نسبت مساحت چهارضلعی $ADHE$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟

- ۱۵۷
- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱۶

کدام قضیه به صورت دو شرطی بیان نمی شود؟

- ۱۵۸
- ۱ ☐ در مثلثی که دو ضلع نابرابر دارد، زاویه روبه رو به ضلع بزرگ تر، بزرگ تر از زاویه روبه رو به ضلع کوچک تر است.
- ۲ ☐ اگر n عددی مثبت باشد، آن گاه n^3 نیز مثبت است.
- ۳ ☐ در هر لوزی، قطرهای بر هم عمودند.
- ۴ ☐ اگر در مثلثی، دو ضلع برابر باشند، آن گاه دو زاویه روبه رو به آن ها نیز با هم برابرند.

در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، AD نیمساز زاویه داخلی A و $AB < AD < AC$ است. اگر اندازه زاویه B در بازه (α, β) قرار داشته باشد، بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

- ۱۵۹
- ۱ ☐ ۱۵°
- ۲ ☐ ۲۲٫۵°
- ۳ ☐ ۳۰°
- ۴ ☐ ۳۷٫۵°

قطرهای چهارضلعی $ABCD$ در نقطه O متقاطع اند. اگر مساحت مثلث های OAB ، OBC و OCD به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۴ باشد، آن گاه مساحت مثلث OAD کدام است؟

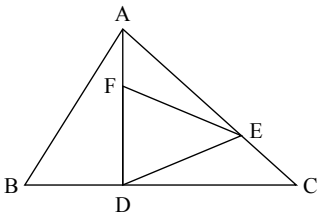
- ۱۶۰
- ۱ ☐ ۰٫۵
- ۲ ☐ ۱
- ۳ ☐ ۲
- ۴ ☐ ۴

نقطه I درون مثلث ABC به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ از سه ضلع آن به یک فاصله است. فاصله I تا ضلع بزرگ تر چند برابر طول ارتفاع وارد بر این ضلع است؟

- ۱۶۱
- ۱ ☐ ۳/۷
- ۲ ☐ ۷/۹
- ۳ ☐ ۷/۱۸
- ۴ ☐ ۳/۱۴



در شکل زیر، اگر $\frac{AF}{FD} = \frac{1}{4}$ و $\frac{EC}{AE} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ ، آن گاه نسبت مساحت مثلث DEF به مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱۶۲

۱ $\frac{3}{10}$

۲ $\frac{1}{4}$

۳ $\frac{1}{3}$

۴ $\frac{2}{5}$

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3}$ ، آن گاه حاصل $\frac{3a+2d}{4b+6c}$ کدام است؟

۱۶۳

۱ $\frac{1}{5}$

۲ $\frac{1}{4}$

۳ $\frac{2}{3}$

۴ $\frac{3}{2}$

اگر $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{10}$ ، آن گاه b چه کسری از $a+c$ است؟

۱۶۴

۱ $\frac{5}{2}$

۲ $\frac{2}{5}$

۳ $\frac{7}{3}$

۴ $\frac{3}{7}$

در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نقطه P روی ضلع AC ، از رأس A و ضلع BC به یک فاصله است. اگر $\hat{C} = 40^\circ$ ، آنگاه زاویه BPC چند درجه است؟

۱۶۵

۱ 105°

۲ 120°

۳ 115°

۴ 110°

کدام یک از گزاره‌های زیر را نمی‌توان به صورت یک قضیه دو شرطی نوشت؟

۱۶۶

۱ نقطه هم‌مرسی عمود منصف‌های اضلاع یک مثلث، از سه رأس آن مثلث به یک فاصله است.

۲ اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آنگاه قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

۳ اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آنگاه اضلاع مجاور آن برهم عمود هستند.

۴ اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

ارتفاع‌های مثلث ABC در نقطه H درون این مثلث هم‌رس هستند. اگر $\hat{BHC} = 110^\circ$ و $BH = AH$ ، آنگاه اندازه کوچک‌ترین زاویه مثلث ABC کدام است؟

۱۶۷

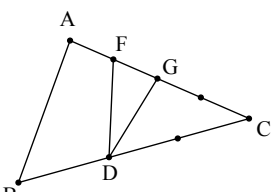
۱ 50°

۲ 60°

۳ 40°

۴ 70°

در شکل زیر، AC و BC به ترتیب به ۴ و ۳ قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. مساحت مثلث DFG چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱۶۸

۱ $\frac{1}{6}$

۲ $\frac{1}{4}$

۳ $\frac{1}{8}$

۴ $\frac{2}{9}$

	در شکل زیر DE با BC موازی است. باتوجه به اندازه‌های روی شکل، فاصله C از AB کدام است؟ ۱ $3\sqrt{15}$ ۲ $5\sqrt{3}$ ۳ $3\sqrt{5}$ ۴ $2\sqrt{35}$ ۱۶۹
در دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$)، اگر $AB = 2$، $AD = 3$، $CD = 4$ و O محل تلاقی قطرهای باشد، آنگاه مساحت مثلث OBC کدام است؟ ۱ ۲ ۲ ۲٫۵ ۳ ۳ ۴ ۴ ۱۷۰	اگر تعداد نقاط مرزی، درونی و مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای به ترتیب ۴، ۳ و ۴ برابر یک چندضلعی شبکه‌ای دیگر باشد، حداقل مساحت چندضلعی شبکه‌ای کوچکتر کدام است؟ ۱ ۳ ۲ ۳٫۵ ۳ ۴ ۴٫۵ ۴ ۱۷۱
زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد ۱، ۱ و ۲ متناسبند. این مثلث با مثلثی به طول اضلاع متشابه است. ۱ ۲ و ۱٫۱ و $\sqrt{2}$ ۲ ۱٫۱ و $\frac{1}{2}$ ۳ ۱٫۱ و $\frac{1}{2}$ ۴ ۱٫۱ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۱۷۲	با توجه به شکل زیر، کدام رابطه درست است؟ ۱ $\gamma = \alpha - \beta$ ۲ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ۳ $\alpha + \beta = 90^\circ + \gamma$ ۴ $2\gamma = \alpha + \beta$ ۱۷۳
	در شکل روبه‌رو BR و CS ارتفاع‌های مثلث ABC هستند. کدام دو مثلث متشابه نیستند؟ ۱ ACS و ABR ۲ CRT و BST ۳ CRS و BRS ۴ ASR و ABC ۱۷۴
	در شکل زیر طول ضلع هریک از مربع‌های کوچک یک واحد است. فاصله D از AC چند برابر $\sqrt{5}$ است؟ ۱ ۰٫۸ ۲ ۰٫۹ ۳ ۱ ۴ ۱٫۱ ۱۷۵
	در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶ ۱۷۶

در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۳ و ۵ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطع‌اند. فاصله M از قاعدهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱

۲

۳

۴

در ذوزنقهٔ شکل زیر به طول قاعده‌های ۵ و ۱۰، پاره‌خط EF موازی قاعده‌ها، دو قطر را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر $MN = ۳EM$ ، آن‌گاه کدام $\frac{AE}{ED}$ است؟

۱

۲

۳

۴

در کدام شکل، پاره‌خط EF حتماً با BC موازی است؟

۱

۲

۳

۴

مثلثی که دو زاویهٔ آن ۵۰° و ۷۵° است با مثلثی که دو زاویهٔ آن است، متشابه است.

۱

۲

۳

۴

در شکل زیر نقطهٔ M وسط ضلع AB است. اگر $\frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}$ و $\frac{AN}{NC} = \frac{۲}{۷}$ ، آن‌گاه نسبت $\frac{MN}{BC}$ کدام است؟

۱

۲

۳

۴

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، $AD = x + ۸$ و $A'D' = x - ۱$ نیم‌سازهای دو زاویهٔ متناظر هستند. اگر مساحت مثلث ABC چهار برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ باشد، x کدام است؟

۱

۲

۳

۴

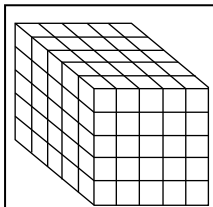
از یک نقطهٔ خارج یک صفحه به ترتیب از راست به چپ، چند خط و چند صفحه موازی با صفحهٔ مفروض می‌توان رسم کرد؟

۱

۲

۳

۴



هر شش وجه شکل زیر را رنگ آمیزی کرده‌ایم. چند مکعب کوچک وجود دارد که فقط دو وجه آن رنگ شده باشد؟

۲۷ ☐ ۲

۱۸ ☐ ۱

۷۴ ☐ ۴

۳۶ ☐ ۳

۱۸۴

مثلث متساوی‌الساقینی را حول قاعده آن دوران داده‌ایم. در این صورت دو مخروط با قاعده یکسان حاصل می‌شود که شعاع قاعده هر کدام از آنها برابر است با

طول ساق مثلث ☐ ۴

نصف طول قاعده مثلث ☐ ۳

طول ارتفاع وارد بر قاعده مثلث ☐ ۲

طول قاعده مثلث ☐ ۱

۱۸۵

برای رسم عمود منصف پاره خط AB به کمک خط کش و پرگار، ابتدا به مرکزهای A و B دایره‌هایی مساوی رسم می‌کنیم؛ شعاع این دایره‌ها باید لزوماً چگونه باشد؟

برابر با طول AB ☐ ۴

کمتر از نصف طول AB ☐ ۳

بیشتر از نصف طول AB ☐ ۲

دلخواه ☐ ۱

۱۸۶

اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه وتر برابر ۸ و فاصله بین پای میانه و ارتفاع وارد بر وتر برابر ۲ باشد، اندازه ضلع بزرگ‌تر زاویه قائمه کدام است؟

$4\sqrt{3}$ ☐ ۴

$3\sqrt{2}$ ☐ ۳

۳ ☐ ۲

۴ ☐ ۱

۱۸۷

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه آن 20° است، زاویه بین و وارد بر وتر، از سایر گزینه‌ها بزرگ‌تر است.

ارتفاع - میانه ☐ ۴

نیمساز - ارتفاع ☐ ۳

نیمساز - میانه ☐ ۲

ضلع کوچکتر - ارتفاع ☐ ۱

۱۸۸

خط d و دو نقطه A و B در یک صفحه مفروض‌اند. در کدام حالت، حتماً نقطه‌ای روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد؟

خط d ، امتداد پاره خط AB را قطع کند. ☐ ۲

خط d و از نقطه A عبور کند. ☐ ۱

خط d ، موازی پاره خط AB باشد. ☐ ۴

خط d ، پاره خط AB را در نقطه‌ای بین A و B قطع کند. ☐ ۳

۱۸۹

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های حاده آن 75° است، فاصله نقطه هم‌رسمی میانه‌ها از ارتفاع وارد بر وتر، چه کسری از طول وتر است؟

$\frac{\sqrt{3}}{6}$ ☐ ۴

$\frac{1}{4}$ ☐ ۳

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ ☐ ۲

$\frac{1}{3}$ ☐ ۱

۱۹۰

کدام یک از خواص زیر فقط مختص لوزی نیست؟

طول‌های چهار ضلع برابرند. ☐ ۲

قطرها عمود منصف هم هستند. ☐ ۱

قطرها بر هم عمودند. ☐ ۴

قطرها نیمساز زاویه‌های داخلی هستند. ☐ ۳

۱۹۱

در دوزنقه $ABCD$ ، اندازه ضلع CD برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع AB و BC است. اندازه زاویه A چند درجه است؟

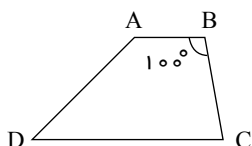
۱۱۰ ☐ ۲

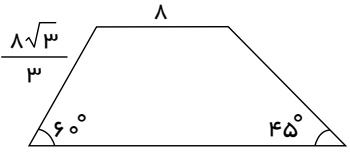
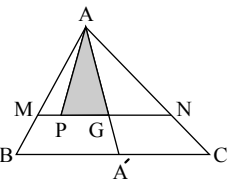
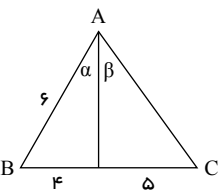
۱۰۰ ☐ ۱

۱۳۰ ☐ ۴

۱۲۰ ☐ ۳

۱۹۲

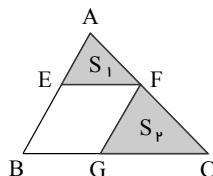


طول قطر بزرگ تر دوزنقه شکل مقابل کدام است؟  $9\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۱) $6\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{10}$ (۳)	۱۹۳
وسط‌های اضلاع یک لوزی به طول ضلع ۵ را به‌طور متوالی به هم وصل کرده‌ایم. محیط چهارضلعی حاصل کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ ۱۱ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۷ (۱)	۱۹۴
در یک دوزنقه قائم‌الزاویه قطرهای بر هم عمودند و طول قاعده‌ها ۳ و ۱۲ است. مساحت این دوزنقه کدام است؟ ۷۵ (۴) ۶۰ (۳) ۴۵ (۲) ۳۰ (۱)	۱۹۵
چند دایره می‌توان رسم کرد که پاره خط AB به طول ۲ واحد، وتری از آن باشد؟ بی‌شمار (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)	۱۹۶
در شکل زیر نقطه G محل هم‌رسمی میانه‌های مثلث ABC، $MN \parallel BC$ و $GP = 3MP$ است. مساحت مثلث هاشورخورده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟  $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$ (۳)	۱۹۷
در مثلث ABC اگر O نقطه هم‌رسمی میانه‌ها باشد، سه مثلث OAB و OBC و OAC همواره نسبت به هم کدام حالت را دارند؟ هم‌نهشت (۱) متشابه (۲) هم‌مساحت (۳) غیر مشخص (۴)	۱۹۸
با توجه به شکل روبه‌رو، کدام تساوی برقرار است؟  $\hat{C} = \alpha$ (۲) $\hat{B} = \beta$ (۱) $\hat{B} = \alpha$ (۴) $\hat{C} = \beta$ (۳)	۱۹۹
در مثلث قائم‌الزاویه ABC، پاره خط AM میانه وارد بر وتر است. اگر عمود منصف BM از A بگذرد، آن‌گاه فاصله نقطه وسط CM از امتداد AM، چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)	۲۰۰

پاسخنامه تشریحی

گزینه ۴

$$S_{EFGH} = S_{\triangle ABC} - (S_1 + S_2)$$



هر ۳ مثلث AEF و FGC و ABC با همدیگر متشابهند. اگر مساحت مثلث ABC را برابر با S در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{EF}{BC} \quad (1)$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{GC}{BC}\right)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{GC}{BC} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{EF}{BC} + \frac{GC}{BC} = \frac{BG + GC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 = (\sqrt{S})^2 \Rightarrow S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = S \Rightarrow S - (S_1 + S_2) = 2\sqrt{S_1 S_2}$$

$$\Rightarrow S_{EFGH} = S - (S_1 + S_2) = 2\sqrt{S_1 S_2}$$

۱

گزینه ۲ مساحت چندضلعی بیرونی را S_1 و مساحت چندضلعی درونی را S_2 می‌نامیم. خواهیم داشت:

$$S_1 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 12 + \frac{14}{2} - 1 = 18 \\ S_2 = \frac{7}{2} + 3 - 1 = 5,5 \end{cases}$$

$$S_1 - S_2 = 18 - 5,5 = 12,5 \Rightarrow \frac{S_1 - S_2}{S_1} = \frac{12,5}{18} = \frac{25}{36}$$

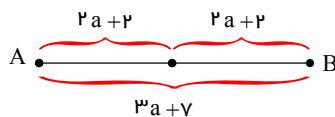
۲

گزینه ۲ اگر یک نقطه باشد آن نقطه دقیقاً وسط پاره خط AB قرار دارد.

$$2 \times (2a + 2) = 3a + 7$$

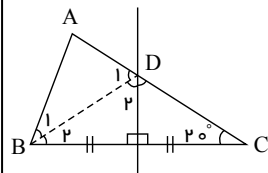
$$4a + 4 = 3a + 7$$

$$a = 3$$



۳

گزینه ۴ می‌دانیم اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.



نقطه D روی عمودمنصف ضلع BC واقع است، پس از دو سر آن به یک فاصله است، یعنی: $DB = DC$. بنابراین مثلث BDC متساوی‌الساقین است و نتیجه می‌گیریم که دو زاویه $\hat{B}_2$ و $\hat{C}$ برابرند: $\hat{B}_2 = \hat{C} = 20^\circ$

$$\hat{BDC} : \hat{D}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{D}_2 + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 = 140^\circ$$

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 + 140^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{ADB} = \hat{D}_1 = 40^\circ$$

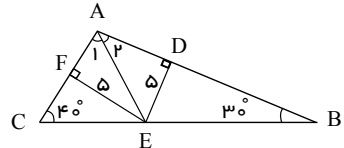
۴

گزینه ۴ چون $OA = AB = OB$ پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه $\hat{AOB} = 60^\circ$ می‌باشد.

۵

گزینه ۴

$$ED = EF \Rightarrow E \text{ روی نیمساز } \hat{A} \text{ قرار دارد.} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$



۶

$$\triangle ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ \Rightarrow \angle CAE = 55^\circ$$

گزینه ۳

نکته: نقطه همرسی عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث از تمامی رئوس آن مثلث به یک فاصله است. بنابراین:

$$OA = OB = OC \Rightarrow \begin{cases} OA = OB \Rightarrow x + 2 = 3x - 4 \Rightarrow x = 3 \\ OA = OC \Rightarrow (3) + 2 = y + 2 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

در نتیجه: $x + y = 6$

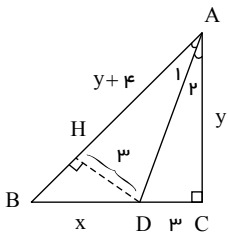
۷

گزینه ۳ هر گاه بر اساس تعداد محدودی آزمایش، اندازه‌گیری و یا حدس و گمان به یک نتیجه کلی برسیم، از استدلال استقرایی استفاده کرده‌ایم.

۸

گزینه ۳

کافی است از D به ضلع AB عمود رسم کنیم. چون نقطه D روی نیمساز زاویه BAC است بنابراین: $DH = DC = 3cm$



۹

از طرفی: $AH = AC = y$ در نتیجه:

$$BH = BA - AH \Rightarrow BH = y + 4 - y = 4$$

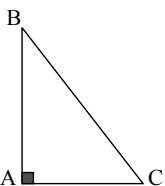
بنابراین:

$$\triangle BHD : \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow BD^2 = HD^2 + BH^2 \Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$$

گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع قائم حکم ارتفاع وارد بر ضلع قائمه دیگر را دارد. از طرفی اضلاع قائمه یا با هم برابرند و یا نابرابر که در هر دو صورت یکی از ارتفاع‌ها از ضلع متناظر آن بزرگ‌تر و یا با ضلع متناظر مساوی خواهد بود.

