جزوه تایم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ۱: منطق ریاضی

گزاره: گزاره جمله‌ای است خبری که یا درست است یا نادرست ولی نه هر دو.

- هر یک از عبارت‌های زیر گزاره‌اند. درست یا نادرست بودن آن‌ها را تعیین کنید.

الف) سه عددی زوج است. نادرست

ب) یازده عددی اول است. درست

ج) حافظ شیرازی ریاضیدان است. نادرست

د) $2^{500}+1$ عددی اول است. درستی و نادرستی معلوم نیست.

هـ) در سیاره مشتری موجود زنده وجود دارد. درستی و نادرستی معلوم نیست.

و) عدد $\pi+e$ گنگ است. درستی و نادرستی معلوم نیست.

مثال: هیچکدام از عبارت‌های زیر گزاره نیستند.

الف) در کلاس را باز کن. (جملات امری گزاره نیستند.)

ب) آیا مسائل را حل کردی؟ (جملات پرسشی گزاره نیستند.)

ج) چه هوای خوبی! (جملات عاطفی و تعجبی گزاره نیستند.)

نکته: گزاره‌ها را معمولاً با نماد p، q، r، s، t و ... نشان می‌دهند.

نقیض (نفی) یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، آنگاه نقیض p (نفی p) را با نماد $\sim p$ نشان داده و جدول ارزشی آن

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عبارت است از:

P	$\sim P$
1	0
0	1

P	$\sim P$
T	F
F	T

P	$\sim P$
د	ن
ن	د

• مثال • P: حافظ ریاضی دان است. F ⟵ $\sim P$: حافظ ریاضی دان نیست. T

• مثال • P: عدد دو اول است. T ⟵ $\sim P$: عدد دو اول نیست. F

• اعمال روی گزاره ها •

۱ـ ترکیب فصلی دو گزاره: ترکیب فصلی دو گزاره P و q را با نماد $P \vee q$ نشان داده و به صورت «P یا q» آن را می خوانیم و

جدول ارزشی آن عبارت است از:

P	q	$P \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

• نکته • گزاره $P \vee q$ فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره P و q نادرست باشند، در سایر حالات درست است.

ـ ارزش هر یک از گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف) حافظ ریاضیدان است $\overset{F}{}$ یا $\overset{\vee}{}$ سعدی فیزیکدان است $\overset{F}{}$. F

ب) حافظ ریاضیدان است $\overset{F}{}$ یا $\overset{\vee}{}$ سعدی شاعر است $\overset{T}{}$. T

پ) حافظ شاعر است $\overset{T}{}$ یا $\overset{\vee}{}$ سیزده عددی اول است $\overset{T}{}$. T

• تعریف • دو گزاره A و B را هم ارز منطقی گویند، (A معادل B است.) هرگاه جدول ارزشی آن ها نظیر به نظیر یکسان باشد و

با نماد $A \equiv B$ نشان می دهیم.

Subject.
Year. Month. Date. ( )

- نشان دهید: $\sim(\sim P) \equiv P$

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
1	0	1
0	1	0

۲- ترکیب عطفی دو گزاره: ترکیب عطفی دو گزاره p و q را با نماد $p \wedge q$ نشان داده و به صورت «p و q» می‌خوانیم.

جدول ارزشی آن عبارت است از:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

• نکته: گزاره $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند و در بقیه حالات نادرست است.

- نشان دهید: الف) $p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

ب) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

* بنابراین ترکیب فصلی و عطفی خاصیت جابجایی دارد.

- فرض کنید p، q و r گزاره باشند، ثابت کنید:

الف) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

PAPCO

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

ب) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

p	q	r	$q\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\wedge r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

ـ برای دوگزاره p و q با استفاده از جدول ارزش نشان دهید:

الف) $\underbrace{p \wedge (q \vee r)}_{A} \equiv \underbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}_{B}$

p	q	r	$q\vee r$	A	$p\wedge q$	$p\wedge r$	B
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

ـ اگر p و q دوگزاره دلخواه باشند، آنگاه:

الف) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب) $\sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee\sim q$

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

- بدون استفاده از جدول ارزشی ثابت کنید:

الف) $\sim(p\vee q\vee r)\equiv \sim p\wedge\sim q\wedge\sim r \longrightarrow \sim(p\vee q\vee r)\equiv\sim[(p\vee q)\vee r]$

$\equiv\sim(p\vee q)\wedge\sim r\equiv(\sim p\wedge\sim q)\wedge\sim r\equiv\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r$

ب) $\sim(p\wedge q\wedge r)\equiv\sim p\vee\sim q\vee\sim r \longrightarrow \sim(p\wedge q\wedge r)=\sim[(p\wedge q)\wedge r]$

$\equiv\sim(p\wedge q)\vee\sim r\equiv(\sim p\vee\sim q)\vee\sim r\equiv\sim p\vee\sim q\vee\sim r$

حالت کلی:

$\sim(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\dots\wedge p_n)\equiv\sim p_1\vee\sim p_2\vee\sim p_3\vee\dots\vee\sim p_n$

$\sim(p_1\vee p_2\vee p_3\vee\dots\vee p_n)\equiv\sim p_1\wedge\sim p_2\wedge\sim p_3\wedge\dots\wedge\sim p_n$

- جدول ارزش گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $p\vee\sim p\equiv T$

p	$\sim p$	$p\vee\sim p$
1	0	1
0	1	1

گزاره $p\vee\sim p$ یک گزاره همیشه درست یا راستگو است.

ب) $p\wedge\sim p\equiv F$

p	$\sim p$	$p\wedge\sim p$
1	0	0
0	1	0

گزاره $p\wedge\sim p$ یک گزاره همیشه غلط یا دروغگو است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نمونه ای از گزاره های درست:

الف) $p \vee p \equiv p$ ب) $p \wedge p \equiv p$

ج) $p \vee T \equiv T$ د) $p \wedge F \equiv F$

هـ) $p \vee F \equiv p$ و) $p \wedge T \equiv p$

۳- ترکیب شرطی دوگزاره: ترکیب شرطی دوگزاره p و q را با نماد $p \Rightarrow q$ نشان داده و به صورت «اگر p آنگاه q» آن را می خوانیم. در این حالت p را مقدم و q را تالی می گوییم و جدول ارزش آن عبارت است از:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p \Rightarrow q$

اگر قبول شوم $\Rightarrow$ مهمانی خواهم داد

نکته: یک گزاره شرطی فقط وقتی غلط است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

نکته: گزاره $p \Rightarrow q$ را به صورت زیر می خوانند: "p شرط کافی برای q است" و "q شرط لازم برای p است".

مثال:

اگر ABCD مربع باشد. $\xrightarrow{\text{کافی}}$ قطرها همدیگر را نصف می کنند. (لازم)

نکته: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

- طرف دوم هر یک را بنویسید.