۱۰



گزینه ۳

باتوجه به نامساوی مثلثی در مثلث‌های بالا و پائین داریم:

$$\triangle ABD : 3x - 1 < 3 + 4 \Rightarrow 3x < 8$$

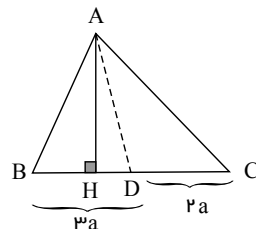
$$\triangle BCD : y < (3x - 1) + 2 \Rightarrow y < 3x + 1 \xrightarrow{3x < 8} y < (8) + 1 \Rightarrow y < 9$$

از آنجایی که y عددی طبیعی است خواهیم داشت: $\max(y) = 8$

۱۱

گزینه ۱ نکته: اگر دو مثلث دارای ارتفاع یکسان باشند، نسبت مساحت آنها برابر است با نسبت اندازه قاعده‌هایی که این ارتفاع بر آنها وارد شده است. بنابراین:

$$2BD = 3DC = 6a \Rightarrow \begin{cases} BD = 3a \Rightarrow S_{\triangle ABD} = 3S \\ CD = 2a \Rightarrow S_{\triangle ACD} = 2S \end{cases}$$



۱۲

در نتیجه:

$$5S = 75 \Rightarrow S = \frac{75}{5} = 15 \Rightarrow S_{\triangle ABD} = 3 \times 15 = 45$$

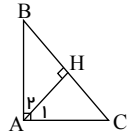
گزینه ۲: گزینه ۱: در استدلال استقرایی از جزء به کل می‌رسیم.

گزینه ۳: قضیه‌ها با استدلال استنتاجی ثابت می‌شوند.

گزینه ۴: عکس قضیه ممکن است درست باشد یا نادرست.

گزینه ۳ ابتدا با برهان خلف فرض می‌کنیم که AH بر BC عمود باشد ($\hat{AHB} = 90^\circ$) در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \triangle ACH : \hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ & \text{قائم الزاویه} \\ \triangle ABC : \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ & \text{قائم الزاویه} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}$$

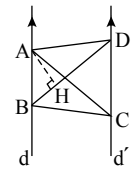


که در تناقض با فرض مسئله است. پس AH نمی‌تواند بر BC عمود باشد یعنی فرض برهان باطل و حکم ثابت می‌شود. ($\hat{AHB} \neq 90^\circ$)

از طرفی با توجه به این که در فرضیات مسئله شرطی جز $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{A}_1 \neq \hat{B}$ مطرح نشده، لذا دو زاویه B و C می‌توانند با یکدیگر برابر باشند ($\hat{A}_1 \neq \hat{B}$) بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» نیز لزوماً صحیح نمی‌باشند.

گزینه ۳ دو مثلث ABC و ABD ، قاعده‌ی یکسان (AB) و ارتفاع یکسان دارند، بنابراین این دو مثلث مساحت یکسان دارند. پس:

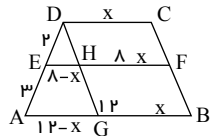
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABD} &= 12 \Rightarrow \frac{1}{2} \times AH \times BD = 12 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \times AH \times 4 &= 12 \Rightarrow AH = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$



گزینه ۲

از رأس D به موازات ضلع BC ، DG را رسم می‌کنیم.

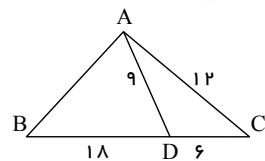
$$\begin{aligned} \triangle ADG : EH \parallel AG &\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{DE}{AD} = \frac{EH}{AG} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{8-x}{12-x} \\ \Rightarrow 24 - 2x &= 40 - 5x \Rightarrow 3x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3} \end{aligned}$$



گزینه ۴

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \hat{C} \\ \frac{DC}{AC} &= \frac{AC}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{دو ضلع متناسب} \\ \text{و زاویه بین} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABC$$

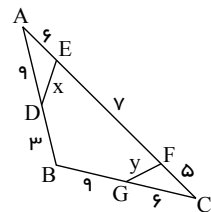
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2 \times (9) = 18$$



$$\triangle ABD : \text{محیط } AD + BD + AB = 18 + 9 + 18 = 45$$

گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \\ \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو ضلع متناسب و زاویه بین}} \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{9}{18} \Rightarrow x = 7.5 \quad (1)$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \\ \frac{CF}{BC} = \frac{GC}{AC} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو ضلع متناسب و زاویه بین}} \triangle CFG \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{FG}{AB} = \frac{CF}{BC} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{5}{15} \Rightarrow y = 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x + y = 7.5 + 4 = 11.5$$

گزینه ۳ مثلث‌های ABC و ACD به حالت تناسب دو ضلع متناظر و برابری زاویه بین متشابه‌اند:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مشتک } \hat{C} \\ \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 6$$

$$\triangle ABD \text{ محیط: } AB + AD + BD = 6 + 3 + 6 = 15$$

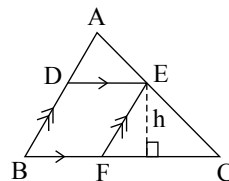
گزینه ۱

$$FC \text{ فاصله } E \text{ از } h = 1 \Rightarrow h = 1$$

$$S_{\triangle EFC} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times h \times FC = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 1 \times FC = 2 \Rightarrow FC = 4$$

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EC}{AE} = \frac{FC}{BF} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{BF} \Rightarrow BF = 3$$

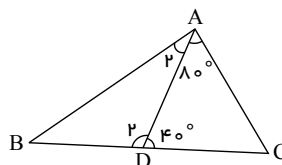
$$DEFB \text{ ارتفاع متوازی الاضلاع } = h = 1 \Rightarrow S_{DEFB} = BF \times h = 3 \times 1 = 3$$



۲۰

گزینه ۳

$$\triangle ABC : \hat{C} = 180 - (80 + 40) = 60^\circ$$



۲۱

با توجه به اینکه هر زاویه خارجی یک مثلث از تک تک زاویه‌های داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}_1 > \hat{A}_r \\ \hat{D}_1 > \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{\hat{A}_1 > \hat{D}_1, \hat{C} > \hat{D}_1} \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 > \hat{A}_r \\ \hat{C} > \hat{A}_r \\ \hat{C} > \hat{B} \end{array} \right.$$

گزینه ۳

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{CDE} = 90^\circ \\ (\text{مشتک}) \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{نز}} \triangle ABC \sim \triangle CED \Rightarrow \frac{ED}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = K$$

اگر مساحت مثلث CED را S در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S}{S+12} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4S = S+12 \Rightarrow 3S = 12 \Rightarrow S = 4$$

۲۲

از طرفی:

$$S_{\triangle CED} = \frac{3 \times x}{2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{3 \times x}{2} = 4 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

گزینه ۳

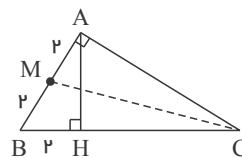
طبق رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 4^2 = 2 \times BC \Rightarrow BC = 8 \rightarrow CH = 6$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow AC^2 = 6 \times 8 = 48 \rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle ACM : AM^2 + AC^2 = MC^2$$

$$\Rightarrow 2^2 + (4\sqrt{3})^2 = MC^2 \Rightarrow MC = \sqrt{52} \Rightarrow MC = 2\sqrt{13}$$



۲۳

روش دوم:

$$BH = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ABH : \hat{BAH} = 30^\circ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{C} = 30^\circ \rightarrow BC = 2AB = 2 \times 4 = 8 \\ \hat{B} = 60^\circ \rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$\triangle AMC : MC^2 = AC^2 + AM^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2 = 52 \Rightarrow MC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

۳۰

گزینه ۱

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow x^2 = 2 \times 8 = 16 \xrightarrow{x > 0} x = 4$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \xrightarrow{AB > 0} AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

HK و BA هر دو بر AC عمودند، بنابراین:

$$KH \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{y}{AB} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow \frac{y}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{10} \Rightarrow y = \frac{8 \times 2\sqrt{5}}{10} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

۲۴

گزینه ۲

$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AQ}{AP} = \frac{MQ}{BP} \\ \frac{AQ}{AP} = \frac{QN}{PC} \end{cases} \Rightarrow \frac{MQ}{BP} = \frac{QN}{PC} \Rightarrow \frac{PC}{BP} = \frac{QN}{MQ} \Rightarrow \frac{QN}{MQ} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{AQN}}{S_{AMQ}} = \frac{QN}{MQ} \Rightarrow \frac{S_{AQN}}{S_{AMQ}} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$MQ \parallel BP \Rightarrow \triangle AMQ \sim \triangle ABP$$

$$k = \frac{AM}{AB} \xrightarrow{\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}} k = \frac{2}{5}$$

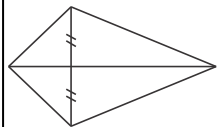
$$\frac{S_{AMQ}}{S_{ABP}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{AMQ}}{S_{ABP}} = \frac{4}{25} \xrightarrow{\text{تفضیل}} \frac{S_{AMQ}}{S_{ABP} - S_{AMQ}} = \frac{4}{25 - 4} \Rightarrow \frac{S_{AMQ}}{S_{MQPB}} = \frac{4}{21} \quad (2)$$

از ضرب طرفین رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{S_{AQN}}{S_{AMQ}} \times \frac{S_{AMQ}}{S_{MQPB}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{21} \Rightarrow \frac{S_{AQN}}{S_{MQPB}} = \frac{2}{21}$$

۲۵

گزینه ۲



جمله «الف» نادرست و بقیه جملات درست می‌باشند.
برای مشخص کردن نادرستی جمله «گزاره» «الف» می‌توان شکل زیر را رسم کرد که در آن یکی از قطرهای عمودمنصف دیگری است. اما لوزی نیست.

۲۶

گزینه ۴

عکس قضیهٔ مربوط به گزینهٔ «۴»، به صورت زیر است:

«اگر در دوزنقه‌ای زوایای مجاور به ساق‌ها مکمل هم باشند، آن دوزنقه متساوی‌الساقین است.» و این گزاره لزوماً صحیح نمی‌باشد؛ زیرا در هر دوزنقه‌ای این مطلب درست است و فقط دوزنقه متساوی‌الساقین را شامل نمی‌شود.

۲۷

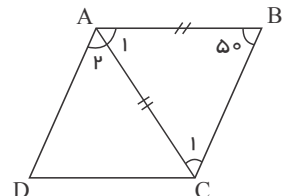
گزینه ۲

نکته: در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای روبه‌رو با هم برابرند. بنابراین:

$$2x + 4 = 3x - 19 \Rightarrow x = 23$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 2(23^\circ) + 4^\circ = 50^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{B} = 50^\circ \text{ و } \hat{A} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= 180^\circ - (2 \times 50^\circ) = 80^\circ \\ \hat{A}_2 &= 130^\circ - 80^\circ = 50^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\hat{A}_1}{\hat{A}_2} = \frac{80^\circ}{50^\circ} = \frac{8}{5}$$



۲۸

گزینه ۳

از نقطه C خطی را موازی با ساق AD رسم می‌کنیم تا پاره‌خط AB را در نقطه‌ای مانند E قطع کند.

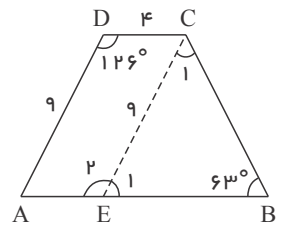
چهارضلعی ADCE متوازی‌الاضلاع خواهد شد، بنابراین: $AE = DC = 4$

$$\hat{D} = \hat{E}_2 = 126^\circ \Rightarrow \hat{E}_1 = 54^\circ$$

از طرفی در مثلث EBC داریم:

۲۹

$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (63^\circ + 54^\circ) = 63^\circ$$



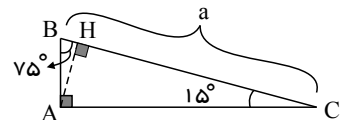
در نتیجه $\hat{B} = \hat{C}_1 = 63^\circ$ بنابراین مثلث EBC متساوی الساقین خواهد بود و $EC = EB = 9$ در نتیجه:

$$AB = AE + EB = 4 + 9 = 13$$

گزینه ۱

$$1x + 5x + 6x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ \text{ و } 5x = 75^\circ \text{ و } 6x = 90^\circ$$



از طرفی می دانیم که در مثلث قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویه ۱۵ درجه $\frac{1}{4}$ وتر است. پس: $AH = \frac{1}{4}a$

بنابراین مساحت مثلث مورد نظر برابر است با:

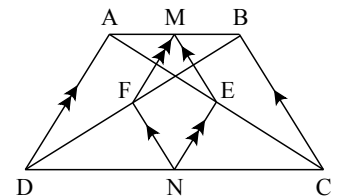
$$S = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}a \times a = \frac{1}{8}a^2$$

گزینه ۴

در چهارضلعی $ABCD$ ، نقاط M و N وسط اضلاع AB و CD و نقاط E و F وسط قطرها هستند.

$$\triangle ABC : \frac{AM}{MB} = \frac{AE}{EC} = 1 \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} ME = \frac{BC}{2}$$

$$\triangle BDC : \frac{DF}{FB} = \frac{DN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} NF = \frac{BC}{2}$$



بنابراین $ME = NF = \frac{BC}{2}$ است. همچنین به طریق مشابه می توان نشان داد که $MF = NE = \frac{AD}{2}$ است. بنابراین با فرض لوزی بودن چهارضلعی $MENF$ داریم:

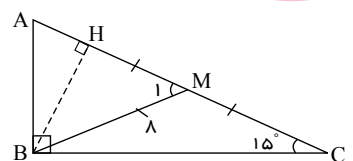
$$ME = MF \Rightarrow \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} \Rightarrow BC = AD$$

گزینه ۲

$$\triangle BMC \rightarrow \hat{C} = \hat{B} = 15^\circ \rightarrow \hat{M}_1 = 30^\circ$$

$$\triangle BMH : \hat{M}_1 = 30^\circ \rightarrow BH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times (8 + 8) = 32$$



گزینه ۱

$$\text{مجموع زوایای داخلی} = (n - 2) \times 180^\circ = 150^\circ + 130^\circ + 60^\circ + (n - 3) \times 140^\circ$$

$$180^\circ n - 360^\circ = 340^\circ + 140^\circ n - 420^\circ$$

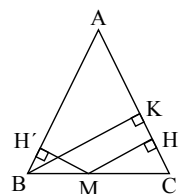
$$40^\circ n = 280^\circ \rightarrow n = \frac{280^\circ}{40^\circ} = 7$$

$$\text{تعداد اقطار} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{7 \times 4}{2} = 14 \quad 14 \text{ قطر دارد}$$

گزینه ۳

در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده از دو ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

$$S_{ABC} = \frac{BK \times AC}{2} \Rightarrow 15 = \frac{BK \times 6}{2} \Rightarrow BK = 5$$

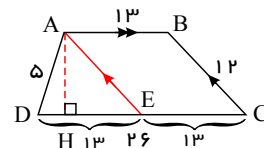


بنابراین با توجه به این که $MH = 2MH'$ داریم:

$$MH + MH' = BK \Rightarrow MH + \frac{MH}{2} = 5 \Rightarrow \frac{3}{2}MH = 5 \Rightarrow MH = \frac{10}{3}$$

گزینه ۳ از نقطه A به موازی BC رسم می کنیم تا متوازی الاضلاع ABCE تشکیل شود.

$$\triangle ADE: 13^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow \hat{DAE} = 90^\circ$$



ارتفاع AH مثلث ADE را رسم می کنیم. داریم:

۳۵

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times AH \times DE = \frac{1}{2} \times AD \times AE$$

$$AH \times 13 = 5 \times 12 \Rightarrow AH = \frac{60}{13}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AH(AB + DC) = \frac{1}{2} \times \frac{60}{13} \times (13 + 26) = \frac{1}{2} \times \frac{60}{13} \times \frac{39}{1} = 90$$

گزینه ۱ نکته ۱) اگر وسط های اضلاع هر نوع مثلثی را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم نوشت و هم مساحت ایجاد می شود. بنابراین:

$$S_{\triangle MNC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

نکته ۲) اگر میانه های یک مثلث را رسم کنیم، ۶ مثلث هم مساحت ایجاد می شود. یعنی:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle AGN} &= \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} \\ S_{\triangle GNC} &= \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\triangle AGN} + S_{\triangle GNC} = \frac{2}{6} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle AGC} = \frac{2}{6} S_{\triangle ABC}$$

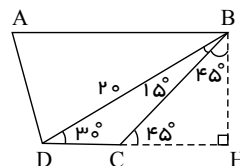
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle AGC}} = \frac{\frac{1}{4} S_{\triangle ABC}}{\frac{2}{6} S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{2} = \frac{3}{4}$$

۳۶

گزینه ۳ از نقطه B ارتفاع وارد بر ضلع DC را رسم می کنیم. در مثلث DBH داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H} &= 90^\circ \\ \hat{D} &= 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{CBH} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ \Rightarrow \hat{BCH} = 45^\circ$$



بنابراین مثلث CBH قائم الزاویه متساوی الساقین است و $CH = BH$ از طرفی در مثلث DBH داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H} &= 90^\circ \\ \hat{D} &= 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow BH = CH = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} (20) = 10$$

و همچنین:

$$DH = \frac{\sqrt{3}}{2} BD \Rightarrow DH = \frac{\sqrt{3}}{2} (20) = 10\sqrt{3}$$

$$CD = DH - CH = 10\sqrt{3} - 10$$

بنابراین:

با توجه به این که مساحت دوزنقه داده شده برابر با 200 cm^2 است خواهیم داشت:

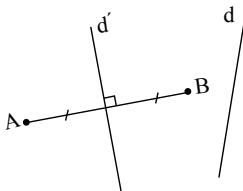
$$S = \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times BH = 200 \Rightarrow \frac{1}{2} (AB + 10\sqrt{3} - 10) \times 10 = 200$$

$$\Rightarrow AB + 10\sqrt{3} - 10 = 40 \Rightarrow AB = 50 - 10\sqrt{3}$$

۳۷

گزینه ۳

نقاط A و B و خط d را در نظر می گیریم. مجموعه نقاطی که از A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره خط AB می باشد.



۳۸

نقطه یا نقاط برخورد خط d و عمودمنصف AB (خط d') جواب مسئله است.

بررسی گزینه ها:

گزینه ۱: اگر d و d' با هم موازی باشند، مسئله جواب ندارد.

گزینه ۲: اگر d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد.

گزینه ۴: اگر d و d' بر هم منطبق باشند، مسئله بی شمار جواب دارد.

دو خط d و d' نمی توانند در دو نقطه همدیگر را قطع کنند، پس گزینه ۳، صحیح است.

گزینه ۴ از فرمول پیک استفاده می کنیم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \quad (b \text{ تعداد نقاط مرزی و } i \text{ تعداد نقاط درونی})$$

$$S_1 = \frac{7}{2} + 11 - 1 = \frac{7}{2} + 10 = \frac{27}{2}$$

$$S_2 = \frac{3}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$S = \frac{27}{2} - \frac{5}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

۳۹

گزینه ۲ بنابر فرض $S = \frac{b+i}{2}$ است. با استفاده از دستور پیک داریم:

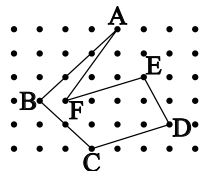
$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{b+i}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{b}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow \frac{i}{2} = 1 \Rightarrow i = 2$$

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{b}{2} + 1 \xrightarrow{b=3} S_{\min} = \frac{3}{2} + 1 = 2,5$$

۴۰

گزینه ۳ با توجه به فرمول $S = \frac{b}{2} + i - 1$ ، کمترین مقدار برای S زمانی حاصل می شود که $(\frac{b}{2} + i)$ کمترین مقدار خود را داشته باشد. حال با توجه به شکل داریم:

$$b = 9, i = 6$$



در نتیجه:

$$S = \frac{9}{2} + 6 - 1 = \frac{19}{2}$$

۴۱

گزینه ۴

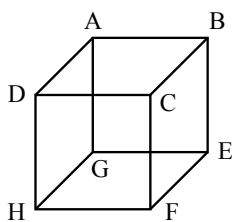
برای بررسی سایر گزینه ها بهتر است منشوری مانند مکعب زیر را در نظر بگیریم.

گزینه ۱) خطوط AB و CB بر خط BE عمود هستند اما موازی نیستند.

گزینه ۲) خطوط DC و DH با صفحه $ABEG$ موازی اند اما با یکدیگر متقاطعند. (موازی نیستند)

گزینه ۳) خطوط AD و BE نسبت به خط HF متناظرند ولی موازی نیستند.

بنابراین صرفاً گزینه ۴ همواره درست است.



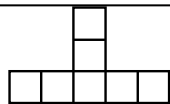
۴۲

گزینه ۴ همه موارد صحیح است.

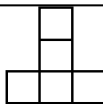
۴۳

گزینه ۲ نمای شکل را از بالا، چپ و روبرو رسم می کنیم.

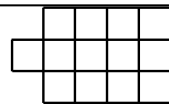
۴۴



نمای روبرو



نمای چپ



نمای بالا

بنابراین مجموع مربع‌های داخلی از سه نمای رسم شده برابر است با: $7 + 5 + 12 = 24$

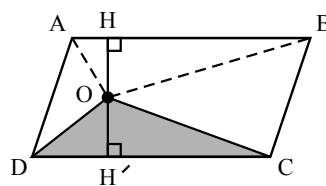
گزینه ۴ اگر صفحه‌ای موازی با خط d باشد ممکن است با یکی از دو صفحه P_1 و P_2 موازی بوده که در این صورت با صفحه دیگر متقاطع باشد و یا اینکه می‌تواند با هر دو صفحه P_1 و P_2 متقاطع باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

گزینه ۳ اگر O نقطه‌ای دلخواه درون متوازی‌الضلاع $ABCD$ باشد، داریم:

$$S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}OH \times AB + \frac{1}{2}OH' \times DC$$

$$\xrightarrow{AB=DC} S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}(OH + OH') \times AB \Rightarrow \frac{1}{2} \times HH' \times AB = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{\triangle OCD} + 65 = \frac{1}{2} \times 300 = 150 \Rightarrow S_{\triangle OCD} = 85$$



گزینه ۲ یک صفحه در فضا به صورت‌های زیر مشخص می‌شود.

الف) سه نقطه غیر واقع بر یک خط $\leftarrow$ پس گزینه ۱ صفحه را مشخص می‌کند.

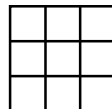
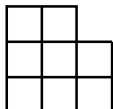
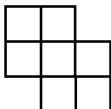
ب) دو خط موازی یا دو خط متقاطع در فضا $\leftarrow$ پس گزینه ۳ که دو خط بر یک صفحه عمودند، با هم موازیند بنابراین یک صفحه را مشخص می‌کند.

ج) یک خط و یک نقطه خارج آن $\leftarrow$ پس گزینه ۴ یک صفحه را مشخص می‌کند ولی از دو خط متناظر صفحه‌ای عبور نمی‌کند.

گزینه ۲ دو صفحه عمود بر یک صفحه، لزوماً با یکدیگر موازی نیستند، پس گزینه ۲ در حالت کلی درست نیست.

گزینه ۱ همان‌طور که در شکل گسترده مشاهده می‌کنید، اعداد (۱، ۳) و (۵، ۶) و (۲، ۴) مقابل هم قرار می‌گیرند، بنابراین گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» نادرست می‌باشند.

گزینه ۲ حل نماهای ۱، ۲ و ۴ به صورت



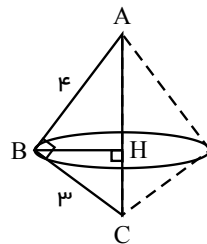
دیده می‌شود.

یا

دیده می‌شود. ولی از نمای ۳ به صورت

گزینه ۱ طبق رابطه فیثاغورس:

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \rightarrow AC = 5$$



از طرفی:

$$AB \times BC = BH \times AC \quad 4 \times 3 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{12}{5}$$

اگر $\triangle ABC$ را حول AC دوران دهیم دو مخروط را به هم چسبیده از قاعده با شعاع BH تشکیل می‌شود.

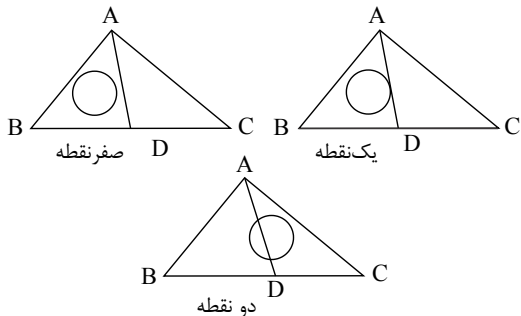
$$V = V_{\text{مخروط پایین}} + V_{\text{مخروط بالا}} = \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times AH + \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times CH = \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \underbrace{(AH + CH)}_{AC}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times 5 = \frac{48\pi}{5}$$

گزینه ۴

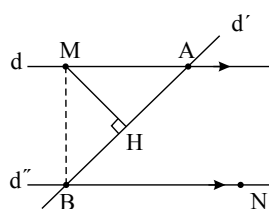
می دانیم هر نقطه روی نیمساز رأس A از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است، بنابراین تعداد نقاط برخورد نیمساز AD با دایره مفروض جواب مسئله است. بسته به موقعیت دایره، AD می تواند دایره را در دو نقطه قطع کند یا در یک نقطه بر آن مماس باشد و یا اصلاً آن را قطع نکند. پس AD و دایره حداکثر در دو نقطه متقاطع اند.

۵۲



گزینه ۲

باتوجه به شکل داریم:



۵۳

$M \Rightarrow MA = MB$ روی عمود منصف AB است.

مثلث MAB متساوی الساقین است. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{MBH} = \hat{MAH} (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel d'' \\ AB \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{HBN} = \hat{MAH} \xrightarrow{(*)} \hat{MBH} = \hat{HBN}$$

از طرفی طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

بنابراین AB نیمساز زاویه MBN است.

گزینه ۱

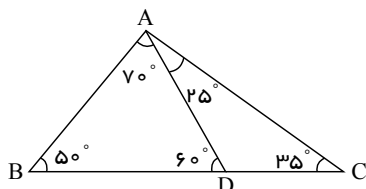
عکس قضیه شرطی گزینه ۱ عبارت است از: اگر مساحت های دو مثلث برابر یکدیگر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند. واضح است که این موضوع در حالت کلی صحیح نیست، پس عبارت مورد نظر نمی تواند یک قضیه شرطی باشد. برای مثال اگر میانه در یک مثلث رسم شود دو مثلث هم مساحت ایجاد می شود ولی همنهشت نیستند.

۵۴

گزینه ۲

طبق قضیه زاویه برتر ضلع برتر، در هر مثلث ضلع روبرو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است:

گزینه ۲: در مثلث ABD ، $\hat{BAD} > \hat{BDA}$ ، پس $BD > AB$.



سایر گزینه ها صحیح اند زیرا:

گزینه ۱:

$$\triangle ABC : \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$$

گزینه ۳:

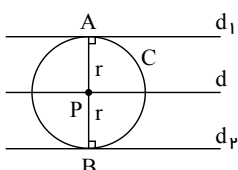
$$\triangle ACD : \hat{ADC} > \hat{C} \Rightarrow AC > AD$$

گزینه ۴:

$$\triangle ABD : \hat{BAD} > \hat{B} \Rightarrow BD > AD$$

گزینه ۱

با استفاده از مفهوم مکان هندسی داریم:



نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت r قرار داشته باشند، دو خط موازی با خط d و به فاصله r از آن هستند. (خطوط d_1 و d_2 در شکل). همچنین نقاطی از صفحه که از نقطه P به فاصله r قرار داشته باشند، روی دایره ای به مرکز P و به شعاع r واقع اند (دایره C در شکل). همان طور که در شکل مشاهده می شود، دایره C در نقاط A و B به ترتیب بر خطوط d_1 و d_2 مماس است، پس تنها این دو نقطه، جواب های مسئله هستند.

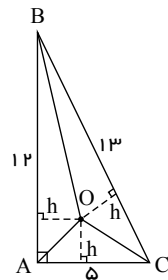
۵۶

گزینه ۲

در مثلث قائم الزاویه ABC ، داریم:

۵۷

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 13 \text{ (وتر مثلث)}$$



محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث، از سه ضلع آن فاصله یکسانی دارد (ویژگی هر نقطه روی نیمساز) که این فاصله را h می‌نامیم. داریم:

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{12h}{2} + \frac{5h}{2} + \frac{13h}{2} = \frac{12 \times 5}{2}$$

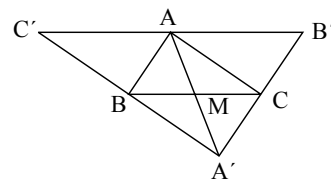
$$\Rightarrow 15h = 30 \Rightarrow h = 2$$

گزینه ۲ از هر رأس مثلث مختلف الاضلاع ABC ، خطی به موازات ضلع مقابل رسم شده است.

$$\left. \begin{array}{l} AB' \parallel BC \\ AB \parallel B'C \end{array} \right\} \Rightarrow ABCB' \text{ متوازی الاضلاع است.} \Rightarrow AB' = BC$$

$$\left. \begin{array}{l} AC' \parallel BC \\ AC \parallel C'B \end{array} \right\} \Rightarrow ACBC' \text{ متوازی الاضلاع است.} \Rightarrow AC' = BC$$

$$\Rightarrow A'B = AC'$$

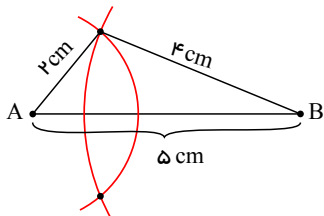


۵۸

بنابراین AA' میانه مثلث $A'B'C'$ است. از طرفی چهارضلعی $ABA'C$ هم متوازی الاضلاع است و قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس AM میانه مثلث ABC است که منطبق بر AA' می‌باشد. به همین ترتیب سایر میانه‌های دو مثلث هم بر هم منطبق‌اند.

گزینه ۳ با استفاده از کاربرد مکان هندسی، دهانه پرگار را به اندازه ۲ سانتی‌متر باز کرده و به مرکز A کماتی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب کماتی به شعاع ۴ سانتی‌متر به مرکز B ترسیم می‌کنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

این دو نقطه دارای یک ویژگی مشترک هستند. هر دو به اندازه ۲ سانتی‌متر از نقطه A و به اندازه ۴ سانتی‌متر از نقطه B فاصله دارند.

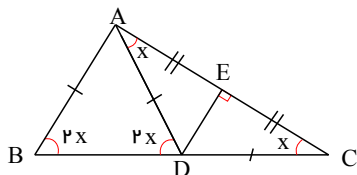


۵۹

گزینه ۳ DE پاره خط AC را نصف کرده و بر آن عمود است. از A به D وصل می‌کنیم. بر روی عمود منصف AC واقع است، بنابراین $AD = DC$ و چون $AB = DC$ پس $AB = AD$ است.

با فرض $\hat{C} = x$ در مثلث ADC داریم:

$$DA = DC \Rightarrow \hat{DAC} = x$$



۶۰

$$\triangle ADC : \hat{ADB} \Rightarrow \hat{ADB} = x + x = 2x$$

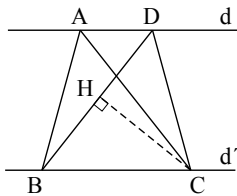
$$\xrightarrow{AB=AD} \hat{B} = 2x \xrightarrow{AC=BC} \hat{BAC} = \hat{B} \Rightarrow \hat{BAC} = 2x$$

$$\triangle ABC : \hat{B} + \hat{C} + \hat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\alpha = 2x + (90^\circ - x) = 90^\circ + x = 90^\circ + 36^\circ = 126^\circ$$

گزینه ۲ اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آن‌ها، روی یک خط موازی با آن قاعده باشند، دلیل آنکه ارتفاع هر دو برابر فاصله دو خط موازی است. این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.

۶۱



بنابراین دو مثلث ABC و BCD هم مساحت اند. پس داریم:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BCD} = 8 \\ \Rightarrow S_{\triangle BCD} &= \frac{CH \times BD}{2} = 8 \xrightarrow{DB=4} CH = 4 \end{aligned}$$

گزینه ۲ دو مثلث ABC و ABD دارای قاعده مشترک AB هستند و همچنین ارتفاعهای نظیر این قاعده در دو مثلث، طول یکسانی دارند (فاصله دو خط موازی) پس $S_{ABC} = S_{ABD}$. با کم کردن مساحت مثلث AOB از مساحت این دو مثلث، داریم:

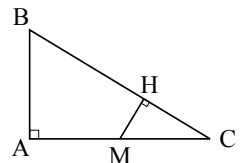
$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle AOD} &= S_{\triangle BOC} \\ \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle DOC}} &= \frac{AO}{OC} \\ \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} &= \frac{AO}{OC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle DOC}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} \xrightarrow{S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = x} \frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 4 + 6 + 9 + 6 = 25$$

گزینه ۲ چون M وسط AC است پس داریم: $AC = 2MC$.

$$\begin{aligned} \triangle ABC &\sim \triangle MHC \Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{MH}{AB} = \frac{HC}{AC} \\ \frac{MC}{BC} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BC = \frac{4}{\sqrt{3}} MC \end{aligned}$$



$$\frac{HC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{HC}{2MC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{3}}{2} MC$$

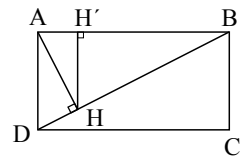
با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$MC^2 = MH^2 + HC^2 = 3 + \frac{3}{4} MC^2 \Rightarrow MC^2 = 12 \Rightarrow MC = 2\sqrt{3} \xrightarrow{BC = \frac{4}{\sqrt{3}} MC} BC = 8$$

گزینه ۲ در مثلث قائم الزاویه ABD ، داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow BD = 4$$

$$AB^2 = BD \cdot BH = 12 = 4 \times BH \Rightarrow BH = 3$$



حال اگر از H ، عمود HH' را بر ضلع AB رسم کنیم، داریم:

$$HH' \parallel AD \Rightarrow \frac{HH'}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{HH'}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow HH' = \frac{3}{2}$$

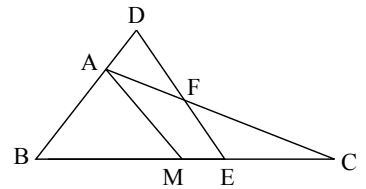
گزینه ۲ بنابه فرض $BM = CM$ است. به کمک قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle AMC : EF \parallel AM &\Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{CE}{CM} \\ \triangle BDE : AM \parallel DE &\Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BE}{BM} = BM = CM \frac{BE}{CM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{CE + BE}{CM} = \frac{BC}{CM}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{2CM}{CM} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} + \frac{DE}{AM} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AM} = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$



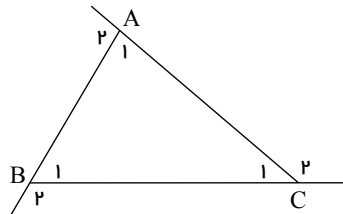
گزینه ۱ در مثلث، اندازه هر زاویه خارجی، برابر مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیر مجاورش می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_r &= \hat{B}_1 + \hat{C}_1 \\ \hat{B}_r &= \hat{A}_1 + \hat{C}_1 \\ \hat{C}_r &= \hat{A}_1 + \hat{B}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_r + \hat{B}_r + \hat{C}_r = 2(\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1)$$

$$\hat{A}_r + \hat{B}_r + \hat{C}_r = 360^\circ$$

مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، پس داریم:

در نتیجه گزینه ۱ نادرست است.



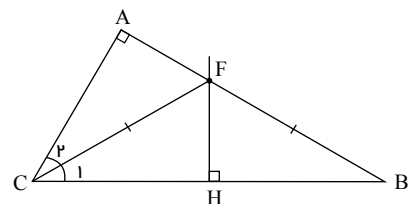
۶۶

گزینه ۴ نقطه‌ای روی عمودمنصف وتر BC می‌باشد و هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است بنابراین داریم:

$$FB = FC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_1 \quad (*)$$

همچنین می‌دانیم $FH = AF$ است. درواقع فاصله نقطه F از اضلاع AC و BC برابر بوده و بنابراین F نقطه‌ای روی نیمساز زاویه C است؛ یعنی CF نیمساز زاویه C می‌باشد.

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{C}_1 &= \hat{C}_r \\ \hat{C}_1 &= \hat{B} \end{aligned} \right. \Rightarrow \hat{C}_r = \hat{B} \quad (**)$$



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C}_1 + \hat{C}_r = 90^\circ$$

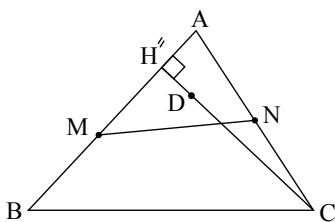
$$\xrightarrow{(*),(**)} 3\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

۶۷

گزینه ۳ با توجه به اینکه سه ارتفاع مثلث ABC در یک نقطه هم‌رس هستند، پس بر ضلع AB عمود خواهد بود.

همچنین محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث AMN می‌باشد؛ یعنی اگر از نقطه D بر AB عمود رسم کنیم، همان عمودمنصف ضلع AM خواهد بود؛ بنابراین DH'' عمودمنصف AM می‌باشد.

C نقطه‌ای روی عمودمنصف AM است پس داریم:



$$CM = AC$$

۶۸

گزینه ۳ دو مثلث ABC و EAF در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه بین این دو ضلع متشابه‌اند، زیرا $\hat{EAF} = \hat{BAC}$ است و داریم:

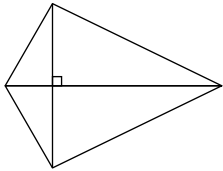
$$\frac{AF}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AE}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \frac{\Delta}{ABC} \sim \frac{\Delta}{EAF}$$

در دو مثلث متشابه، نسبت طول‌های دو جزء فرعی متناظر، مساوی نسبت تشابه است.