الف) $p \Rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$

ب) $\sim H \Rightarrow k \equiv H \vee k$

ج) $H \vee \sim k \equiv \begin{cases} \sim H \Rightarrow \sim k \longrightarrow \text{اگر H مقدم باشد.} \\ k \Rightarrow H \longrightarrow \text{اگر k مقدم باشد.} \end{cases}$

- جدول ارزشی گزاره $\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$ را تشکیل دهید.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$	$\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1

- بدون جدول نشان دهید. $\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p \equiv T$

$$\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p \equiv \sim(\sim(p \vee \sim q)) \vee \sim p \equiv \underbrace{p \vee \sim p}_{T} \vee \sim q \equiv T \vee \sim q \equiv T$$

- نشان دهید اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

روش اول:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

روش دوم: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv q \vee \sim p \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

از مثال بالا نتیجه می‌شود که: هر گزاره شرطی با عکس نقیض اش معادل است.

- اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 زوج باشد، آنگاه n نیز زوج است.

گزاره: $n^2 =$ زوج $\Longrightarrow n =$ زوج

روش اول: $n^2 =$ زوج $\longrightarrow n \times n =$ زوج

از آن جا که ضرب ۲ عدد وقتی زوج است که حداقل یکی از آن ها زوج باشد، پس: $n =$ زوج

روش دوم: $n^2 =$ زوج $\longrightarrow n^2 = 2k \,,\; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 - 1 = 2k - 1$

$\Longrightarrow (n-1)(n+1) = 2k - 1 \longrightarrow n - 1 = 2k' - 1 \Longrightarrow \boxed{n = 2k'}$

$n + 1 = 2k' + 1 \longrightarrow \boxed{n = 2k'}$

اثبات غیرمستقیم: عکس نقیض: $n =$ فرد $\Longrightarrow n^2 =$ فرد

$n = 2k + 1 \longrightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1 \longrightarrow n^2 =$ فرد

عکس نقیض گزاره، درست است و برقرار است، پس خود گزاره نیز درست است.

۱- نشان دهید: $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim q) \wedge \sim r] \Longrightarrow \sim p \equiv T$

۲- ساده کنید: $p \vee q \Longrightarrow [q \Rightarrow (\sim p \wedge q)]$

۳- ساده کنید: $(p \Rightarrow q) \wedge [\sim q \wedge (\sim p \vee q)]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(1

$$[(p \to q) \wedge (\sim r \to \sim q) \wedge \sim r] \to \sim p$$

$$[(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim q) \wedge \sim r] \to \sim p \equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim q) \wedge \sim r] \vee \sim p$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge q) \vee r \vee \sim p \equiv [(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \vee [(\sim r \wedge q) \vee r] \equiv$$ ادامه پایین صفحه →

(2

$$p \vee q \Longrightarrow [q \Longrightarrow (\sim p \wedge q)] \equiv p \vee q \Longrightarrow [\sim q \vee (\sim p \wedge q)]$$

$$\equiv p \vee q \Longrightarrow [(\sim p \vee \sim q) \wedge (\overset{T}{\cancel{\sim q \vee q}})] \equiv p \vee q \Longrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee \sim q) \equiv (\sim p \vee \sim q \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim q)$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$$

(3

$$(\sim p \vee q) \wedge [\sim q \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (\sim p \vee q) \wedge [(\sim q \wedge \sim p) \vee (\overset{F}{\cancel{\sim q \wedge q}})]$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \wedge \sim p) \equiv (\sim q \wedge \sim p \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge \underbrace{\overset{F}{\sim q \wedge q}})$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$$

① ادامه سؤال →

$$[(\overset{T}{\cancel{\sim p \vee p}}) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee [(\overset{T}{\cancel{r \vee \sim r}}) \wedge (r \vee q)]$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee q) \equiv \sim p \vee (\overset{T}{\cancel{\sim q \vee q}}) \vee r \equiv T$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴ـ ترکیب دوشرطی دو گزاره: ترکیب دوشرطی دو گزاره p و q را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان داده و جدول ارزش آن عبارت است از:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

نکته: گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت های زیر می خوانند:

« p اگر و فقط اگر q » و « p شرط لازم و کافی برای q است. » و « q شرط لازم و کافی برای p است. » و « اگر p آنگاه q و برعکس »

نکته: به وضوح می توان ثابت کرد که:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

مثال: نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. $\Longleftrightarrow MA = MB$

این گزاره شرطی معادل است با: $MA = MB \Longrightarrow M$ روی عمودمنصف AB است.

و

M روی عمودمنصف AB است. $\Longrightarrow MA = MB$

ـ بدست آورید که $p \Leftrightarrow q$ با چه چیزهایی معادل است.

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

$$\equiv (\sim q \Leftrightarrow \sim p) \equiv (\sim p \Leftrightarrow \sim q) \longrightarrow p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$$

$$\boxed{p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)}$$

نکته: $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\equiv [(\sim p\vee q)\wedge \sim q]\vee[(\sim p\vee q)\wedge p] \equiv [(\sim p\wedge \sim q)\vee(\overset{F}{q\wedge \sim q})]\vee[(\overset{F}{\sim p\wedge p})\vee(q\wedge p)]$$

$$\equiv (\sim p\wedge \sim q)\vee(p\wedge q)\equiv \sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)\equiv p\vee q \Rightarrow p\wedge q$$

$$\longrightarrow \boxed{p\Leftrightarrow q \equiv p\vee q \Rightarrow p\wedge q}$$

«استلزام منطقی»

فرض کنید p_1، p_2، ......، p_n و q گزاره باشند. در این صورت گزاره شرطی $p_1\wedge p_2\wedge\dots\wedge p_n \Rightarrow q$ را یک استلزام منطقی گویند.

اگر گزاره $p_1\wedge p_2\wedge\dots\wedge p_n \Rightarrow q$ یک گزاره همیشه درست باشد، آنگاه می‌گوییم p_1 و p_2 و ...... و p_n گزاره q را نتیجه می‌دهند

و آن را به صورت

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

نشان می‌دهیم و به عبارت فوق یک استنتاج می‌گوییم.

«مثال»: عبارت زیر یک استنتاج است.

اگر باران بیاید، آنگاه زمین خیس می‌شود.

حالا باران می‌بارد.

∴ زمین خیس می‌شود.

«قوانین استنتاج»

۱- قاعده انتزاع:

$$\begin{array}{l} \overbrace{\overset{1}{p}\Rightarrow \overset{1}{q}}^{1} \\ 1\ p \\ \hline \therefore q\ \ 1 \end{array}$$

«مثال» با جدول ارزش ثابت کنید قاعده انتزاع یک استنتاج است.

باید نشان دهیم گزاره $\overbrace{(P \Rightarrow q) \wedge P \Rightarrow q}^{A}$ همیشه درست است.

P	q	$P \Rightarrow q$	$(P \Rightarrow q) \wedge P$	A
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

چون P همیشه درست است، فقط این دو ردیف بالا لازم است.

۲_ قاعده نقیض انتزاع:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

اگر خوب درس بخوانیم $\Longrightarrow$ در امتحانات قبول می‌شویم
در امتحانات قبول نشدیم"

$\therefore$ خوب درس نخواندیم.

«مثال» آیا استلزام زیر یک استنتاج است؟

$$\begin{array}{l} \sim P \Rightarrow q \\ \sim r \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore P \end{array}$$

اثبات: بنا به قاعده نقیض انتزاع

$$\begin{array}{l} q \Rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim P \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim(\sim P) \equiv P \end{array}$$

" " " " "

۳ـ قاعده قیاس صوری:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$

۴ـ قاعده ترکیب عطفی:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

۵ـ قاعده تفصیل فصلی:

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

۶ـ قاعده ساده‌سازی عطفی:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

۷ـ قاعده قیاس فصلی:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

مثال: معتبربودن استنتاج‌های زیر را تحقیق کنید.