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m+3}{6m+4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۶۹

گزینه ۳



گزینه های ۱، ۲ و ۴ قضیه های دو شرطی هستند. اما برای عکس قضیه گزینه ۳، اگر در یک چهارضلعی اندازه دو قطر مساوی و عمود بر هم باشند، آن گاه چهارضلعی مربع است، مثال نقض وجود دارد، مانند شکل زیر:

۷۰

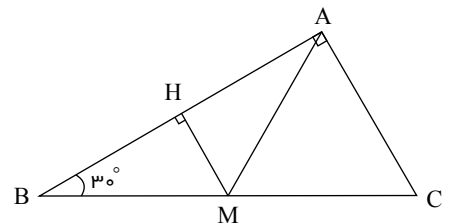
گزینه ۱

در هر مثلث قائم الزاویه، طول میانه وارد بر وتر، نصف طول وتر است.

$$BC = 2AM = 12 \Rightarrow BM = 6$$

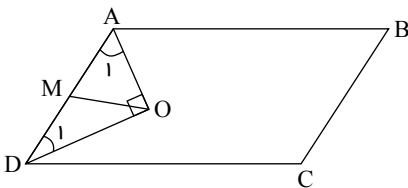
اگر مثلث قائم الزاویه ای زاویه 30° داشته باشد، طول ضلع روبه رو به این زاویه، نصف طول وتر است، پس در مثلث قائم الزاویه BMH داریم:

$$\hat{B} = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2}BM = 3$$



۷۱

گزینه ۳



می دانیم در هر متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مجاور، مکمل یکدیگرند، بنابراین داریم:

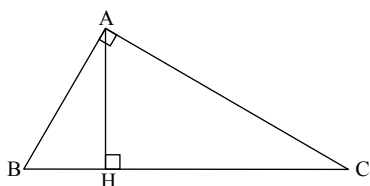
$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \xrightarrow{\Delta AOD} \hat{O} = 90^\circ$$

یعنی مثلث AOD قائم الزاویه است و فاصله نقطه O از وسط ضلع AD ، برابر طول میانه وارد بر وتر می باشد. با توجه به این که طول میانه وارد بر وتر، نصف طول وتر است، پس داریم:

$$OM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

۷۲

گزینه ۴



باتوجه به فرض مسئله $S_{ABC} = 2AH^2$ است. از طرفی با توجه به شکل $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC$ می باشد، پس:

$$\Rightarrow 2AH^2 = \frac{1}{2}AH \times BC \Rightarrow AH = \frac{BC}{4}$$

یعنی در مثلث قائم الزاویه ABC ، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است. (طبق تمرینات کتاب درسی)، اندازه یک زاویه داخلی این مثلث قائم الزاویه 15° و در نتیجه اندازه بزرگ ترین زاویه خارجی آن برابر $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$ است.

۷۳

گزینه ۴

عکس قضیه به صورت زیر است:

در مثلث ABC اگر $\hat{C} > \hat{B}$ باشد آن گاه $AB > AC$.

در اثبات با استفاده از برهان خلف، فرض خلف، نقیض حکم می باشد.

۷۴

$AB \leq AC$: نقیض حکم (فرض خلف) $\Rightarrow AB > AC$: حکم

گزینه ۲

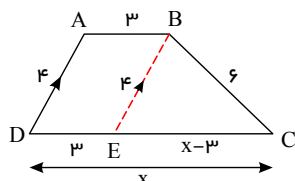
$$\frac{x}{x-2} = \frac{y}{x+5} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{x}{x-2-x} = \frac{y}{y+5-y}$$

۷۵

$$\Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-2}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = 5k \end{cases} (k \neq 0)$$

$$\frac{2xy}{(x+y)^2} = \frac{2(-2k)(5k)}{(-2k+5k)^2} = \frac{-20k^2}{9k^2} = -\frac{20}{9}$$

گزینه ۲



ابتدا شکل فرضی ذوزنقه را رسم می‌کنیم.
از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا ذوزنقه به یک متوازی‌الاضلاع و یک مثلث تقسیم شود.

$ABED \Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow DE = 3, BE = 4$

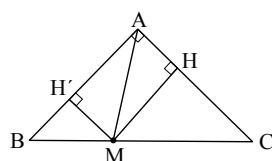
در مثلث BEC طبق نامساوی مثلثی داریم:

$$\begin{aligned} x - 3 &< 6 + 4 \Rightarrow x < 13 & (1) \\ 4 &< x - 3 + 6 \Rightarrow x > 1 & (2) \\ 6 &< x - 3 + 4 \Rightarrow x > 5 & (3) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} 5 < x < 13$$

در بین گزینه‌ها x فقط ۵ نمی‌تواند باشد.

گزینه ۴



مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم $MH > MH'$ باشد. در نتیجه داریم:
 $MH - MH' = 2$ (۱)

از طرفی اگر از نقطه‌ای روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین، دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آن‌ها را قطع کند، آنگاه مجموع طول پاره‌خط‌های ایجاد شده برابر طول ساق مثلث است، پس:

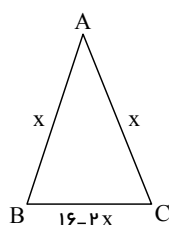
$$MH + MH' = 4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} MH = 3, MH' = 1$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHM داریم:

$$\begin{cases} AM^2 = AH^2 + MH^2 \\ AH = MH' = 1 \end{cases} \Rightarrow AM^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

گزینه ۳



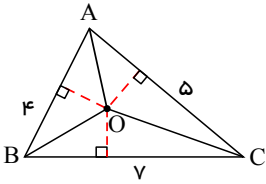
فرض کنیم طول ساق مثلث برابر x باشد. در این صورت طول قاعده مثلث برابر با $16 - 2x$ خواهد بود.

حال بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم:

$$\begin{cases} x + x > 16 - 2x \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > 4 \\ x + (16 - 2x) > x \Rightarrow 2x < 16 \Rightarrow x < 8 \end{cases} \Rightarrow 4 < x < 8$$

بنابراین تنها مقادیر صحیح ممکن برای x ، ۵، ۶ و ۷ هستند.

گزینه ۳



نقطه برخورد نیمسازهای هر مثلث، از سه ضلع آن به یک فاصله اند. این فاصله را h می نامیم. داریم:

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABOC}} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC}} = \frac{\frac{1}{2}h \times ۷}{\frac{1}{2}h \times ۴ + \frac{1}{2}h \times ۵} = \frac{\frac{۷}{2}h}{\frac{۹}{2}h} = \frac{۷}{۹}$$

۷۹

گزینه ۴

$$\frac{AA'}{A'D} = \frac{AB'}{B'B} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} A'B' \parallel BD$$

$$\Rightarrow \triangle AA'B' \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{S_{\triangle AA'B'}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{AA'}{AD}\right)^2 = \frac{1}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{S_{\triangle A'B'D}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow S_{\triangle A'B'D} = \frac{۳}{۴} S_{\triangle ABD} \quad (1)$$

نسبت مساحت های دو مثلث ABD و BCD به دلیل برابر بودن ارتفاع، برابر با نسبت قاعده های آنهاست. بنابراین داریم:

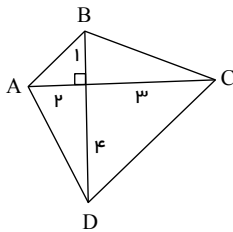
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{AB}{CD} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{۲}{۵}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{۲}{۵} S_{ABCD} \quad (۲)$$

$$(1), (۲) \Rightarrow S_{\triangle A'B'D} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۵} S_{ABCD} = \frac{۳}{۱۰} S_{ABCD}$$

۸۰

گزینه ۱



مثال نقض گزینه های «۲» و «۳»
چهارضلعی شکل زیر هم قطره های برابر دارد و هم قطره های عمود بر هم، ولی نه مستطیل است و نه لوزی!

۸۱

مثال نقض گزینه «۴» مستطیل چهار زاویه برابر دارد ولی منتظم نیست.
گزینه ۱ قابل اثبات است و هیچ مثال نقضی ندارد.

گزینه ۲

دو صفحه عمود بر یک صفحه، لزوماً با یکدیگر موازی نیستند، پس گزینه «۲» در حالت کلی درست نیست.

۸۲

گزینه ۱

می دانیم اگر خطی با یکی از دو صفحه موازی، متقاطع باشد، حتماً با دیگری نیز متقاطع است، پس هر صفحه موازی با صفحه P ، دو خط d و d' را قطع می کند و خط واصل بین دو نقطه تلاقی، شرایط مسئله را داراست.

۸۳

گزینه ۴

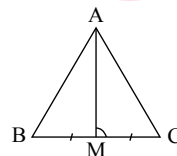
$$\frac{x}{۲} = \frac{۲y}{۶} = \frac{۳z}{۱۲} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{x + ۲y + ۳z}{۲ + ۶ + ۱۲} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{x + ۲y + ۳z}{۲۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x + ۲y + ۳z = ۱۲$$

۸۴

گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}MC = \hat{B}AC \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle ABC$$



۸۵

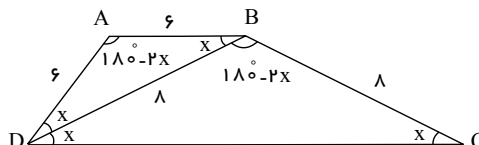
نقطه M وسط BC است، پس داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC^2 = AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}AC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۴

چون $AB \parallel DC$ و BD مورب است، پس $\hat{A}BD = \hat{B}DC$ ، چون دو مثلث ABD و BDC متساوی الساقین هستند، پس $\hat{A}DB = \hat{B}CD$ و در نتیجه این دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه، متشابه اند. پس داریم:

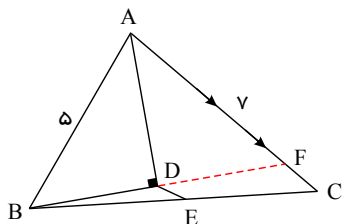
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{8}{DC} \Rightarrow DC = \frac{64}{8} = \frac{32}{3}$$



۸۶

گزینه ۱

ضلع BD را امتداد می دهیم تا ضلع AC را در F قطع کند، داریم:



$\triangle ABF$: ارتفاع $AD \rightarrow$ متساوی الساقین است. $\triangle ABF \rightarrow \begin{cases} AB = AF = 5 \\ AD \rightarrow BD = DF \end{cases}$ میانه هم می باشد.

$$FC = AC - AF = 7 - 5 = 2$$

$$\triangle BFC : DE \parallel FC \rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{DE}{FC} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DE}{2} \rightarrow DE = 1$$

۸۷

گزینه ۴

اگر x و y به ترتیب اندازه اضلاع سوم مثلث های ABC و DEF باشند حالت های ممکن برای نوشتن تناسب اضلاع دو قسمت به صورت زیر می باشد:

$$1) \frac{4}{14} = \frac{7}{y} = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2 \text{ و } y = \frac{49}{2} \rightarrow x + y = \frac{53}{2}$$

در حالت (۱) طول اضلاع مثلث ABC یعنی اعداد ۷ و ۴ و ۲ نامساوی مثلثی صدق نمی کند. $(2 + 4 > 7)$. بنابراین این حالت امکان پذیر نیست.

$$2) \frac{7}{14} = \frac{4}{y} = \frac{x}{2} \rightarrow x = \frac{7}{2} \text{ و } y = 8 \rightarrow x + y = \frac{23}{2}$$

$$2) \frac{4}{7} = \frac{x}{14} = \frac{7}{y} \rightarrow x = 8 \text{ و } y = \frac{49}{4} \rightarrow x + y = \frac{81}{4}$$

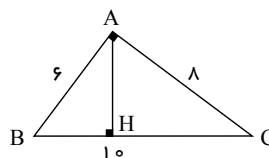
بنابراین بیش ترین مقدار برای مجموع طول اضلاع سوم دو قسمت برابر $\frac{81}{4}$ می باشد.

۸۸

گزینه ۳

مثلت دوم نیز قائمه الزاویه می باشد. $\rightarrow$ به دلیل تشابه مثلث اول قائم الزاویه است. $6^2 + 8^2 = 10^2$

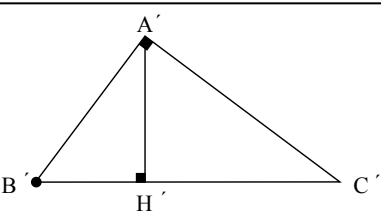
$$AB \times AC = AH \times BC \rightarrow 6 \times 8 = AH \times 10 \rightarrow AH = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$$



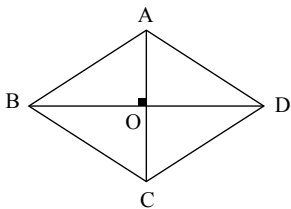
۸۹

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \rightarrow \text{نسبت تشابه} = \text{نسبت ارتفاع ها}$$

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{A'C'}{AC} \rightarrow \frac{14,4}{4,8} = \frac{A'C'}{8} \rightarrow A'C' = 24$$



گزینه ۱



در دو مربع دلخواه با یکدیگر متشابهند، بنابراین نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه است.

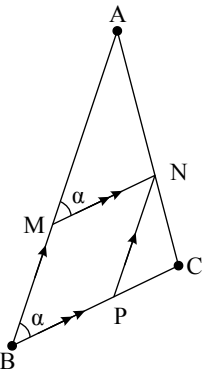
$$\frac{S_{\text{مربع بزرگ}}}{S_{\text{مربع کوچک}}} = \left(\frac{BD}{AC}\right)^2 = \frac{16}{9} \rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} BD = 4x \\ AC = 3x \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} OB = 2x \\ OA = 1,5x \end{cases} \rightarrow \triangle AOB : OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\rightarrow (1,5x)^2 + (2x)^2 = AB^2 \rightarrow 2,25x^2 + 4x^2 = 6,25x^2 = AB^2 \rightarrow AB = 2,5x$$

$$\frac{\text{محیط مربع بزرگ}}{\text{محیط لوزی}} = \frac{4 \times 4x}{4 \times 2,5x} = \frac{8}{5}$$

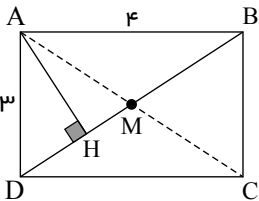
گزینه ۳



$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle MBPN} \rightarrow \frac{1}{2} AM \times \cancel{MN} \times \cancel{\sin \alpha} = MB \times \cancel{BP} \times \cancel{\sin \alpha} \rightarrow \frac{AM}{MB} = 2$$

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالین}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 2$$

گزینه ۲



$$\triangle ABD : AB^2 + AD^2 = BD^2 \rightarrow 3^2 + 4^2 = BD^2 \rightarrow BD = \sqrt{25} = 5$$

$$\triangle ADB : AD^2 = DH \times DB \rightarrow 3^2 = DH \times 5 \rightarrow DH = \frac{9}{5} = 1,8$$

$$HM = DM - DH = \frac{5}{2} - 1,8 = 2,5 - 1,8 = 0,7$$

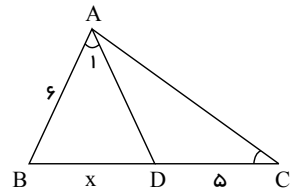
گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} \frac{S_1}{S_1} = k^r \\ \frac{P_r}{P_1} = k \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{P_r}{P_1} \right)^r = \frac{S_r}{S_1} \rightarrow S_1 \times P_r^r = S_r \times P_1^r$$

۹۳

گزینه ۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C} \\ \hat{B} = \text{زاویه مشترک} \end{array} \right. \xrightarrow{(ذ)} \triangle BAD \sim \triangle BAC$$



$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{6}{x+5} \rightarrow x(x+5) = 36 \rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$(x+9)(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -9 \text{ (غ ق)} \\ x = 4 \end{cases}$$

۹۴

گزینه ۱ مثلث ABC قائم الزاویه است بنابراین از روابط طولی می توان استفاده کرد. داریم:

$$AB^2 = BC \times BH = 15 \times 12 = 180 \rightarrow AB = 6\sqrt{5}$$

$$AC^2 = BC \times CH = 15 \times 3 = 45 \rightarrow AC = 3\sqrt{5}$$

برای محاسبه مساحت مستطیل، طول EH و عرض DH نیاز داریم:

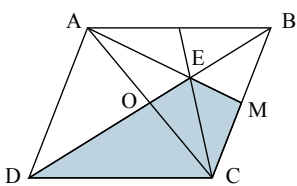
$$DH \parallel AB \xrightarrow{\text{ثالی}} \frac{DH}{AB} = \frac{CH}{BC} \rightarrow \frac{DH}{6\sqrt{5}} = \frac{3}{15} \rightarrow DH = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$EH \parallel AC \xrightarrow{\text{ثالی}} \frac{EH}{AC} = \frac{BH}{BC} \rightarrow \frac{EH}{3\sqrt{5}} = \frac{12}{15} \rightarrow EH = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

$$S_{\text{مستطیل}} = DH \times EH = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{72}{5} = 14,4$$

۹۵

گزینه ۴



از رأس A به وسط ضلع مقابل (نقطه M) وصل شده است. اگر مثلثی تشکیل شود که AM میانه آن باشد می توان نسبت مساحت ها را محاسبه کرد:

با رسم پاره خط AC و قطر BD را در نقطه O قطع می کند که مثلث ABC و سه میانه آن تشکیل می شود و مساحت هر مثلث کوچک $\frac{1}{6}$ مثلث ABC است.

$$S_{\text{هشدر}} = S_{\triangle DOC} + S_{OEMC} = \frac{1}{4}S_{ABCD} + \frac{2}{6}S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{ABCD} + \frac{2}{6}(\frac{1}{2}S_{ABCD})$$

$$= \frac{1}{4}S_{ABCD} + \frac{1}{6}S_{ABCD} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{6}) \times 30 = 12,5$$

۹۶

گزینه ۳

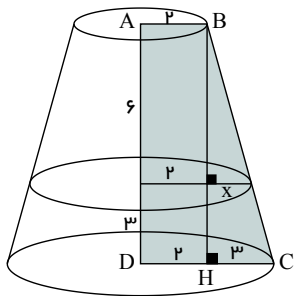
فرض کنید n مکعب را روی هم قرار داده باشیم. بدیهی است که فقط ۴ وجه جانبی مکعب پایینی و مکعب های میانی قابل رؤیت هستند و در مکعب بالایی، علاوه بر ۴ وجه جانبی، وجه بالایی آن ها نیز دیده می شود، بنابراین داریم:

$$\text{مجموع تعداد وجوه قابل رؤیت} = 4 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$$

$$\text{مجموع اعداد قابل رؤیت} = 7(4n+1) \Rightarrow 315 = 7(4n+1) \Rightarrow 4n+1 = 45 \Rightarrow 4n = 44 \Rightarrow n = 11$$

۹۷

گزینه ۲



از دوران دوزنقه قائم الزاویه حول ارتفاع، یک مخروط ناقص به وجود می آید.
سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای موازی با قاعده‌های دوزنقه قائم الزاویه با این مخروط ناقص، یک دایره است.

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث BHC داریم:

$$\frac{x}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین مطابق شکل، شعاع دایره مورد نظر برابر ۴ است و در نتیجه مساحت سطح مقطع برابر است با:

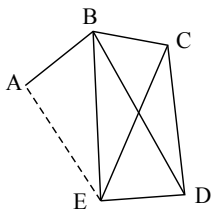
$$S = \pi(4)^2 = 16\pi$$

۹۸

گزینه ۱

تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس n ضلعی محدب $n - 3$ می‌باشد، بنابراین از چهار رأس B, C, D و E ، $4(10 - 3) = 28$ قطر عبور می‌کند. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید قطرهای BD, EC و BE دوبار شمرده شده‌اند. بنابراین باید از عدد ۲۸، ۳ قطر کم کنیم یعنی تعداد قطرهای گذرنده از چهار رأس متوالی برابر است با:

$$28 - 3 = 25$$



۹۹

گزینه ۴ «۴» تعریف چندضلعی محدب است؛ در حالی که چندضلعی می‌تواند مقعر نیز باشد.

۱۰۰

گزینه ۱

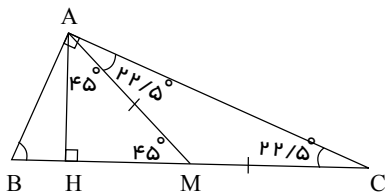
$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \rightarrow n = 7$$

$$مجموع\ زاویه\ های\ داخلی = (7-2) \times 180^\circ = 900^\circ = 6 \times 140^\circ + 60^\circ$$

بنابراین این هفت ضلعی حداکثر می‌تواند ۶ زاویه 140° داشته باشد.

۱۰۱

گزینه ۲



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow 90^\circ + 3\hat{C} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 90^\circ \rightarrow \hat{C} = 22.5^\circ$$

۱۰۲ میانه وارد بر وتر را رسم می‌کنیم داریم:

$$\hat{AMH} = 22.5^\circ + 22.5^\circ = 45^\circ$$

$$\text{وتر } AH = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ضلع روبه رو } 45^\circ \rightarrow \hat{AHM} \text{ مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است.} \rightarrow$$

$$\rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AM \rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{BC}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} BC$$

$$\rightarrow 2 = \frac{\sqrt{2}}{4} BC \rightarrow BC = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

گزینه ۳

راه اول:

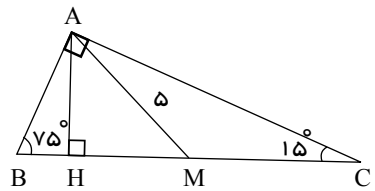
$$BC = 2AM = 2 \times 5 = 10$$

$$\hat{A}BD : \hat{C} = 180^\circ - (90^\circ + 75^\circ) = 15^\circ$$

$$15^\circ : \text{ارتفاع وارد بر وتر روبه‌رو } AH = \frac{BC}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\hat{A}HM : \frac{AH}{AM} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2} \rightarrow \hat{AMH} = 30^\circ \rightarrow \hat{HAM} = 60^\circ$$

$$\hat{A}HM : 60^\circ \text{ روبه‌رو به } HM = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وتر} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$



۱۰۳

راه دوم:

$$BC = 2AM = 2 \times 5 = 10$$

$$\hat{A}BD = \hat{C} = 180^\circ - (90^\circ + 75^\circ) = 15^\circ$$

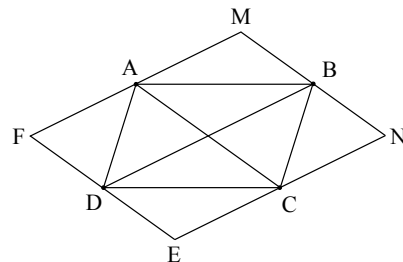
$$15^\circ : \text{ارتفاع وارد بر وتر روبه‌رو } AH = \frac{BC}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow 25 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + HM^2 \Rightarrow HM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

مثلث AHM قائمه‌الزاویه است؛ داریم:

گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel AC \parallel FE \\ MF \parallel BD \parallel EN \end{array} \right\} \rightarrow MNEF \text{ متوازی الاضلاع است.}$$



۱۰۴

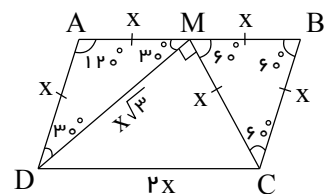
$$\text{محیط } MNEF = 2MN + 2MF = 2AC + 2BD = 2(4 + 7) = 22$$

گزینه ۳

$$\text{محیط } ABCD = 6x = 24 \rightarrow x = 4$$

$$\hat{D}MC : DM = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

$$MC \times MD = x \times x\sqrt{3} = x^2\sqrt{3} = 4^2 \times \sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$



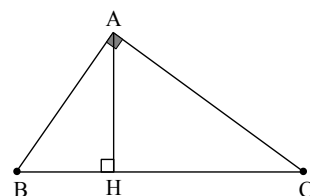
۱۰۵

گزینه ۱

$$S_{ABC} = 2AH^2 \rightarrow \frac{1}{2}AH \times BC = AH^2$$

$$\rightarrow AH = \frac{BC}{4} \rightarrow \hat{C} = 15^\circ$$

$$\text{بزرگ‌ترین زاویه خارجی} = 180 - 15 = 165^\circ$$



۱۰۶

گزینه ۳ مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن برابر است با ارتفاع وارد بر ساق مثلث. بنابراین داریم:

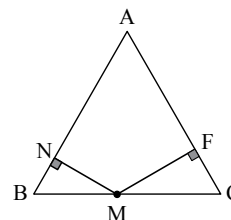
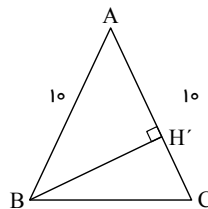
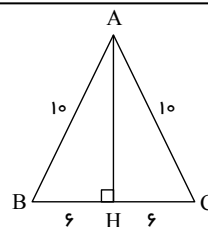
۱۰۷

$$\Delta ABH : AH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 = 48$$

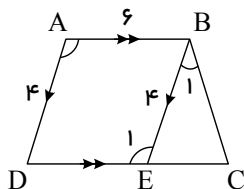
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH' \times AC \rightarrow 48 = \frac{1}{2} \times BH' \times 10 \rightarrow BH' = 9.6$$

$$MN + MF = BH' = 9.6$$



گزینه ۳

از B خطی موازی ساق AD رسم می کنیم تا ضلع CD را در E قطع کند. داریم:



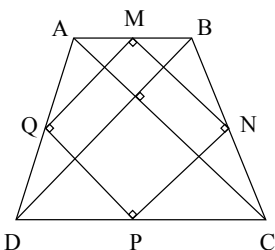
$$\left. \begin{aligned} ABED \rightarrow \hat{A} = \hat{E}_1 \text{ متوازی الاضلاع است} \\ BCD \text{ مثلث خارجی مثلث } \hat{E}_1 = \hat{B}_1 + \hat{C} \end{aligned} \right\} \rightarrow 2\hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{C} \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C} \rightarrow EC = EB = 4$$

فرض : $\hat{A} = 2\hat{C}$

$$DC = DE + EC = 6 + 4 = 10$$

گزینه ۳

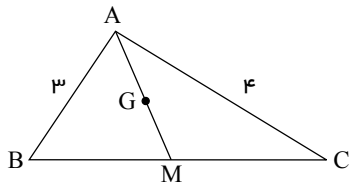
اگر وسط های اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم، ۴ ضلعی حاصل نصف چهارضلعی اولیه مساحت دارد. همچنین این چهارضلعی متوازی الاضلاع بوده و اضلاع آن ها با قطرهای چهارضلعی اولیه موازی است. بنابراین با توجه به عمود بودن قطر ها، ۴ ضلعی حاصل مستطیل است.



$$\left\{ \begin{aligned} S_{MNPQ} &= \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 96 = 48 \\ \text{نصف محیط : } P_{MNPQ} &= MN + NP = 14 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} MN \times NP &= 48 \\ MN + NP &= 14 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} MN &= 8 \\ NP &= 6 \end{aligned} \right. \Rightarrow QN = 10 = \sqrt{MN^2 + NP^2} = \text{قطر مستطیل}$$

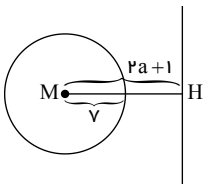
گزینه ۲ در هر مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و میانه ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند؛ بنابراین:



$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 5 \rightarrow AM = \frac{BC}{2} = 2.5$$

$$\rightarrow GM = \frac{1}{3} AM = \frac{2.5}{3} = \frac{5}{6}$$

گزینه ۴



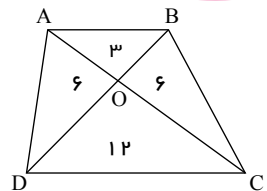
نقطه‌ای که از M به فاصله ۷ واحد قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع $R = 7$ قرار دارند. برای این که هیچ نقطه‌ای روی خط d وجود نداشته باشد باید دایره خط مذکور را قطع نکند.

بنابراین داریم:

$$MH > R \rightarrow 2a + 1 > 7 \rightarrow a > 3 \rightarrow a = 4$$

گزینه ۴ یعنی قابل قبول است.

گزینه ۲



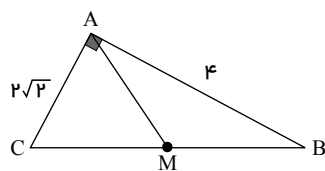
$$AB \parallel CD \rightarrow S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = 6$$

$$S_{\triangle AOD} \times S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle DOC}$$

$$\rightarrow 6 \times 6 = S_{\triangle AOB} \times 12 \rightarrow S_{\triangle AOB} = 3$$

$$S_{ABCD} = 3 + 6 + 6 + 12 = 27$$

گزینه ۴

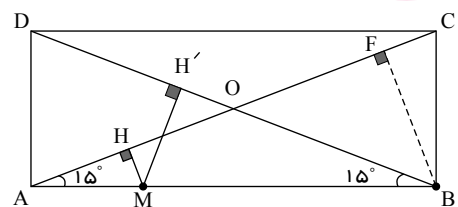


بنابراین این مثلث قائم الزاویه ($\hat{A} = 90^\circ$) است. نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها A و نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها M وسط ضلع BC است و فاصله این دو از هم AM (میانۀ وارد بر وتر) است. می‌دانیم در مثلث قائم الزاویه میانۀ وارد بر وتر نصف وتر است.

بنابراین:

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

گزینه ۲



$$\triangle AOB : OA = OB$$

$$\rightarrow MH + MH' = \text{ارتفاع وارد بر ساق مثلث متساوی الساقین} = BF \rightarrow BF = 1 + 2 = 3$$

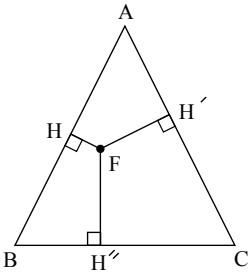
$$\triangle ABC : 15^\circ \text{ ارتفاع روی } BF = \frac{AC}{4} \rightarrow 3 = \frac{AC}{4} \rightarrow AC = 12$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \times \frac{3 \times 12}{2} = 36$$

گزینه ۳

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر است با: ارتفاع مثلث.

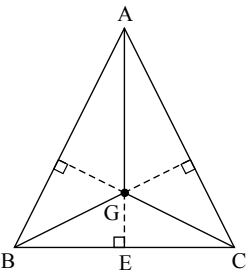
$$FH + FH' + FH'' = 1 + 2 + 3 = 6$$



۱۱۵

در مثلث متساوی الاضلاع میانه، ارتفاع و نیمساز هر رأس بر هم منطبق و برابرند و می دانیم میانه ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کند. بنابراین:

$$BG + GC + AG = 3AG = 3 \times \frac{2}{3}AE = 2AE = 2 \times 6 = 12$$



گزینه ۳

b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه ای است؛ داریم:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{b}{2} + i - 1 \\ S' &= \frac{2b}{2} + 2i - 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow S' - S = \frac{b}{2} + i \xrightarrow{-1} S' - S - 1 = \frac{b}{2} + i$$

$$\rightarrow S' - S - 1 = S \rightarrow S' = 2S + 1 \rightarrow S' > 2S$$

۱۱۶

گزینه ۲

$$bi = 40 \quad S = \frac{b}{2} + i - 1 \quad (b \geq 3, i \geq 0)$$

b	۴	۵	۸	۱۰	۲۰	۴۰
i	۱۰	۸	۵	۴	۲	۱
S	۱۱	۹٫۵	۸	۸	۱۱	۲۰

$$\rightarrow S_{min} = 8$$

۱۱۷

گزینه ۲

الف) صفحه ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آن ها باشد و نقطه اشتراکی هم نداشته باشند. $\leftarrow$ دو خط موازی

ب) صفحه ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آن ها باشد و نقطه اشتراک داشته باشد. $\leftarrow$ دو خط متقاطع

پ) هیچ صفحه ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آن ها باشد. $\leftarrow$ دو خط متناظر

۱۱۸

گزینه ۳

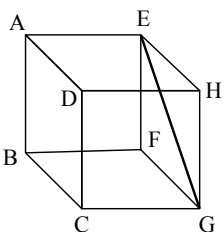
خط شامل یال AD با خط های شامل یال های EF, HG, CG و BF متناظر است.

۱۱۹

گزینه ۲

عکس قضیه گزینه ۲ برقرار نیست. به مثال نقض زیر توجه کنید:

در شکل روبه رو صفحه $ABCD$ بر صفحه $BFGC$ عمود است. قطر EG با صفحه $ABCD$ موازی است ولی بر صفحه $BFGC$ عمود نیست.

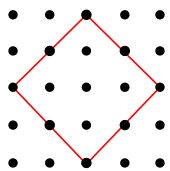


۱۲۰

گزینه ۱

فقط یک مربع شبکه ای وجود دارد که ضلع آن برابر $2\sqrt{2}$ است و با توجه به به شکل زیر تفاضل مقادیر b و i برابر است با:

۱۲۱



$$\begin{cases} b = 8 \\ i = 5 \end{cases} \rightarrow b - i = 8 - 5 = 3$$

AB عمود منصف $O \rightarrow OB = OA \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$

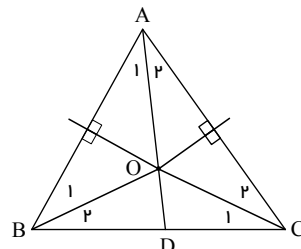
AC عمود منصف $O \rightarrow OA = OC \rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$

$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \hat{BOD} \rightarrow \hat{AOB} \text{ مثلث خارجی} \\ \hat{A}_2 + \hat{C}_2 = \hat{COD} \rightarrow \hat{AOC} \text{ مثلث خارجی} \end{cases}$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = \hat{BOD} + \hat{COD}$$

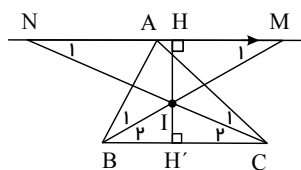
$$2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = \hat{BOC} \rightarrow \hat{BOC} = 2\hat{A}$$

گزینه ۴



۱۲۲

گزینه ۳



۱۲۳

$$MN \parallel BC \rightarrow \begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{C}_2 \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}_2} \hat{N}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{M}_1 = \hat{B}_2 \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_2} \hat{M}_1 = \hat{B}_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} AN = AC \\ AM = AB \end{cases} \rightarrow AN + AM = AC + AB$$

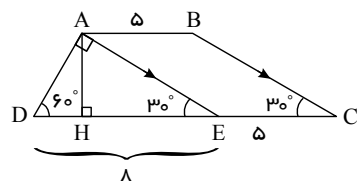
$$\rightarrow MN = (AB + AC + BC) - BC = 24 - 9 = 15$$

$$\begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{M}_1 = \hat{B}_2 \end{cases} \xrightarrow{(ج)} \triangle IMN \sim \triangle IBC$$

دو مثلث متشابه اند؛ بنابراین داریم:

$$\frac{IH}{IH'} = \frac{MN}{BC} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

گزینه ۲ از A به موازات BC رسم می کنیم:



۱۲۴

$ABCE$ متوازی الاضلاع $\rightarrow AB = CE = 5$

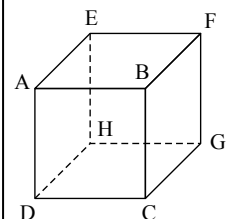
$$DE = DC - CE \rightarrow DE = 8$$

$$\triangle ADE \begin{cases} AD = \frac{1}{2} DE = 4 \\ AE = \frac{\sqrt{3}}{2} DE = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\triangle ADE : AD \times AE = AH \times DE$$

$$4 \times 4\sqrt{3} = AH \times 8 \rightarrow AH = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۲



دو صفحه عمود بر هم $ABFE$ و $ABCD$ را در نظر بگیرید. گزاره 'ب' نادرست است، زیرا مثلاً صفحه $BFGC$ بر صفحه $ABCD$ عمود است و با صفحه $ABFE$ موازی نیست. (صفحه $BFGC$ بر صفحه $ABFE$ عمود است.)

۱۲۵

گزاره 'ب' نادرست است. زیرا مثلاً خط GH با صفحه $ABCD$ موازی است و بر صفحه $ABFE$ عمود نیست (خط GH موازی صفحه $ABFE$ است.) گزاره های 'الف' و 'ت' همواره صحیح هستند.

گزینه ۲	گزاره الف درست است.
۱۲۶	گزاره ب نادرست است زیرا از هر نقطه غیر واقع بر صفحه بی‌شمار صفحه می‌توان بر آن عمود کرد. گزاره پ نادرست است زیرا شرط عمود بودن خط بر صفحه آن است که خط مورد نظر بر دو خط متقاطع از صفحه در محل تقاطع عمود باشد.