الف)

$$\begin{array}{l} p \\ \sim q \Rightarrow \sim r \\ p \Rightarrow \sim q \\ \hline \therefore \sim r \end{array}$$

روش اول: (قیاس صوری)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ \sim q \Rightarrow \sim r \\ \hline \therefore p \Rightarrow \sim r \end{array} \quad \xrightarrow{\text{(انتزاع)}} \quad \begin{array}{l} p \Rightarrow \sim r \\ p \\ \hline \therefore \sim r \end{array}$$

روش دوم: (انتزاع)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ p \\ \hline \therefore \sim q \end{array} \quad \xrightarrow{\text{(انتزاع)}} \quad \begin{array}{l} \sim q \Rightarrow \sim r \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim r \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ t \vee \sim s \\ r \Rightarrow s \\ \sim u \\ \sim t \vee u \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

۱ (قیاس صوری)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ r \Rightarrow s \\ \hline \therefore p \Rightarrow s \end{array}$$

۲ (قیاس فصلی)

$$\begin{array}{l} u \vee \sim t \\ \sim u \\ \hline \therefore \sim t \end{array}$$

۳ (قیاس فصلی)

$$\begin{array}{l} t \vee \sim s \\ \sim t \\ \hline \therefore \sim s \end{array}$$

۴ (نقیض انتزاع)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow s \\ \sim s \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

ج)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim r \vee (\sim t \vee u) \\ p \wedge t \\ q \Rightarrow r \wedge s \\ \hline \therefore u \end{array}$$

۱ (قیاس صوری)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \wedge s \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \wedge s \end{array}$$

۲ (ساده‌سازی فصلی)

$$\begin{array}{l} p \wedge t \\ \hline \therefore t \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \wedge t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

۳ (قیاس فصلی)

$$\begin{array}{l} \sim t \vee (\sim r \vee u) \\ t \\ \hline \therefore \sim r \vee u \end{array}$$

۴ (انتزاع)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \wedge s \\ p \\ \hline \therefore r \wedge s \end{array}$$

۵ (ساده‌سازی فصلی)

$$\begin{array}{l} r \wedge s \\ \hline \therefore r \end{array}$$

۶ (قیاس فصلی)

$$\begin{array}{l} \sim r \vee u \\ r \\ \hline \therefore u \end{array}$$

د)
$$\sim r \Rightarrow (s \Rightarrow \sim t)$$
$$\sim p \Rightarrow s$$
$$\sim w$$
$$\sim r \vee w$$
$$\therefore t \Rightarrow p$$

① (قیاس فصلی)
$$w \vee \sim r$$
$$\sim w$$
$$\therefore \sim r$$

② (انتزاع)
$$\sim r \Rightarrow (s \Rightarrow \sim t)$$
$$\sim r$$
$$\therefore s \Rightarrow \sim t$$

③ (قیاس صوری)
$$\sim p \Rightarrow s$$
$$s \Rightarrow \sim t$$
$$\therefore \sim p \Rightarrow \sim t$$

④ (عکس نقیض)
$$\sim p \Rightarrow \sim t \equiv t \Rightarrow p \ \checkmark$$

ه)
$$p \wedge \sim q$$
$$p \Rightarrow r$$
$$r \Rightarrow s \vee q$$
$$\therefore s$$

① (قیاس صوری)
$$p \Rightarrow r$$
$$r \Rightarrow s \vee q$$
$$\therefore p \Rightarrow s \vee q$$

② ساده سازی عطفی
$$p \wedge \sim q$$
$$\therefore \sim q$$
$$p \wedge \sim q$$
$$\therefore p$$

③ (انتزاع)
$$p \Rightarrow q \vee s$$
$$p$$
$$\therefore q \vee s$$

④ قیاس فصلی
$$q \vee s$$
$$\sim q$$
$$\therefore s$$

مثال. نقیض گزاره «$\underbrace{\text{اگر او متدین باشد}}_{p}$، $\underbrace{\text{درستکار است}}_{q}$.» کدام است؟

۱) او هم متدین است هم درستکار. ۲) او نه متدین است نه درستکار.

۳) او متدین نیست ولی درستکار است. ۴) او متدین هست ولی درستکار نیست. ✓

$$p \to q \equiv \sim p \vee q \qquad \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

گزاره نما. گزاره نما عبارتی است شامل یک یا چند متغیر که با جایگذاری عناصر مجموعه مرجع بجای متغیر یا متغیرها تبدیل به گزاره می‌شود.

نکته. گزاره نمای یک متغیره را با $P(x)$، و گزاره نمای دو متغیره را با $P(x,y)$ نشان می‌دهند.

مثال. $P(x)$: x زوج است.

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

مجموعه صدق گزاره نما: عنصری از مجموعه مرجع که به ازای آن، گزاره نما به گزاره درست تبدیل می شود را مجموعه صدق گزاره نما می گویند.

$$S = \{x \in M \mid P(x) \text{ درست}\}$$

مثال: $P(x): x^3 - 4x = 0 \quad , \quad M = \mathbb{R}$

$$x^3 - 4x = 0 \longrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \longrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \longrightarrow x = 0, -2, 2$$

$$\Longrightarrow S = \{0, -2, 2\}$$

مثال: $P(x, y): x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad M = \mathbb{Z}$

$$S = \{(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)\}$$

سور عمومی: فرض کنید $P(x)$ یک گزاره نما در مجموعه مرجع M باشد. اگر به ازای هر عضو مرجع، $P(x)$ یک گزاره درست باشد، آنگاه آن را با نماد $\forall x \in M \;\; P(x)$ نشان داده و آن را یک گزاره کلی یا سور عمومی می نامیم.

مثال: ۱) هر عدد اول بزرگتر از ۲ فرد است. ۲) در هر مربع، قطرها برهم عمودند.

۳) مربع هر عدد حقیقی نامنفی است. ۴) برای هر عدد حقیقی a و b، $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

نکته: عبارت $P(x) \;,\; \forall x$ اگر درست باشد، یک گزاره است.

مثال نقض: به مثالی که یک حکم کلی را رد کند، مثال نقض می گویند.

- هر مورد را با مثال نقض رد کنید.

۱) برای هر $n\in\mathbb{N}$، 2^n+3 اول است. $n=5 \Rightarrow 2^5+3=35=5\times7$

۲) برای هر $n\in\mathbb{N}$، 4^n+3 اول است. $n=7 \Rightarrow 4^7+3=16387$ مرکب

۳) برای هر $n\in\mathbb{N}$، $2^{2^n}+1$ اول است. $n=5 \rightarrow 2^{2^5}+1=2^{32}+1$ مرکب

۴) مجموع هر دو عدد گنگ، گنگ است. $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

۵) برای هر $n\in\mathbb{N}$، $m=(p_1\times p_2\times\dots\times p_n)+1$ عدد اول است که p_i برابر iامین عدد اول است.