گزینه ۴	از مکعب بالای ۵ وجه و از سایر مکعب‌ها ۴ وجه با حرف F قابل رؤیت است. بنابراین تعداد حرف‌های F مشاهده شده برابر است با: $8 \times 4 + 5 = 37$
۱۲۷	

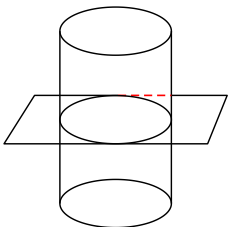
گزینه ۴	از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه مخروط، به دست می‌آید. - اگر صفحه، مایل مخروط را قطع کرده و قاعده آن را قطع نکند شکل حاصل بیضی است. - اگر صفحه، مایل مخروط را قطع کرده با یال آن موازی باشد و از رأس مخروط نگذرد شکل حاصل سهمی است. - اگر صفحه، عمود بر محور مخروط آن را قطع کند و از رأس مخروط نگذرد شکل حاصل دایره است.
۱۲۸	

گزینه ۲	شکل شامل ۴ لایه افقی از مکعب‌های کوچک است. پایین‌ترین لایه را ۱ و لایه‌های روی آن را به ترتیب ۲ و ۳ و ۴ شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر تمامی مکعب‌های لایه‌های ۲ و ۳ و ۴ و نیز ۵ مکعب از لایه ۱ برداریم نمای بالا به فرم موردنظر سؤال خواهد شد بنابراین حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداریم برابر $26 = 9 + 9 + 3 + 5$ می‌باشد. اگر از نمای بالای اولیه () مکعب‌هایی که هاشور خورده‌اند در تمامی لایه‌ها حذف شود، حداقل تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شوند به دست می‌آید که تعداد آن‌ها برابر ۱۳ خواهد شد.
۱۲۹	

گزینه ۳	نکته: حجم مخروط ناقصی که با شعاع قاعده‌های R و R' و ارتفاع h از رابطه زیر به دست می‌آید: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R'^2 + RR')$ برای محاسبه حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور d حجم استوانه را از مخروط ناقص می‌کنیم: $V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{3 \times 10}{3}(12^2 + 20^2 + 12 \times 20) = 7840$ $V_{\text{استوانه}} = 3 \times 12^2 \times 10 = 4320$ $V_{\text{مطلوب}} = V_{\text{مخروط ناقص}} - V_{\text{استوانه}} = 7840 - 4320 = 3520$
۱۳۰	

گزینه ۲	سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای که از محور استوانه می‌گذرد مستطیل به ابعاد ۲R و h است.
۱۳۱	

سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای که عمود بر ارتفاع استوانه از آن می‌گذرد دایره‌ای به شعاع R است.

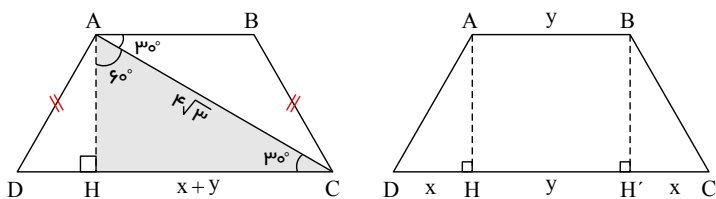


طبق فرض سؤال مساحت دو مقطع دایره‌ای و مستطیلی باهم برابر است بنابراین:

$$2Rh = \pi R^2 \rightarrow h = \frac{\pi R}{2}$$

$$\frac{S_{\text{جانبی}}}{S_{\text{ک}}} = \frac{2\pi Rh}{2\pi Rh + 2\pi R^2} = \frac{h}{h + R} = \frac{\frac{\pi R}{2}}{\frac{\pi R}{2} + R} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\pi}{\pi + 2}$$

گزینه ۳

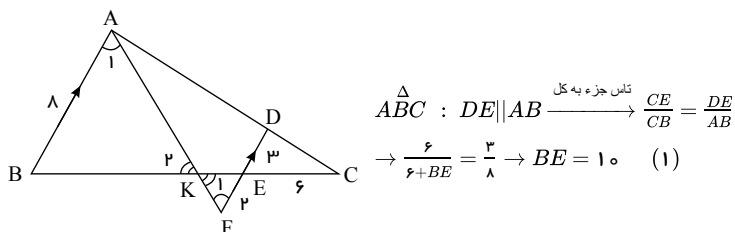


$$\triangle AHC : 30^\circ \text{ روبرو } AH = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$60^\circ \text{ روبرو } HC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6 \rightarrow x + y = 6$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH (AB + DC) = \frac{1}{2} AH (y + 2x + y) = AH (x + y) \rightarrow S_{ABCD} = 2\sqrt{3} (6) = 12\sqrt{3}$$

گزینه ۴



$$\triangle ABC : DE \parallel AB \xrightarrow{\text{تساوی اجزاء به کل}} \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \rightarrow \frac{6}{6+BE} = \frac{3}{8} \rightarrow BE = 10 \quad (1)$$

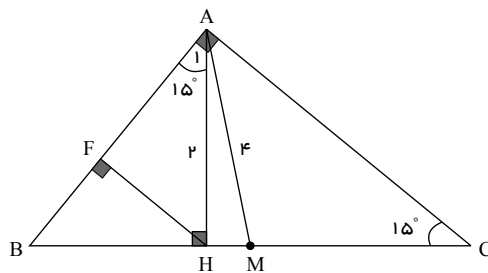
$$AB \parallel DE \text{ و } AF \text{ مورب } \left. \begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{F} \\ \hat{K}_1 = \hat{K}_2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \triangle ABK \sim \triangle KEF \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \frac{EF}{AB} = \frac{KE}{BK}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{KE}{BK} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{KE}{BK} \xrightarrow{\text{ترکیب دو مخرج}} \frac{1}{4+1} = \frac{KE}{BK+KE} \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{KE}{BE}$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{1}{5} = \frac{KE}{10} \rightarrow KE = 2, BK = 8$$

گزینه ۴

$$\triangle ABC, \hat{C} = 15^\circ \rightarrow AH = \frac{BC}{4} \rightarrow BC = 4AH = 4 \times 2 = 8$$



میانۀ وارد بر وتر (AM) را در $\triangle ABC$ رسم می کنیم.

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(8) = 4$$

$$\triangle AHM : AH^2 + HM^2 = AM^2 \rightarrow 2^2 + HM^2 = 4^2 \rightarrow HM^2 = 12 \rightarrow HM = 2\sqrt{3} \rightarrow BH = BM - HM = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\triangle ABC : AB^2 = BH \times BC = (4 - 2\sqrt{3}) \times 8 = 16(2 - \sqrt{3}) \rightarrow AB = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\triangle ABH : \hat{A}_1 = \hat{C} = 15^\circ \rightarrow 15^\circ \text{ ارتفاع روبه‌رو } FH = \frac{AB}{4} = \frac{4\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{4} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

گزینه ۴

۱۳۵

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد مکعب های با دو وجه رنگ شده} = 12 \\ \text{تعداد مکعب های با یک وجه رنگ شده} = 6 \end{array} \right\} \rightarrow 12 - 6 = 6$$

گزینه ۲

۱۳۶

گزینه ۲

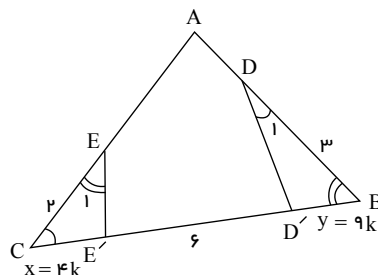
۱۳۷

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \rightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = 9k \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle CEE' \sim \triangle ABC \text{ (ز ز)} \rightarrow \frac{CE'}{AC} = \frac{CE}{BC} \\ \triangle BDD' \sim \triangle ABC \text{ (ز ز)} \rightarrow \frac{BD'}{AB} = \frac{BD}{BC} \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{AB}{AC} \right) \times \left(\frac{CE'}{BD'} \right) = \frac{CE}{BD}$$

$$\rightarrow \frac{AD + 3}{AE + 2} \times \frac{4k}{9k} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{AD + 3}{AE + 2} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow 2AD + 6 = 3AE + 6 \rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{3}{2}$$



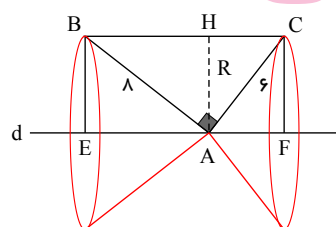
گزینه ۳

۱۳۸

$$BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \rightarrow AB \times AC = R \times BC \rightarrow 6 \times 8 = R \times 10 \rightarrow R = 4,8$$

$$AB^2 = BH \times BC \rightarrow 8^2 = BH \times 10 \rightarrow BH = 6,4 \rightarrow CH = BC - BH = 10 - 6,4 = 3,6$$

$$\Delta V = \frac{1}{3}\pi R^2(AE) - \frac{1}{3}\pi R^2(AF) = \frac{1}{3}\pi R^2(AE - AF) = \frac{1}{3}\pi \times 4,8^2(6,4 - 3,6) \approx 21,504\pi$$



گزینه ۴

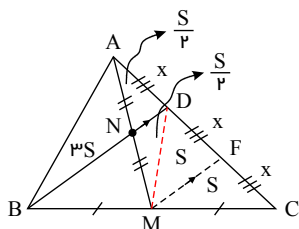
۱۳۹

$$\frac{\text{تعداد مکعب با دو وجه رنگ شده}}{\text{تعداد مکعب با سه وجه رنگ شده}} = \frac{2 \times 12}{8} = 3$$

گزینه ۳

۱۴۰

از M خطی موازی BD رسم می کنیم تا AC را در F قطع کند داریم:



$$\triangle BDC : MF \parallel BD \rightarrow \frac{CM}{MB} = \frac{CF}{FD} = 1 \rightarrow CF = FD = x$$

$$\triangle AMF : ND \parallel MF \rightarrow \frac{AN}{NM} = \frac{AD}{FD} = 1 \rightarrow AD = FD = x$$

مثلث های MFC و DMF و AMD ارتفاع گذرنده از M یکسان دارند و قاعده هایشان برابر است.

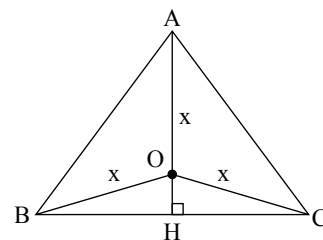
$$\rightarrow S_{MFC} = S_{DMF} = S_{AMD} = S$$

$$\begin{aligned} \triangle ADM : \text{میانۀ } DN \rightarrow S_{\triangle ADN} &= S_{\triangle AMC} = \frac{S}{2} \\ \triangle ABC : \text{میانۀ } AM \rightarrow S_{\triangle ABM} &= S_{\triangle AMC} = 3S \\ \frac{S_{DNMC}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{\frac{S}{2} + S + S}{6S} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

گزینه ۳ این مثلث متساوی الساقین است و بزرگ‌ترین ضلع آن قاعده آن است، بنابراین محل برخورد عمودمنصف‌ها روی ارتفاع وارد بر قاعده یا امتداد آن است.
از آنجایی که در مثلث متساوی الساقین ارتفاع و نیمساز و میانه وارد بر قاعده منطبق‌اند؛ بنابراین اگر نقطه O محل برخورد عمود منصف‌ها باشد داریم:

$$\triangle AHC : \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ AC = 5 \\ HC = 3 \end{cases} \rightarrow HA = 4$$

$$\text{محل برخورد عمودمنصف‌ها } O \Rightarrow OA = OB = OC = x$$



زیرا محل برخورد عمود منصف‌ها از هر سه رأس به یک فاصله است. ($OH = 4 - x$)

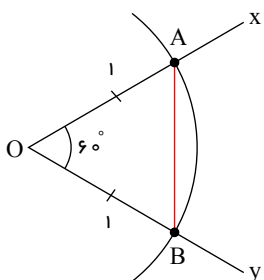
$$\triangle OHC : \begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ HC = 3 \\ OH = 4 - x \\ OC = x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} OC^2 &= OH^2 + HC^2 \\ x^2 &= (4 - x)^2 + 3^2 \\ x^2 &= 16 - 8x + x^2 + 9 \rightarrow x = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$OH = 4 - x = 4 - \frac{25}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

۱۴۱

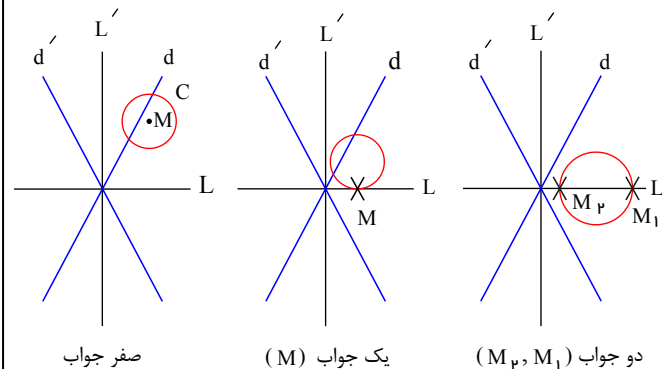
گزینه ۲



$$\left. \begin{aligned} R &\geq \frac{AB}{2} \\ OA = OB = AB &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow R \geq \frac{1}{2} \rightarrow a_{\min} = \frac{1}{2}$$

۱۴۲

گزینه ۴ نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله هستند روی نیمسازهای زوایای با رأس نقطه تقاطع قرار دارند (خطهای L و L'). نقاطی که از نقطه M به فاصله ثابت r هستند روی دایره به مرکز M با شعاع r قرار دارند. نقاط برخورد دایره C با خطهای L و L' جواب مسأله است. با توجه به شکل‌های زیر حداکثر ۴ جواب وجود دارد.

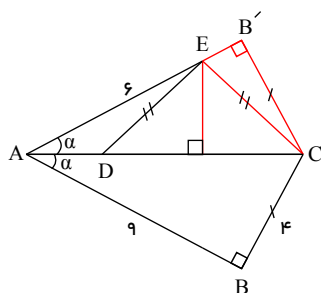
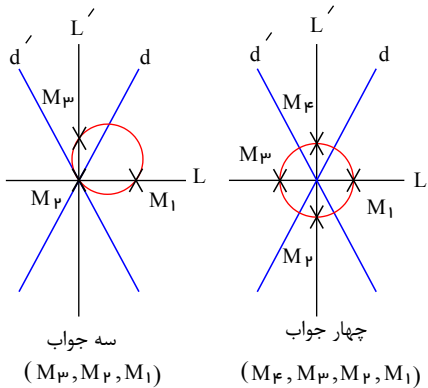


صفر جواب

یک جواب (M)

دو جواب (M_1, M_2)

۱۴۳



$$\triangle AC'B' \cong \triangle ACB \text{ (وز)} \rightarrow \begin{cases} CB' = CB = 4 \\ AB' = AB = 9 \end{cases}$$

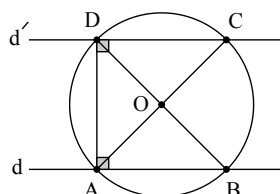
$$EB' = AB' - AE = 9 - 6 = 3$$

$$\triangle EB'C : EC^2 = EB'^2 + B'C^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \rightarrow EC = 5$$

$E \rightarrow ED = EC = 5$ روی عمودمنصف DC قرار دارد.

گزینه ۳

۱۴۴



گزینه ۱ خط دلخواه d را در صفحه در نظر بگیرید. برای رسم خطی موازی با آن مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ - دایره با مرکز و شعاع دلخواه را به گونه‌ای رسم می‌کنیم تا d را در A و B قطع کند.

۲ - از B به مرکز دایره وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند:

۳ - D را به A وصل می‌کنیم تا خط عمود بر d به دست آید. (زاویه DAB محاطی روبه‌رو به قطر است و برابر 90° می‌باشد).

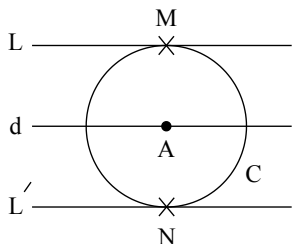
۴ - از A به مرکز دایره وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند.

۵ - C را به D وصل می‌کنیم تا خط عمود بر AD به دست آید. (زاویه ADC محاطی روبه‌رو به قطر است و برابر 90° می‌باشد).

خط‌های d و d' مطابق شکل هر دو بر AD عمودند پس با هم موازیند و با استفاده از یک کمان توانستیم به هدف مطلوبمان برسیم.

۱۴۵

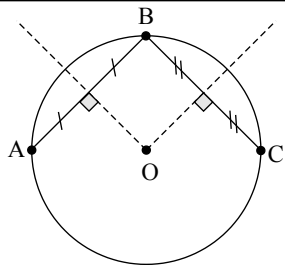
گزینه ۲ تمام نقاطی که از خط d به فاصله x قرار دارند روی دو خط موازی آن به فاصله x در دو طرفش قرار دارند (خط‌های L و L'). تمام نقاطی که از نقطه A به فاصله x قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A به شعاع x قرار دارند (دایره C). محل برخورد دایره C با خط‌های L و L' جواب مسئله است (نقاط M و N).



۱۴۶

گزینه ۳ عمودمنصف وترهای دایره از مرکز آن می‌گذرد بنابراین نقطه تقاطع عمودمنصف‌های دو وتر غیرموازی، مرکز دایره است و مانند شکل زیر حداقل به سه نقطه روی دایره نیاز داریم.

۱۴۷



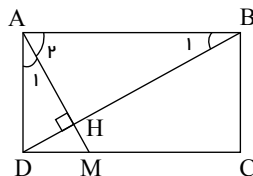
$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_r = 90^\circ \\ \hat{A}_r + \hat{B}_1 = 90^\circ \end{cases} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{D} = \hat{A} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{ز}} \triangle AMD \sim \triangle ABD$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DM}{AD} \xrightarrow{AB=2AD} \frac{AD}{2AD} = \frac{DM}{AD} \Rightarrow AD = 2DM$$

$$\frac{DM}{CM} = \frac{DM}{CD - DM} = \frac{DM}{AB - DM} = \frac{\frac{1}{2}AD}{2AD - \frac{1}{2}AD} = \frac{\frac{1}{2}AD}{\frac{3}{2}AD} = \frac{1}{3}$$

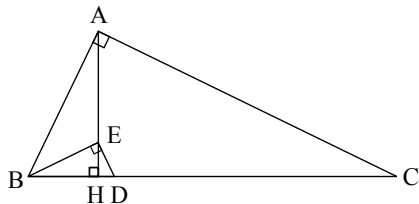
گزینه ۳



۱۴۸

گزینه ۲ در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی قطعات جدانشده روی وتر است؛ بنابراین با توجه به آنکه AH و EH هر دو ارتفاع‌های وارد بر وتر هستند می‌توان ۲ بار از این رابطه استفاده کرد.

$$\triangle ABC : \begin{cases} \text{ارتفاع} = AH \\ \text{قطعات جدا شده} = BH, CH \end{cases} \rightarrow AH^2 = BH \times CD \rightarrow AH^2 = BH \times 9$$



۱۴۹

$$\triangle EBD : \begin{cases} \text{ارتفاع} = EH \\ \text{قطعات جدا شده} = BH, DH \end{cases} \rightarrow EH^2 = BH \times HD \rightarrow EH^2 = BH \times 1$$

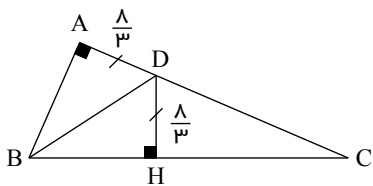
$$\rightarrow \frac{EH^2}{AH^2} = \frac{1 \cancel{BH}}{9 \cancel{BH}} \rightarrow \frac{EH}{AH} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{تفصیل نسبت در مخرج}} \frac{EH}{AH - EH} = \frac{1}{3 - 1} \rightarrow \frac{EH}{AE} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱

$$D \rightarrow DH = DA = \frac{A}{3} \text{ روی نیمساز } \hat{B} \text{ قرار دارد.}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDH} + S_{\triangle DHC}$$

$$\rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{A}{3} \times AB + \frac{1}{2} \times \frac{A}{3} \times BH + \frac{1}{2} \times \frac{A}{3} \times HC$$



$$\rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{A}{3} \times (AB + BH + HC) = \frac{4}{3} (AB + BC) = \frac{4}{3} \times 18 = 24$$

۱۵۰

$$BC = BD \rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = x$$

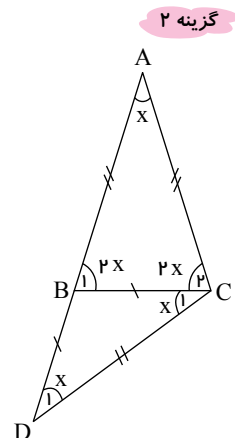
$$\triangle BCD : \text{زاویه خارجی } \hat{B}_1 = x + x = 2x$$

$$AB = AC \rightarrow \hat{C}_2 = \hat{B}_1 = 2x$$

$$CD = CA \rightarrow \hat{A} = \hat{D}_1 = x$$

$$\triangle ABC : x + 2x + 2x = 180^\circ \rightarrow 5x = 180^\circ \rightarrow x = 36^\circ$$

$$\triangle ACD : \triangle ACD = 3x = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$

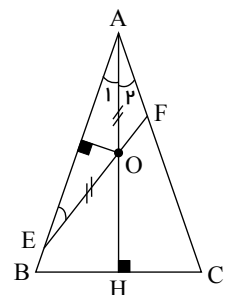


مثلث ACD منفرجه الزاویه است و محل هم‌رسي عمود منصف‌های آن بیرون مثلث واقع است.

۱۵۱

گزینه ۳ AH میانه و ارتفاع است پس $\triangle ABC$ متساوی الساقین است. و AH نیمساز $\hat{A}$ نیز می‌باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \text{ نیمساز } AH \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \text{روی عمودمنصف } AE \text{ است } O \rightarrow OE = OA \rightarrow \triangle EOF = \triangle A_1 \\ \rightarrow \triangle EOF = \hat{A}_2 \\ \triangle AHC : \hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{C} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle EOF = 90^\circ - \hat{C}$$

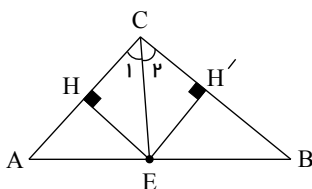


۱۵۲

گزینه ۲ در اثبات با استفاده از برهان خلف، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم غلط است. پس در این سوال ابتدا باید فرض کنیم: $\hat{B} = \hat{C}$

۱۵۳

گزینه ۳



$$\left. \begin{array}{l} EH = EH' \rightarrow \text{روی نیمساز زاویه } C \text{ قرار دارد. } E \rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \triangle CEB : \text{زاویه خارجی } \hat{CEA} = \hat{C}_2 + \hat{B} \rightarrow \hat{CEA} > \hat{C}_2 \end{array} \right\} \rightarrow \hat{CEA} > \hat{C}_1 \rightarrow AC > AE$$

۱۵۴

گزینه ۳

$$\frac{AM}{MD} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{MD}{AM} = \frac{3}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{MD}{AM + MD} = \frac{MD}{AD} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$$

$$MO \parallel AB \rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{MO}{AB} = \frac{3}{4} \xrightarrow{MO=ON} \frac{ON}{AB} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$MN \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BN}{BN + NC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$ON \parallel CD \xrightarrow{\text{قضیه تالس و (۲)}} \frac{BN}{BC} = \frac{ON}{DC} = \frac{1}{4}$$

می‌دانیم چهار ضلعی $ONED$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $ON = DE$ می‌باشد.

$$\frac{ON}{DC} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{تفاضل نسبت در مخرج}} \frac{ON}{DC - ON} = \frac{1}{4-1}$$

۱۵۵

$$\rightarrow \frac{ON}{DC - DE} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{ON}{CE} = \frac{1}{3} \quad (3) \xrightarrow{(1) \div (3)} \frac{CE}{AB} = \frac{\frac{ON}{AB}}{\frac{ON}{CE}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4} = 2,25$$

گزینه ۱ نکته: تعداد قطرهای در یک n ضلعی برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

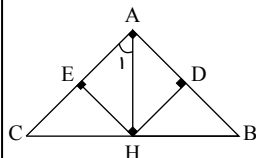
$$3m - \frac{m(m-3)}{2} = 3n - \frac{n(n-3)}{2} \xrightarrow{\times(2)} 6m - m^2 + 3m = 6n - n^2 + 3n$$

۱۵۶

$$\rightarrow 9m - m^2 = 9n - n^2 \rightarrow n^2 - m^2 = 9n - 9m \rightarrow (n-m)(n+m) = 9(n-m) \xrightarrow{m \neq n} n+m=9$$

چندضلعی حداقل سه ضلع دارد. بنابراین تنها مقادیر ممکن برای تعداد اضلاع ۴ و $m=3$ و $n=3$ می باشد و $m-n=4-3=1$ است.

گزینه ۲ نکته: در مثلث قائم الزاویه اگر یکی از زوایای آن ۱۵ درجه باشد، آن گاه طول ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم طول وتر است.



$$\triangle ABC : \hat{A} = 90^\circ \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{C} = 5\hat{B}} 6\hat{B} = 90^\circ \rightarrow \hat{B} = 15^\circ, \hat{C} = 75^\circ$$

$$\triangle AHC : \hat{A}_1 = \hat{B} = 15^\circ$$

$$\triangle AHB : \hat{B} = 15^\circ \rightarrow HD = \frac{AB}{4}$$

$$\triangle AHC : \hat{A}_1 = 15^\circ \rightarrow HE = \frac{AC}{4}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{S_{ADHE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{HD \times HE}{\frac{1}{2} AB \times AC} = \frac{\frac{AB}{4} \times \frac{AC}{4}}{\frac{1}{2} AB \times AC} = \frac{1}{8}$$

۱۵۷

گزینه ۳ عکس قضیه گزینه ۳ به صورت زیر است:

«اگر قطره‌ای یک چهارضلعی برهم عمود باشند لوزی است.»

می دانیم بی شمار چهارضلعی وجود دارد که قطرهایش برهم عمودند بنابراین قضیه ذکر شده در گزینه ۳ دوشرطی نیست چون عکس آن صحیح نمی باشد.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه «۱» همان قضیه زاویه برتر است که عکس آن نیز برقرار است.

عکس گزینه «۲» نیز برقرار است زیرا از طرفین یک نامساوی می توان ریشه فرد گرفت و جهت نامساوی تغییر نکند.

$$n^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} n > 0$$

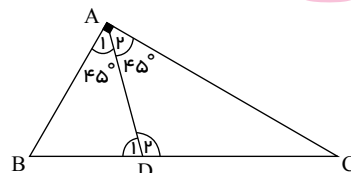
عکس گزینه «۴» از ویژگی های مثلث متساوی الساقین و درست است.

۱۵۸

گزینه ۲

$$\triangle ABD : AD > AB \rightarrow \hat{B} > \hat{D}_1 \xrightarrow{+\hat{B}} \hat{B} + \hat{B} > \hat{D}_1 + \hat{B} \rightarrow 2\hat{B} > 180^\circ - 45^\circ$$

$$\rightarrow 2\hat{B} > 135^\circ \rightarrow \hat{B} > 67,5^\circ \quad (1)$$



۱۵۹

$$\triangle ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \rightarrow \hat{B} < 90^\circ \quad (2)$$

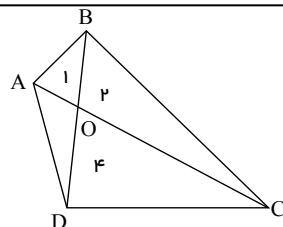
$$(1), (2) \rightarrow 67,5^\circ < \hat{B} < 90^\circ \rightarrow \begin{cases} \beta = 90^\circ \\ \alpha = 67,5^\circ \end{cases} \rightarrow \max(\beta - \alpha) = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$$

گزینه ۳ در هر چهارضلعی حاصل ضرب مساحت مثلث های روبه رو به هم برابر است. بنابراین:

۱۶۰

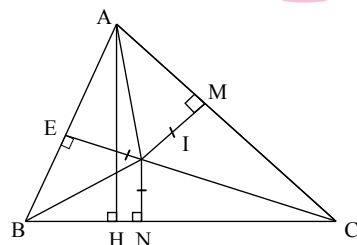
$$S_{\triangle AOD} \times S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle DOC}$$

$$S_{\triangle AOD} \times 2 = 1 \times 4 \rightarrow S_{\triangle AOD} = 2$$



گزینه ۳

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AIC} + S_{\triangle BIC} + S_{\triangle AIB}, \quad IN = IM = IE$$



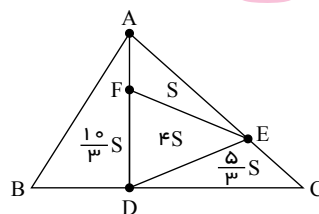
در نتیجه:

$$\frac{1}{2}AH(BC) = \frac{1}{2}IN(AC) + \frac{1}{2}IN(BC) + \frac{1}{2}IN(AB)$$

$$\frac{1}{2}AH(BC) = \frac{1}{2}IN(AC + BC + AB) \rightarrow AH \times 7 = IN(5 + 6 + 7) \rightarrow 7AH = 18IN \rightarrow \frac{IN}{AH} = \frac{7}{18}$$

گزینه ۴ نسبت مساحت دو مثلث با ارتفاع‌های یکسان برابر است با نسبت قاعده‌هایشان. بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle FED}} = \frac{AF}{FD} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} S_{\triangle AFE} = S \\ S_{\triangle FED} = 2S \end{cases}$$



$$\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{EC}{AE} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{S_{\triangle DEC}}{5S} = \frac{1}{2} \rightarrow S_{\triangle DEC} = \frac{5}{2}S$$

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S + 2S + \frac{5}{2}S} = \frac{1}{2} \rightarrow S_{\triangle ABD} = \frac{10}{3}S$$

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2S}{10S} = \frac{2}{5}$$

در نتیجه:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases}, \quad \frac{c}{d} = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} c = 2k' \\ d = 3k' \end{cases}$$

$$\frac{3a + 2d}{4b + 6c} = \frac{3(2k) + 2(3k')}{4(3k) + 6(2k')} = \frac{6(k + k')}{12(k + k')} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+a}$$

با توجه به نکته فوق داریم:

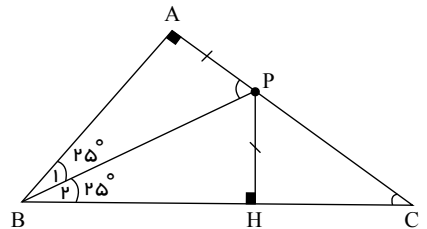
$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{10} \rightarrow \frac{a+c}{5+10} = \frac{b}{6} \rightarrow b = \frac{2}{5}(a+c)$$

گزینه ۳

$PA = PH \rightarrow$ روی نیمساز $\hat{B}$ قرار دارد.

$$\rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{90^\circ - 40^\circ}{2} = 25^\circ$$

$$\hat{BPC} = 180^\circ - (25^\circ + 40^\circ) = 115^\circ$$



۱۶۵

گزینه ۳ در گزینه ۳، عکس گزاره شرطی درست نیست زیرا در صورتی که اضلاع مجاور یک چهارضلعی برهم عمود باشند آن چهارضلعی مستطیل است و لزوماً مربع نمی‌باشد و این گزاره را نمی‌توان به صورت قضیه دو شرطی بیان کرد.

۱۶۶

گزینه ۳

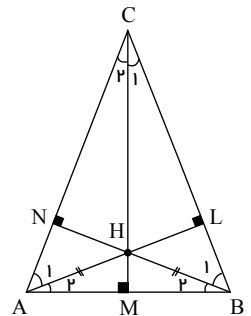
نقطه H روی عمودمنصف AB قرار دارد. $HA = HB \rightarrow$

$\rightarrow$ روی عمودمنصف AB قرار دارد. $CM \rightarrow$ عمودمنصف AB است.

$$\rightarrow CA = CB \rightarrow \hat{A}_{1,2} = \hat{B}_{1,2} \quad (1)$$

$$\hat{BCM} : \hat{C}_1 = 90^\circ - \hat{B}_{1,2} \quad (2)$$

$$\hat{BCN} : \hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{C}_{1,2} \quad (3)$$



۱۶۷

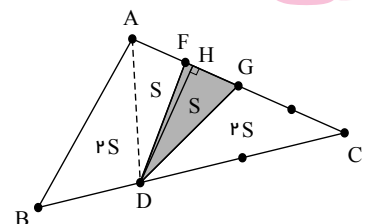
$$\hat{BCH} : \hat{BHC} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \xrightarrow{(2),(3)} 110^\circ + (90^\circ - \hat{C}_{1,2}) + (90^\circ - \hat{B}_{1,2}) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \hat{B}_{1,2} + \hat{C}_{1,2} = 110^\circ \rightarrow \hat{A}_{1,2} + \hat{B}_{1,2} + \hat{C}_{1,2} = 110^\circ + \hat{A}_{1,2} \rightarrow 180^\circ = 110^\circ + \hat{A}_{1,2}$$

$$\rightarrow \hat{A}_{1,2} = 70^\circ \xrightarrow{(1)} \hat{B}_{1,2} = 70^\circ \rightarrow \hat{C}_{1,2} = 40^\circ$$

گزینه ۱

$$\rightarrow \begin{cases} S_{DFG} = S \\ S_{ADC} = 4S \end{cases} \quad \frac{S_{DFG}}{S_{ADC}} = \frac{S}{4S} = \frac{1}{4} \quad \frac{\frac{1}{2}DH(FG)}{\frac{1}{2}DH(AC)} = \frac{FG}{AC} = \frac{1}{4}$$



۱۶۸

مثلث‌های ABD و ADC ارتفاع هایشان یکسان است، بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌هایشان.

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = \frac{DC}{BD} \rightarrow \frac{4S}{S_{ABD}} = 2 \rightarrow S_{ABD} = 2S$$

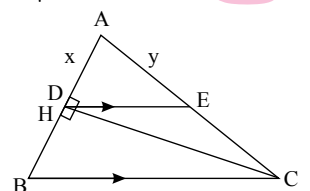
در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{DFG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{DFG}}{S_{ABD} + S_{ADC}} = \frac{S}{2S + 4S} = \frac{S}{6S} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۱

مطابق شکل زیر داریم:

$$\rightarrow x = 2, y = 4DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{x}{x+4} = \frac{y}{y+8} = \frac{4}{12}$$



۱۶۹

بنابراین:

$$AB = x + 4 = 6, AC = y + 8 = 12$$

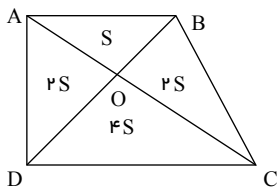
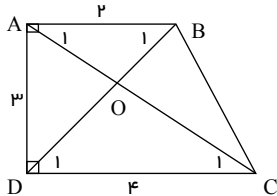
$$CA = CB = 12 \rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ متساوی الساقین است در نتیجه ارتفاع } CH \text{ میانه نیز می باشد.} \rightarrow AH = HB = \frac{AB}{2} = 3$$

$$\Delta ACB : AH^2 + HC^2 = AC^2 \rightarrow 3^2 + HC^2 = 12^2 \rightarrow HC^2 = 144 - 9 = 135$$

$$\rightarrow HC = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}$$

گزینه ۱

در دوزنقه با رسم قطر ها، مساحت دو مثلثی که ساق ها اضلاع آن هستند برابرند بنابراین:



$$S_{\Delta OAD} = S_{\Delta OBC}$$

دو قاعده دوزنقه موازیند بنابراین: $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ و $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ و دو مثلث OAB و OCD متشابه اند داریم:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OCD}} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

۱۷۰

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{2}{4}$$

همچنین دو مثلث OAB و OAD هم ارتفاع هستند بنابراین نسبت مساحت ها با نسبت قاعده ها در این مثلث ها برابر است:

بنابراین اگر مساحت مثلث OAB را برابر S در نظر گرفته و سایر مثلث ها را بر اساس آن مشخص کنیم داریم:

$$S_{ABCD} = 9S$$

$$S_{ABCD} = \frac{(2+4) \times 3}{2} = 9 \rightarrow 9S = 9 \rightarrow S = 1 \rightarrow S_{\Delta OBC} = 2S = 2$$

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

گزینه ۲ می دانیم اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه ای باشند داریم:

$$\frac{S'}{S} = \frac{b' = \frac{4b}{2} + 3i - 1}{b = \frac{4b}{2} + i - 1} = 4 \rightarrow \frac{4b}{2} + 3i - 1 = \frac{4b}{2} + 4i - 4$$

$$\rightarrow i = 3 \rightarrow \text{کمترین تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه ای } b = 3 \text{ است.} \xrightarrow{i=3} S_{Min} = \frac{3}{2} + 3 - 1 = 3,5$$

۱۷۱

گزینه ۲

$$x + x + 2x = 180^\circ \rightarrow 4x = 180^\circ \rightarrow x = 45^\circ, 2x = 90^\circ$$

۱۷۲

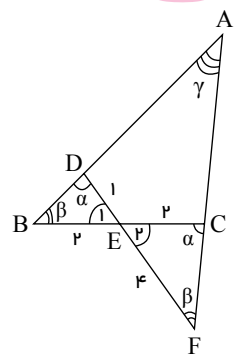
باتوجه به اندازه های به دست آمده، مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است و می تواند با مثلثی به طول اضلاع ۱، ۱ و $\sqrt{2}$ که آن هم قائم الزاویه متساوی الساقین است متشابه باشد.