$m=2\times3\times5\times7\times11\times13+1=30031=59\times509$ مرکب

۶) هر عدد گویا در هر عدد گنگی ضرب شود، حاصل عدد گنگ است. $0\times\sqrt{2}=0$

۷) $\forall a\in\mathbb{R}\ ,\ a^2\geqslant a$ $\quad a=1/2 \longrightarrow \frac{1}{4}\not\geqslant\frac{1}{2}$

۸) اگر α و β گنگ باشند، آنگاه α^β گنگ است. $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^2=4$ گویا

۹) اگر n نقطه متمایز روی محیط دایره دو به دو به هم وصل کنیم دایره را به حداکثر 2^{n-1} ناحیه تقسیم می‌کند. $2^{6-1}=2^5=32\neq 31$ جواب

سور وجودی: فرض کنید $P(x)$ یک گزاره‌نما باشد. اگر x ای در مجموعه مرجع باشد که به ازای آن $P(x)$ درست باشد، آن را با نماد $\exists x\ P(x)$ نشان داده و به صورت «وجود دارد x ای که $P(x)$» می‌خوانیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عبارت $\exists x \; P(x)$ یک گزاره است و آن را گزاره وجودی می نامیم و وقتی درست است که حداقل یک x باشد که $P(x)$ درست باشد.

مثال: $\exists x \in \mathbb{R} \,,\, x^2 < x$

سور انحصاری: سور انحصاری با نماد $\exists!$ نشان داده می شود و به معنی آن است که فقط یک x است که $P(x)$.

مثال: $\exists! x \in \mathbb{R} \,,\, x^3 + x = 0$ یعنی معادله $x^3 + x = 0$ فقط یک ریشه دارد.

سور هیچ: سور هیچ با نماد $\nexists$ نشان داده می شود و به معنی آن است که هیچ x ای نیست که خاصیت P داشته باشد.

$$\nexists x \; P(x) \equiv \forall x \; \sim P(x)$$

مثال: $\nexists x \in \mathbb{R} \,,\, x^2 + 1 = 0 \equiv \forall x \in \mathbb{R} \,,\, x^2 + 1 \neq 0$

نقیض سورها

۱_ نقیض سور عمومی:

$$\sim (\forall x \; P(x)) \equiv \exists x \; \sim P(x)$$

مثال:

$$\sim (\forall x > 0 \quad x < x^2) \equiv \exists x > 0 \quad x \geq x^2$$

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R} \,,\, x^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R} \,,\, x^2 < 0$$

۲_ نقیض سور وجودی:

$$\sim (\exists x \; P(x)) \equiv \forall x \; \sim (P(x))$$

مثال:

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R} \,,\, x^2 + 1 = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R} \,,\, x^2 + 1 \neq 0$$

$$\sim (\exists x > 0 \,,\, x > x^2) \equiv \forall x > 0 \,,\, x \leq x^2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ـ نقیض هریک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} : x+y=0 \longrightarrow$ درست

نقیض: $\exists x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} : x+y \neq 0 \longrightarrow$ غلط

ب) $\exists x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} , xy=y \longrightarrow$ درست

نقیض: $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} , xy \neq y \longrightarrow$ غلط

ج) $\forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} , x>y \longrightarrow$ غلط

نقیض: $\exists x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} , x \leqslant y \longrightarrow$ درست

د) $\exists x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} , x>y \longrightarrow$ درست

نقیض: $\forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} , x \leqslant y \longrightarrow$ غلط

• اثبات برهان خلف •

گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را درنظر بگیرید. مراحل اثبات روش برهان خلف عبارتست از:

$$\underbrace{\sim q}_{\text{فرض خلف}} \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow \cdots \Longrightarrow \begin{cases} \sim p \; \times \\ \text{یا} \\ \sim T \; \times \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ـ نقیض هریک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R} : x+y=0 \longrightarrow$ درست

نقیض: $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R} : x+y\neq 0 \longrightarrow$ غلط

ب) $\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R} ; xy=y \longrightarrow$ درست

نقیض: $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R} , xy\neq y \longrightarrow$ غلط

ج) $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R} , x>y \longrightarrow$ غلط

نقیض: $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R} , x\leq y \longrightarrow$ درست

د) $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R} , x>y \longrightarrow$ درست

نقیض: $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R} , x\leq y \longrightarrow$ غلط

• اثبات برهان خلف •

گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را درنظر بگیرید. مراحل اثبات روش برهان خلف عبارتست از:

$$\underbrace{\sim q}_{\text{فرض خلف}} \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow \cdots \longrightarrow \begin{cases} \sim p \ \times \\ \text{یا} \\ \sim T \ \times \end{cases}$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

• مثال : اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است.

فرض: $n \in \mathbb{N}$ ، $n^2 =$ زوج $\overset{?}{\Longrightarrow}$ حکم: $n =$ زوج

برهان خلف: فرض کنیم n زوج نباشد، پس n فرد است. بنابراین:

فرض خلف

$n = 2k+1 \ , \ k \in \mathbb{W} \Longrightarrow n^2 = 4k^2+4k+1 \longrightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2+2k}_{k'})+1$

$\longrightarrow n^2 = 2k'+1 \ , \ k' \in \mathbb{W} \longrightarrow n^2 =$ فرد $\divideontimes$ بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

• مثال : ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات (برهان خلف): فرض می‌کنیم $\sqrt{2}$ گنگ نباشد، پس گویاست. بنابراین:

a, b نسبت به هم اول‌اند.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \ , \ a, b \in \mathbb{Z} \ , \ b \neq 0 \ , \ (a,b) = 1$

$\longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \longrightarrow a^2 = \underbrace{2b^2}_{\text{زوج}} \xrightarrow{\text{مثال قبل}} \boxed{a = 2k}$ ① $, k \in \mathbb{W} \longrightarrow 4k^2 = 2b^2 \longrightarrow b^2 = \underbrace{2k^2}_{\text{زوج}}$

$\xrightarrow{\text{مثال قبل}} \boxed{b = 2k'}$ ② $, k' \in \mathbb{W} \quad \xrightarrow{①, ②} (a,b) \neq 1 \ \divideontimes$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

افراز یک مجموعه: فرض کنید A یک مجموعه ناتهی باشد. می‌گوییم A_1 ، A_2 ، ... ، A_n یک افراز برای A است، هرگاه:

۱) $A_i \neq \phi \quad , \quad \forall 1 \le i \le n$

۲) $A_i \cap A_j = \phi \quad , \quad \forall i \neq j$

۳) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

نکته: تعداد افرازهای یک مجموعه به صورت زیر بدست می‌آید:

۱	۱					
۲	۱	۲				
۳	۲	۳	۵			
٤	۵	۷	۱۰	۱۵		
۵	۱۵	۲۰	۲۷	۳۷	۵۲	
۶	۵۲	۶۷	۸۷	۱۱٤	۱۵۱	۲۰۳

- مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ را به چند طریق:

الف) می‌توان به سه سلول افراز کرد؟

ب) می‌توان به سه سلول افراز کرد به طوری دو عنصر a و b کنار هم باشند؟

الف) — — — | — — — | — $\quad \dfrac{\binom{7}{3}\binom{4}{3}\binom{1}{1}}{2!} = 70$

— — — | — — | — — $\quad \dfrac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} = 105$

— — — — | — — | — $\quad \binom{7}{4}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 105$

— — — — — | — | — $\quad \dfrac{\binom{7}{5}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 21$

$\rightarrow$ ۳۰۱ حالت

ب) $\boxed{a,b} = x \qquad \{x, c, d, f, g\}$

$$\text{---|-|-} \longrightarrow \frac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 15$$

$$\text{---|--|-} \longrightarrow \binom{6}{3}\binom{4}{2}\binom{1}{1} = 120$$

$$\text{--|---|--} \longrightarrow \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$$

$\longrightarrow$ ۱۵۰ حالت

«مثال‌هایی از فصل منطق ریاضی»

ـ هر یک از گزاره نماهای زیر را با استفاده از سور عمومی $(\forall)$ یا سور وجودی $(\exists)$ به گزاره درست تبدیل کنید، سپس نقیض آن را بنویسید.