گزینه ۱

با توجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{DE}{EC} &= \frac{1}{2} \\ \frac{BE}{EF} &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \hat{E}_1 &= \hat{E}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض}} \Delta BDE \sim \Delta FEC$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{F} = \hat{B} = \beta, \hat{D} = \hat{C} = \alpha$$



۱۷۳

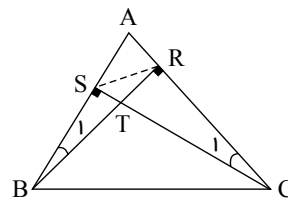
در نتیجه:

$$\Delta ABC : \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \rightarrow \alpha = \beta + \gamma \rightarrow \gamma = \alpha - \beta$$

گزینه ۳: دو مثلث قائم الزاویه ABR و ACS در زاویه A مشترک اند، پس متشابهند.
گزینه ۲: در دو مثلث قائم الزاویه BST و CRT زاویه های $\hat{T}_1$ و $\hat{T}_2$ برابرند پس متشابهند.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABR \sim \triangle ACS \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \frac{AR}{AS} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABC \sim \triangle ARS$$

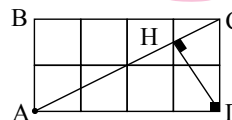
گزینه ۴:



۱۷۴

گزینه ۱

$$\triangle ADC: \text{بنابر قضیه فیثاغورس در } \triangle ADC: AC^2 = AD^2 + DC^2 \rightarrow AC^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$



۱۷۵

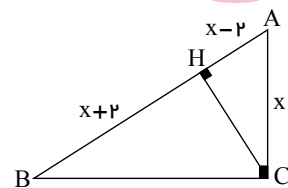
از طرفی:

$$\triangle ADC: AD \times DC = DH \times AC \rightarrow 4 \times 2 = DH \times 2\sqrt{5} \rightarrow DH = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0.8\sqrt{5}$$

گزینه ۲ با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

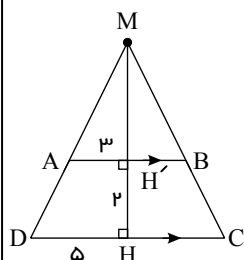
$$AC^2 = AH \times AB$$

$$x^2 = (x-2)(2x) \rightarrow \frac{x}{2} = 2 \rightarrow x = 4$$



۱۷۶

گزینه ۲



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMB \sim \triangle DMC \rightarrow \text{نسبت تشابه} = \text{نسبت ارتفاع}$$

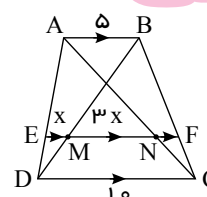
$$\xrightarrow{\text{مثلث ها}} \frac{MH'}{MH} = \frac{AB}{DC} \rightarrow \frac{MH'}{MH'+2} = \frac{3}{5} \rightarrow 5MH' = 3MH' + 6$$

$$\rightarrow 2MH' = 6 \rightarrow MH' = 3 \rightarrow MH = MH' + HH' = 3 + 2 = 5$$

۱۷۷

گزینه ۴

$$\text{بنابر فرض سؤال: } MN = 3EM \rightarrow \begin{cases} EM = x \\ MN = 3x \end{cases}$$



۱۷۸

در نتیجه مطابق شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle ABD : EM \parallel AB &\xrightarrow{\text{تالسن جزء به کل}} \frac{DE}{AD} = \frac{EM}{AB} \rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{x}{5} \\ \triangle ADC : EN \parallel DC &\xrightarrow{\text{تالسن جزء به کل}} \frac{AE}{AD} = \frac{EN}{DC} \rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{4x}{10} \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو معادله را بر هم}} \frac{\frac{DE}{AD}}{\frac{AE}{AD}} = \frac{\frac{x}{5}}{\frac{4x}{10}} \rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{AE}{DE} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{AE}{EB} &= \frac{0.85}{3.4} = \frac{1}{4} \\ \frac{AF}{FC} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالسن}} EF \parallel BC$$

گزینه ۴

۱۷۹

توجه: در گزینه ۳ با فرض $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $EF \parallel BC$

گزینه ۳

۱۸۰

مثلث روبه‌رو با مثلثی که دو زاویه آن در گزینه ۳ موجود است متشابه می‌باشد. (زرز)

گزینه ۲

۱۸۱

در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AM}{AC} &= \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \\ \frac{AN}{AB} &= \frac{2/3}{2x} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \xrightarrow{\text{ضریض}} \frac{\hat{A}}{\hat{A}} = \hat{A} \rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱

۱۸۲

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= 2 \times 25 = 50^\circ \\ \hat{A}' &= 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{A} = \hat{A}'$$

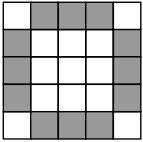
$$\left. \begin{aligned} \hat{B} &= 90^\circ \\ \hat{B}' &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$$

$$\xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{AD}{A'D'}\right)^2 \rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \rightarrow 2 = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow 2x-2 = x+1 \rightarrow x=1$$

گزینه ۴ از یک نقطه خارج یک صفحه، تنها یک صفحه به موازات صفحه مفروض می‌توان رسم کرد ولی تمام خطوط موجود در این صفحه با صفحه مفروض موازی هستند؛ بنابراین از یک نقطه خارج یک صفحه، بی‌شمار خط و یک صفحه موازی با صفحه مفروض قابل رسم است.

۱۸۳

گزینه ۳

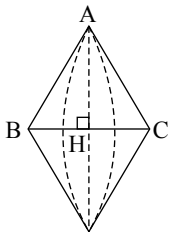


۱۸۴

در هر کدام از وجوه این مکعب، مکعب‌های کوچکی که در شکل بالا هاشور خورده‌اند، دارای دو وجه مکعب بزرگ تعلق دارند. با توجه به اینکه مکعب دارای ۶ وجه است، پس تعداد این مکعب‌های کوچک برابر است با:

$$\frac{12 \times 6}{2} = 36$$

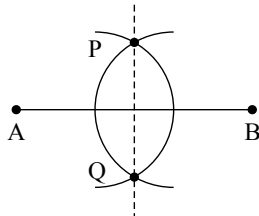
گزینه ۲



۱۸۵

اگر مثلث متساوی‌الساقینی را حول قاعده آن دوران دهیم، آنگاه مطابق شکل دو مخروط با قاعده یکسان ایجاد می‌شود که شعاع قاعده هر کدام برابر طول ارتفاع وارد بر قاعده مثلث و ارتفاع هر کدام برابر نصف طول قاعده مثلث است.

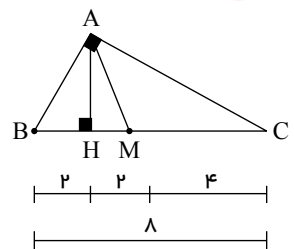
گزینه ۲ برای رسم هر خط از جمله عمودمنصف، به دو نقطه از آن نیاز است. بنابراین دو کمان رسم شده باید در دو نقطه متمایز متقاطع باشند و برای این منظور کافی است شعاع دو کمان بیشتر از نصف طول پاره خط AB باشد.



۱۸۶

گزینه ۴

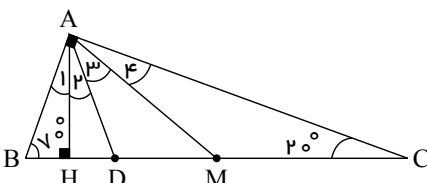
$$AC^2 = CH \times CB \rightarrow AC^2 = 6 \times 8 = 48 \rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$



۱۸۷

گزینه ۴

شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید؛ داریم:



۱۸۸

$$\hat{A}_3 = \hat{A}_{2,3} - \hat{A}_2 = 25^\circ \quad \text{گزینه ۲:}$$

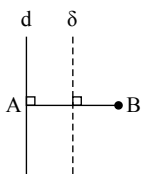
$$\hat{A}_{2,3} = |\hat{B} - \hat{C}| = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ \quad \text{گزینه ۴:}$$

$$\hat{A}_1 = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ \quad \text{گزینه ۱:}$$

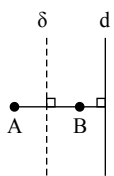
$$\hat{A}_2 = \hat{A}_{1,2} - \hat{A}_1 = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ \quad \text{گزینه ۳:}$$

همان‌طور که در محاسبات بالا مشخص است زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر بزرگترین زاویه است.

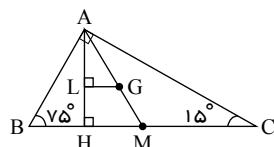
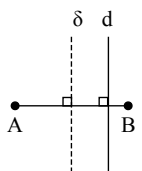
گزینه ۴ در صورتی که خط d در هر نقطه‌ای غیر از وسط پاره‌خط AB بر این پاره‌خط یا امتداد آن عمود باشد، موازی عمودمنصف AB خواهد بود و در نتیجه نقطه‌ای روی آن به فاصله برابر از A و B وجود ندارد ولی اگر خط d موازی پاره‌خط AB باشد، آنگاه عمودمنصف پاره‌خط AB را قطعاً در یک نقطه قطع می‌کند، پس همواره نقطه‌ای روی آن وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله باشد.
برای رد گزینه‌های «۳»، «۲» و «۱» شکل‌های زیر را در نظر بگیرید (δ : عمودمنصف AB)
گزینه «۱»:



گزینه «۲» ۱۸۹



گزینه «۳»



گزینه ۴
شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید:

می‌دانیم نقطه هم‌رسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. در نتیجه داریم:

$$\triangle AHM : LG \parallel HM \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{LG}{HM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow LG = \frac{2}{3} HM \quad (1)$$

از طرفی در یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه 15° ، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است. همچنین در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه وارد بر وتر، نصف طول وتر است، بنابراین داریم:

$$\triangle AHM : HM^2 = AM^2 - AH^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow HM^2 = \frac{BC^2}{4} - \frac{BC^2}{16} = \frac{3BC^2}{16} \Rightarrow HM = \frac{\sqrt{3}}{4} BC \quad (2)$$

در نتیجه:

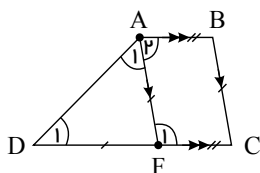
$$(1), (2) \Rightarrow LG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} BC = \frac{\sqrt{3}}{6} BC$$

۱۹۰

گزینه ۴ ۱۹۱ بی‌شمار چهارضلعی وجود دارد که قطرهای آن برهم عمودند.

گزینه ۴

از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا DC را در F قطع کند. چهارضلعی $ABCF$ متوازی‌الاضلاع است و داریم:



$$CD = AB + BC \rightarrow DF + FC = AB + AF$$

۱۹۲

$$\frac{AB=FC}{\rightarrow DF=AF \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 = \frac{\hat{F}_1}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ}$$

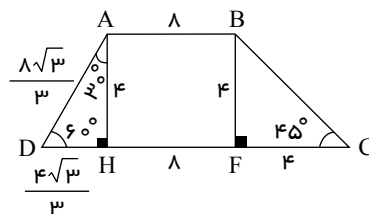
$$\hat{A}_r = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{DAB} = \hat{A}_1 + \hat{A}_r = 50^\circ + 80^\circ = 130^\circ$$

در نتیجه:

گزینه ۳ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول وتر است.

در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه $\frac{1}{2}$ برابر طول وتر است.



۱۹۳

$$\triangle ADH : 60^\circ \text{ روی } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = 4$$

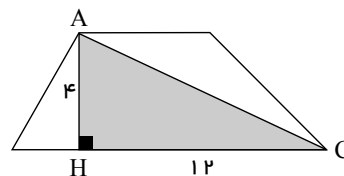
$$\triangle ADH : 30^\circ \text{ روی } DH = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$AB \parallel DC \rightarrow BF = AH = 4$$

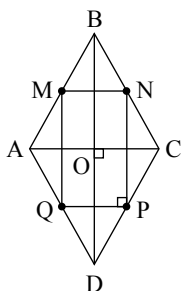
$$\triangle BFC \rightarrow FC = BF = 4 \text{ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است}$$

$$\triangle AHC : \text{قضیه فیثاغورس} : AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

در ادامه طول قطر بزرگتر که AC می‌باشد را محاسبه می‌کنیم:



گزینه ۴



$$MN PQ \text{ محیط مستطیل} = 2(MN + NP) = 2\left(\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC\right) = AC + BD$$

$$\triangle OAB \text{ در } \triangle OAB : OA + OB > AB \rightarrow 2OA + 2OB > 2AB \xrightarrow{AB=5} AC + BD > 10$$

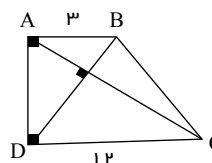
در بین گزینه‌ها تنها عدد ۱۱ امکان‌پذیر است.

۱۹۴

گزینه ۲ نکته: اگر در دوزنقه قائم‌الزاویه‌ای قطرها بر هم عمود باشند، آن‌گاه ارتفاع آن واسطه هندسی بین دو قاعده است. یعنی داریم:

$$AD^2 = AB \times DC = 3 \times 12 \rightarrow AD = 6$$

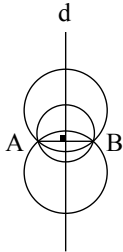
$$S : \text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2} AD (AB + DC) = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 12) = 45$$



۱۹۵

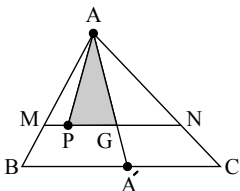
گزینه ۴

مطابق شکل بی‌شمار دایره وجود دارد که پاره خط AB وتری از آن باشد و مرکز این دایره‌ها روی عمود منصف پاره خط AB (خط d) قرار دارند.



۱۹۶

گزینه ۳



$$\frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle AMG}} = \frac{GP}{MG} = \frac{3}{4} \rightarrow S_{\triangle AFG} = \frac{3}{4} S_{\triangle AMG} \quad (1)$$

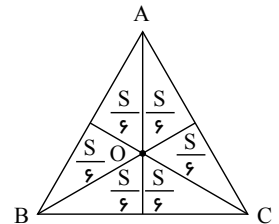
$$MG \parallel BA' \xrightarrow{\text{قضیه اماسی تشابه}} \triangle AMG \sim \triangle ABA' \rightarrow \frac{S_{\triangle AMG}}{S_{\triangle ABA'}} = \left(\frac{AG}{AA'}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \rightarrow S_{\triangle AMG} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABA'} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow S_{\triangle AFG} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} S_{\triangle ABA'} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABA'} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} S_{\triangle ABC}\right) \rightarrow S_{\triangle AFG} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$

۱۹۷

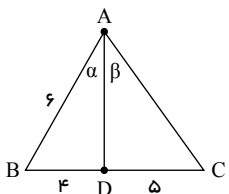
گزینه ۳ اگر فرض کنیم $S_{ABC} = S$ داریم:

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAC} = \frac{S}{3}$$



۱۹۸

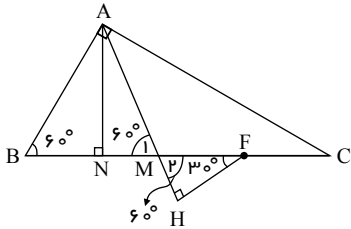
گزینه ۲



$$\left. \begin{aligned} \frac{BD}{AB} &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \frac{AB}{BC} &= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ضریض}} \triangle ABD \sim \triangle ABC \xrightarrow{\text{زاویه‌های نظیر}} \begin{cases} \hat{C} = \alpha \\ \hat{D}_1 = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\hat{B} = \hat{B}$$

۱۹۹



متلث ABM متساوی الاضلاع است $\rightarrow AM = AB = BM \rightarrow$ میانه وارد بر وتر نصف وتر است $\rightarrow AM = BM$
 $\rightarrow \hat{B} = \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 60^\circ \rightarrow \hat{F} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\triangle ABC : 60^\circ \text{ روی } AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \rightarrow BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} AC \quad (1)$$

$$\triangle FHM : 60^\circ \text{ روی } FH = \frac{\sqrt{3}}{2} MF = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} MC \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} MC \xrightarrow{MC = \frac{BC}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{BC}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} BC \xrightarrow{(1)} FH = \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} AC = \frac{1}{4} AC$$



پاسخنامه کلیدی

۱	۴	۲۵	۳	۶۹	۳	۱۰۳	۳	۱۳۷	۲	۱۷۱	۲
۲	۲	۳۶	۱	۷۰	۳	۱۰۴	۱	۱۳۸	۳	۱۷۲	۲
۳	۲	۳۷	۳	۷۱	۱	۱۰۵	۳	۱۳۹	۴	۱۷۳	۱
۴	۴	۳۸	۳	۷۲	۳	۱۰۶	۱	۱۴۰	۳	۱۷۴	۳
۵	۴	۳۹	۴	۷۳	۴	۱۰۷	۳	۱۴۱	۳	۱۷۵	۱
۶	۴	۴۰	۲	۷۴	۴	۱۰۸	۳	۱۴۲	۲	۱۷۶	۲
۷	۳	۴۱	۳	۷۵	۲	۱۰۹	۳	۱۴۳	۴	۱۷۷	۲
۸	۳	۴۲	۴	۷۶	۲	۱۱۰	۲	۱۴۴	۳	۱۷۸	۴
۹	۳	۴۳	۴	۷۷	۴	۱۱۱	۴	۱۴۵	۱	۱۷۹	۴
۱۰	۲	۴۴	۲	۷۸	۳	۱۱۲	۲	۱۴۶	۲	۱۸۰	۳
۱۱	۳	۴۵	۴	۷۹	۳	۱۱۳	۴	۱۴۷	۳	۱۸۱	۲
۱۲	۱	۴۶	۳	۸۰	۴	۱۱۴	۲	۱۴۸	۳	۱۸۲	۱
۱۳	۲	۴۷	۲	۸۱	۱	۱۱۵	۳	۱۴۹	۲	۱۸۳	۴
۱۴	۳	۴۸	۲	۸۲	۲	۱۱۶	۳	۱۵۰	۱	۱۸۴	۳
۱۵	۳	۴۹	۱	۸۳	۱	۱۱۷	۲	۱۵۱	۲	۱۸۵	۲
۱۶	۲	۵۰	۲	۸۴	۴	۱۱۸	۲	۱۵۲	۳	۱۸۶	۲
۱۷	۴	۵۱	۱	۸۵	۴	۱۱۹	۳	۱۵۳	۲	۱۸۷	۴
۱۸	۲	۵۲	۴	۸۶	۴	۱۲۰	۲	۱۵۴	۳	۱۸۸	۴
۱۹	۳	۵۳	۲	۸۷	۱	۱۲۱	۱	۱۵۵	۳	۱۸۹	۴
۲۰	۱	۵۴	۱	۸۸	۴	۱۲۲	۴	۱۵۶	۱	۱۹۰	۴
۲۱	۳	۵۵	۲	۸۹	۳	۱۲۳	۳	۱۵۷	۲	۱۹۱	۴
۲۲	۳	۵۶	۱	۹۰	۱	۱۲۴	۲	۱۵۸	۳	۱۹۲	۴
۲۳	۳	۵۷	۲	۹۱	۳	۱۲۵	۲	۱۵۹	۲	۱۹۳	۳
۲۴	۱	۵۸	۲	۹۲	۲	۱۲۶	۲	۱۶۰	۳	۱۹۴	۴
۲۵	۲	۵۹	۳	۹۳	۴	۱۲۷	۴	۱۶۱	۳	۱۹۵	۲
۲۶	۲	۶۰	۳	۹۴	۱	۱۲۸	۴	۱۶۲	۴	۱۹۶	۴
۲۷	۴	۶۱	۲	۹۵	۱	۱۲۹	۲	۱۶۳	۱	۱۹۷	۳
۲۸	۲	۶۲	۲	۹۶	۴	۱۳۰	۳	۱۶۴	۲	۱۹۸	۳
۲۹	۳	۶۳	۲	۹۷	۳	۱۳۱	۲	۱۶۵	۳	۱۹۹	۲
۳۰	۱	۶۴	۲	۹۸	۲	۱۳۲	۳	۱۶۶	۳	۲۰۰	۲
۳۱	۴	۶۵	۲	۹۹	۱	۱۳۳	۴	۱۶۷	۳		
۳۲	۲	۶۶	۱	۱۰۰	۴	۱۳۴	۴	۱۶۸	۱		
۳۳	۱	۶۷	۴	۱۰۱	۱	۱۳۵	۴	۱۶۹	۱		
۳۴	۳	۶۸	۳	۱۰۲	۲	۱۳۶	۲	۱۷۰	۱		