الف) $x^2 - 2 \geq 0 \longrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 - 2 \geq 0 \xrightarrow{\text{نقیض}} \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 - 2 < 0$

ب) $x^2 - x + 1 > 0 \longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 1 > 0 \xrightarrow{\text{نقیض}} \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - x + 1 \leq 0$

ج) $x^2 + y^2 > 0 \longrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 > 0 \xrightarrow{\text{نقیض}} \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 0$

د) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \xrightarrow{\text{نقیض}} \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \neq (x-1)(x+1)$

ه) $\frac{\sqrt{x} - 5}{x - 1} = 0 \longrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 1} = 0 \xrightarrow{\text{نقیض}} \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 1} \neq 0$

و) $|x+y| \leq |x| + |y| \longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y| \xrightarrow{\text{نقیض}} \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : |x+y| > |x| + |y|$

Year. Month. Date. ( )

$2^3 = 8$ سطر جدول (تعداد متغیرها)

ـ جدول ارزش گزاره $\overbrace{(P \Leftrightarrow S) \wedge (\sim q \vee S)}^{A}$ را تشکیل دهید.

P	q	S	$P\Leftrightarrow S$	$\sim q$	$\sim q \vee P$	A
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1

ـ بدون استفاده از جدول ثابت کنید $[(P\Rightarrow q)\wedge(\sim r\Rightarrow \sim P)\wedge \sim r]\Rightarrow \sim P \equiv T$.

$$[(P\rightarrow q)\wedge(\sim r\rightarrow \sim P)\wedge\sim r]\rightarrow \sim P \equiv [(\sim P\vee q)\wedge(r\vee\sim P)\wedge\sim r]\Rightarrow \sim P$$

$$\equiv (P\wedge\sim q)\vee(\sim r\wedge P)\vee r\vee\sim P \equiv [(\overset{T}{\cancel{P\vee\sim P}})\wedge(\sim q\vee\sim P)]\vee[(\overset{T}{\cancel{\sim r\vee r}})\wedge(P\vee r)]$$

$$\equiv (\sim q\vee\sim P)\vee(P\vee r) \equiv (\overset{T}{\cancel{P\vee\sim P}})\vee(\sim q\vee r)\equiv T \checkmark$$

جبر مجموعه‌ها

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، در این صورت:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x\in A \rightarrow x\in B)$$

نکته:

$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x\in A \wedge x\notin B)$$

تعریف تساوی دو مجموعه:

$$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$$

ـ اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$. اثبات: فرض کنید x دلخواه باشد.

$$x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \xrightarrow{B\subseteq C} x\in C \longrightarrow x\in A\Rightarrow x\in C \longrightarrow A\subseteq C \checkmark$$

– اگر $A\subseteq B$ آنگاه $B'\subseteq A'$. اثبات: فرض کنید x دلخواه باشد.

$x\in B' \to x\notin B \xrightarrow{A\subseteq B} x\notin A \to x\in A' \to x\in B' \Rightarrow x\in A' \to B'\subseteq A'$ ✓

– برای هر مجموعه A، $\phi\subseteq A$. اثبات:

$\phi\subseteq A \longleftrightarrow \forall x; (\underbrace{x\in\phi}_{0} \longrightarrow x\in A)$

چون ارزش گزاره سمت راست همواره 1 است، پس ارزش گزاره سمت چپ نیز همواره 1 است، یعنی همیشه درست است، پس: $\phi\subseteq A$

– فرض کنید A، B، C و D مجموعه هستند و $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$. ثابت کنید: $A\cup C\subseteq B\cup D$

$x\in A\cup C \longrightarrow x\in A \vee x\in C \xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} x\in B \vee x\in D \longrightarrow x\in B\cup D \longrightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$ ✓

– اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ باشد، ثابت کنید $A\cup B\subseteq C$

$A\subseteq C \wedge B\subseteq C \xrightarrow{\text{مثال قبل}} A\cup B\subseteq C\cup C \longrightarrow A\cup B\subseteq C$

– اگر $A\subseteq B$ آنگاه: $A-B=\phi$.

$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\} \overset{A\subseteq B}{=} \{x \mid x\in B \wedge x\notin B\} = \phi$

– اگر $A-B=\phi$ آنگاه $A\subseteq B$.

$A-B=\phi \equiv \nexists x; x\in A \wedge x\notin B \equiv \forall x; x\notin A \vee x\in B$

$\forall x, x\in A \Longrightarrow x\in B \equiv A\subseteq B$

ـ اگر $A \subseteq \phi$ آنگاه $A=\phi$.

$$\left.\begin{matrix} A \subseteq \phi \\ \phi \subseteq A \end{matrix}\right\} \longrightarrow A=\phi$$

ـ M مرجع است. اگر $M \subseteq A$ باشد، ثابت کنید $M=A$.

$$\left.\begin{matrix} M \subseteq A \\ A \subseteq M \end{matrix}\right\} \longrightarrow A=M$$

ـ عبارت های زیر را اثبات کنید.

الف) $A \cup B = B \cup A$

$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \in M \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$$

ب) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$x \in A \cup (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$$

ج) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$x \in A \cap (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$$

د) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$x\in A\cap(B\cup C)\Longleftrightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

$\Longleftrightarrow x\in(A\cap C)\vee x\in(A\cap B)\Longleftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

هـ) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$x\in A\cup(B\cap C)\Longleftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)\Longleftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$

$\Longleftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)\Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

ز) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$x\in(A\cap B)'\Longleftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)'\Longleftrightarrow x\notin A\vee x\notin B\Longleftrightarrow x\in A'\vee x\in B'\Longleftrightarrow x\in A'\cup B'$

ح) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$x\in(A\cup B)'\Longleftrightarrow(x\in A\vee x\in B)'\Longleftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B\Longleftrightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Longleftrightarrow x\in A'\cap B'$

قوانین جبر مجموعه ها

۱) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

۲) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

۳) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۴) $(A\cup B)'=A'\cap B'$, $(A\cap B)'=A'\cup B'$

*۵) $A-B=A\cap B'$

۶) $A\cap(A\cup B)=A$, $A\cup(A\cap B)=A$

۷) $A\cup A'=M$, $A\cap A'=\phi$

۸) $A\cup\phi=A$, $A\cap\phi=\phi$

۹) $A\cup M=M$, $A\cap M=A$

۱۰) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cup B=B$, $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A$

۱۱) $\phi'=M$, $M'=\phi$, $(A')'=A$

۱۲) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ (تفاضل متقارن)

ـ هریک از احکام زیر را با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید.

الف) $A-B=B'-A'$ $\longrightarrow$ $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $A\subseteq B \Longrightarrow B'\subseteq A'$

$A\subseteq B \longrightarrow A\cap B=A \longrightarrow (A\cap B)'=A' \longrightarrow A'\cup B'=A' \longrightarrow B'\subseteq A'$

ج) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')=\left[(A\cap B')\cup B\right]\cap\left[(A\cap B')\cup A'\right]$

$=\left[(A\cup B)\cap \overset{M}{\cancel{(B'\cup B)}}\right]\cap\left[\overset{M}{\cancel{(A\cup A')}}\cap(A'\cup B')\right]=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$

$=(A\cup B)-(A\cap B)=\boxed{A'\triangle B'}$, $(A\triangle B)'=A'\triangle B=B'\triangle A$

د) $(A-B)-C=(A-C)-B$

$(A-B)-C=(A\cap B')\cap C'=(A\cap C')\cap B'=(A-C)-B$

ر) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cup C)=A\cap(B'\cap C')=(A\cap B')\cap(A\cap C')=(A-B)\cap(A-C)$

ز) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B')\cup(A\cap C')=A\cap(B'\cup C')=A-(B\cap C)$

س) $A-(B\cup C\cup D)=(A-B)\cap(A-C)\cap(A-D)$

$(A-B)\cap(A-C)\cap(A-D)=(A\cap B')\cap(A\cap C')\cap(A\cap D')=A\cap(B'\cap C'\cap D')=A-(B\cup C\cup D)$

ش) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A'\cup C')=(\overset{\phi}{A'\cap A}\cap B)\cup(A\cap B\cap C')=A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)$

ص) $A\cup B=A\cap B\Longrightarrow A=B$

$$\left.\begin{array}{l} B=B\cup(A\cap B)\overset{\text{فرض}}{=}B\cup(A\cup B)=A\cup B\longrightarrow B=A\cup B\longrightarrow A\subseteq B \\ A=A\cup(A\cap B)\overset{\text{فرض}}{=}A\cup(A\cup B)=A\cup B\longrightarrow A=A\cup B\longrightarrow B\subseteq A \end{array}\right\}\longrightarrow A=B$$

ض) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[(A\cap B)\cup(A\cap C)]-[(A\cap B)\cap(A\cap C)]=[A\cap(B\cup C)]-[A\cap(B\cap C)]$

$=A\cap[(B\cup C)-(B\cap C)]=A\cap(B\Delta C)$

ط) $A\Delta B=A\Delta C\Longrightarrow B=C$

$A\Delta B=A\Delta C\longrightarrow A\Delta(A\Delta B)=A\Delta(A\Delta C)\longrightarrow(A\Delta A)\Delta B=(A\Delta A)\Delta C$

$\longrightarrow \phi\Delta B=\phi\Delta C\longrightarrow B=C$

ط) $(A\Delta B)' = A'\Delta B = A\Delta B'$

$$(A\Delta B)' = [(A\cup B)-(A\cap B)]' = [(A\cup B)\cap(A\cap B)']' = [(A\cup B)'\cup(A\cap B)]$$

$$=(A'\cap B')\cup(A\cap B) = (A'-B)\cup(B-A') = A'\Delta B = A\Delta B'$$

ضرب دکارتی:

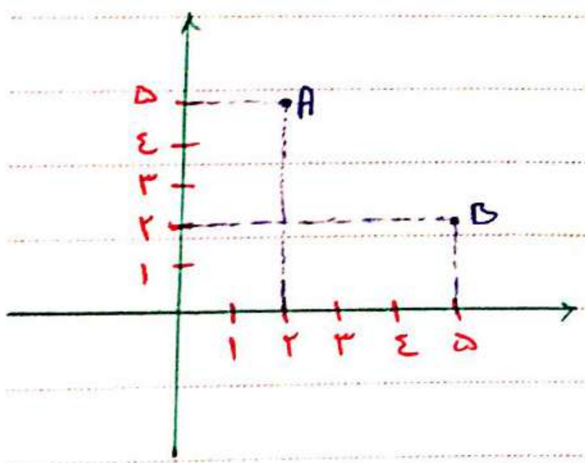
زوج مرتب: به هر دو شیء که برای آن‌ها ترتیبی قائل شویم، زوج مرتب گویند. اگر a و b دو شیء باشند و a را مقدم بر b بدانیم، آنگاه آن را با نماد (a,b) نشان می‌دهیم و زوج مرتب a و b می‌خوانیم. a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم زوج مرتب می‌گویند.

مثال: زوج مرتب $(۲,۵)$، ۲ را مؤلفه اول و ۵ را مؤلفه دوم گویند. گاهی به زوج مرتب، یک دوتایی مرتب می‌گویند.

نکته: $\{۲,۵\} \neq (۲,۵)$ زیرا در زوج مرتب ترتیب مهم است ولی در مجموعه‌ها ترتیب مهم نیست.

تساوی دو زوج مرتب: $(a,b)=(c,d) \Longleftrightarrow a=c \wedge b=d$

مثال: فرض کنید $A=(۲,۵)$ و $B=(۵,۲)$ در این صورت:



در حالی که: $\{۲,۵\}=\{۵,۲\}$

- x و y را چنان بیابید که زوج مرتب $(2, 4x+y)$ و $(2x-y, 8)$ برابر باشند.

$$(2, 4x+y) = (2x-y, 8) \longrightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ 4x+y=8 \end{cases} \longrightarrow x=\frac{5}{3}, \quad y=\frac{4}{3}$$

تعریف ضرب دکارتی: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، ضرب دکارتی A در B را با نماد $A\times B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A\times B = \{(x,y) \mid x\in A \wedge x\in B\}$$

مثال: اگر $A=\{-1, 4, 13\}$ و $B=\{\sqrt{2}, 5, 7\}$ آنگاه:

$$A\times B = \{(-1,\sqrt{2}), (-1,5), (-1,7), (4,\sqrt{2}), (4,5), (4,7), (13,\sqrt{2}), (13,5), (13,7)\}$$

نکته: اگر $|A|=m$ و $|B|=n$ آنگاه: $|A\times B| = mn$

اثبات: فرض کنید $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ در این صورت:

$$A\times B = \{ \begin{array}{l} (a_1,b_1), (a_1,b_2), \dots, (a_1,b_n) \\ (a_2,b_1), (a_2,b_2), \dots, (a_2,b_n) \\ \vdots \\ (a_m,b_1), (a_m,b_2), \dots, (a_m,a_n) \} \end{array}$$

$\longrightarrow |A\times B| = mn$

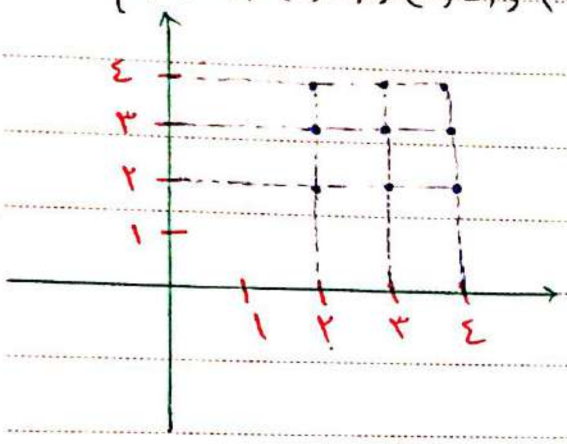
نکته: اگر $A=B$ باشد ضرب دکارتی $A\times B$ را یا $A\times A$ را با نماد A^2 نشان می‌دهیم. به بیان دیگر:

$$A^2 = \{(x,y) \mid x, y \in A\}$$

مثال: اگر $A=\{2,3,4\}$ آنگاه:

$A^2=\{2,3,4\}\times\{2,3,4\}$

$A^2=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$



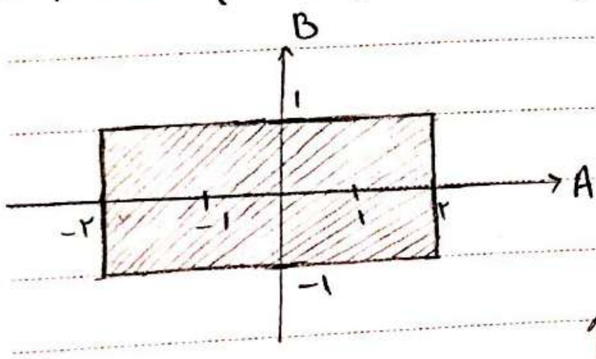
— اگر $A=[-2,2]$ ، $B=[-1,1]$ ، $C=[+1,4)$ ، $D=[1,+\infty)$ ، $E=(-\infty,3)$ بازه‌هایی در $\mathbb{R}$ و $F=\{0,1,2\}$ باشد، حاصل هریک را در دستگاه مختصات نمایش دهید.

روی محور x ها — روی محور y ها

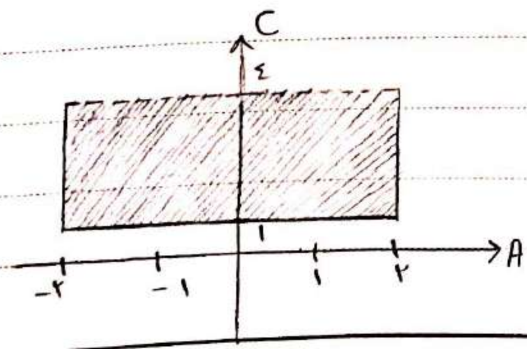
الف) $A\times B$ ب) $A\times C$ ج) $B\times D$ د) $D\times E$

هـ) $C\times F$ و) $F\times C$ ز) A^2-B^2

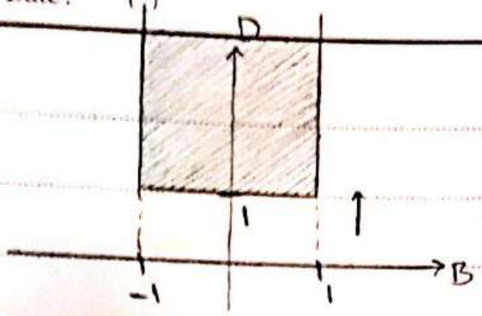
الف) $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}=\{(x,y)\mid -2\leq x\leq 2,\ -1\leq y\leq 1\}$



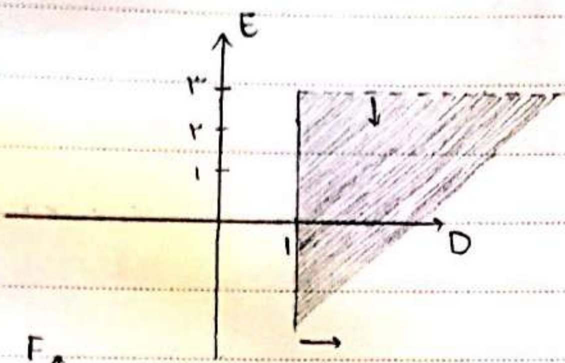
ب)



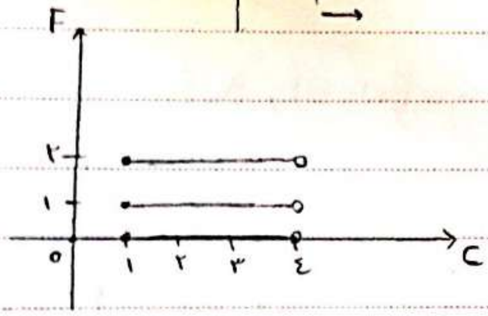
ج)



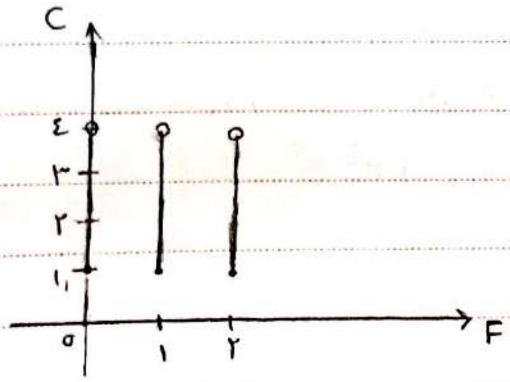
د)



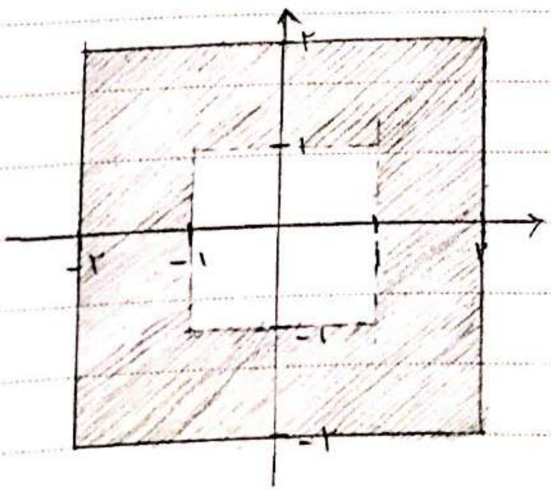
هـ)



و)



ز)



قضیه ۱: برای هر مجموعه A، الف) $A \times \phi = \phi$ ب) $\phi \times A = \phi$

اثبات: الف) برهان خلف: فرض می‌کنیم $A \times \phi \neq \phi$ بنابراین:

$$\exists (x, y) \in A \times \phi \longrightarrow x \in A \wedge y \in \phi$$

اما $y \in \phi$ تناقض است زیرا تهی عضوی ندارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. اثبات (ب) نیز مشابه است.

قضیه ۲: $A \times B = B \times A \longrightarrow A = \phi$ یا $B = \phi$ یا $A = B$.

اثبات: اگر $A = \phi$ یا $B = \phi$ آنگاه حکم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$ در این صورت:

اگر $x \in A, y \in B \longrightarrow (x, y) \in A \times B \xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in B \times A \longrightarrow x \in B \wedge y \in A$

بنابراین: $x \in A \longrightarrow x \in B$ پس: $A \subseteq B$، $y \in B \longrightarrow y \in A$ بنابراین: $B \subseteq A$ پس: $A = B$.

ـ اگر $A = \{4, x^2 - 3, z + 5\}$ ، $B = \{5, y - 2, 13\}$ ، $A \times B = B \times A$ آنگاه بیشترین مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ را بدست آورید.

$y - 2 = 4 \longrightarrow y = 6$

$x^2 - 3 = 5 \longrightarrow x^2 = 8$

$$\begin{cases} z + 5 = 5 \longrightarrow z = 0 \ \times \\ z + 5 = 13 \longrightarrow z = 8 \ \checkmark \ \text{(بیشترین مقدار)} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8 + 36 + 64 = 108$$

قضیه ۳: برای هر سه مجموعه A، B، C داریم:

الف) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(x,y) \in A \times (B-C) \longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B-C \longleftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$

$\longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C) \longleftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \notin A \times C$

$\longleftrightarrow (x,y) \in (A \times B) - (A \times C)$

ب) $\left.\begin{array}{l} A \times C = B \times C \\ C \neq \phi \end{array}\right\} \longrightarrow A = B$

$A \times C = B \times C \longrightarrow A \times C - B \times C = \longrightarrow (A-B) \times C = \phi \xrightarrow{C \neq \phi} A - B = \phi$

$\longrightarrow A \subseteq B$ ①

$A \times C = B \times C \longrightarrow B \times C - A \times C = \phi \longrightarrow (B-A) \times C = \phi \xrightarrow{C \neq \phi} B - A = \phi$

$\longrightarrow B \subseteq A \xrightarrow{①} A = B$ ✓

ج) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$(x,y) \in A \times (B \cap C) \longleftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) \longleftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$

$\longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \longleftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C$

$\longleftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

د) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

$(x,y)\in A\times(B\cup C) \longleftrightarrow x\in A \wedge y\in(B\cup C) \longleftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C)$

$\longleftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\vee(x\in A \wedge y\in C) \longleftrightarrow (x,y)\in A\times B \vee (x,y)\in A\times C$

$\longleftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

هـ) $A\times(B\Delta C) = (A\times B)\Delta(A\times C)$

$A\times(B\Delta C) = A\times[(B-C)\cup(C-B)] = A\times(B-C)\cup A\times(C-B)$

$= [(A\times B)-(A\times C)]\cup[(A\times C)-(A\times B)] = (A\times B)\Delta(A\times C)$

و) $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

$(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \longleftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in C\times D$

$\longleftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\wedge(x\in C \wedge y\in D) \longleftrightarrow (x\in A \wedge x\in C)\wedge(y\in B \wedge y\in D)$

$\longleftrightarrow x\in(A\cap C) \wedge y\in(B\cap D) \longleftrightarrow (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$

(نتیجه و) $(A\times B)\cap(B\times A) = (A\cap B)\times(B\cap A) = (A\cap B)\times(A\cap B) = (A\cap B)^2$

«شمارش مجموعه‌ها»

۱) $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

۲) $|A-B| = |A| - |A\cap B|$

۳) $|A\Delta B| = |A| + |B| - ۲|A\cap B| = |A\cup B| - |A\cap B|$

نکته: $|A\times B| = |A||B|$

۴) $|(A\times B)\cap(B\times A)| = |A\cap B|^۲$

۵) $|(A\times B)\cup(B\times A)| = ۲|A||B| - |A\cap B|^۲$

۶) $|(A\times B)-(B\times A)| = |A||B| - |A\cap B|^۲$

۷) $|(A\times B)\Delta(B\times A)| = ۲|A||B| - ۲|A\cap B|^۲$

۸) $|A^۲\cup B^۲| = |A|^۲ + |B|^۲ - |A\cap B|^۲$

۹) $|A^۲ - B^۲| = |A|^۲ - |A\cap B|^۲$

۱۰) $|A^۲\Delta B^۲| = |A|^۲ + |B|^۲ - ۲|A\cap B|^۲$

ـ اگر $A=\{k^2-1 \mid -3\leqslant k \leqslant 2\}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ و $B=\{x \mid |x|=1 \text{ یا } 2\}$ آنگاه حاصل هر یک را بدست آورید.

$A=\{8,3,0,-1\}$, $B=\{-1,1,-2,2\} \longrightarrow |A|=|B|=4$, $|A\cap B|=1$

1) $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| = 4+4-1=7$

2) $|A-B| = |A|-|A\cap B| = 4-1=3$

3) $|A\Delta B| = |A|+|B|-2|A\cap B| = 4+4-2=6$

4) $|(A\times B)\cup(B\times A)| = 2|A||B|-|A\cap B|^2 = 2\times4\times4-1=31$

5) $|(A\times B)-(B\times A)| = |A||B|-|A\cap B|^2 = 4\times4-1=15$

6) $|(A\times B)\Delta(B\times A)| = 2|A||B|-2|A\cap B|^2 = 2\times4\times4-2=30$

7) $|A^2\cup B^2| = |A|^2+|B|^2-|A\cap B|^2 = 4^2+4^2-1=31$

8) $|A^2-B^2| = |A|^2-|A\cap B|^2 = 4^2-1=15$

9) $|A^2\Delta B^2| = |A|^2+|B|^2-2|A\cap B|^2 = 4^2+4^2-2=30$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

«مرور فصل یک: منطق ریاضی».

۱- ثابت کنید: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p\wedge q)\Rightarrow r$

$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \equiv \sim(p\wedge q)\vee r \equiv (p\wedge q)\Rightarrow r$$

۲- ثابت کنید: $[p\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow q \equiv T$

$$[p\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow q \equiv [p\wedge(\sim p\vee q)]\Rightarrow q \equiv [\overset{F}{\cancel{(p\wedge\sim p)}}\vee(p\wedge q)]\Rightarrow q$$

$$\equiv (p\wedge q)\Rightarrow q \equiv \sim p\vee(\overset{T}{\cancel{\sim q\vee q}}) \equiv T$$

۳- ثابت کنید: $(p\Rightarrow q)\wedge(p\vee q)\equiv q$

$$(p\Rightarrow q)\wedge(p\vee q) \equiv (\sim p\vee q)\wedge(p\vee q)\equiv q\vee\overset{F}{\cancel{(\sim p\wedge p)}} \equiv F\vee q \equiv q$$

۴- ثابت کنید: $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv p\Rightarrow(\sim q\vee r)\equiv\sim p\vee(\sim q\vee r)\equiv\sim q\vee(\sim p\vee r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$$

۵- ثابت کنید: $p\vee(q\Rightarrow r)\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\vee r)$

$$(p\vee q)\Rightarrow(p\vee r)\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\vee r)\equiv[(\sim p\wedge\sim q)\vee p]\vee r\equiv[(\overset{T}{\cancel{\sim p\vee p}})\wedge(\sim q\vee p)]\vee r$$

$$\equiv(\sim q\vee p)\vee r\equiv p\vee(\sim q\vee r)\equiv p\vee(q\Rightarrow r)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۶- ثابت کنید: $p\wedge(q\to r)\not\equiv(p\wedge q)\to(p\wedge r)$

$(p\wedge q)\to(p\wedge r)\equiv(\sim p\vee\sim q)\vee(p\wedge r)\equiv[(p\wedge r)\vee\sim p]\vee\sim q\equiv[(\overset{T}{\sim p\vee p})\wedge(\sim p\vee r)]\vee\sim q$

$\equiv(\sim p\vee r)\vee\sim q\equiv\sim p\vee(\sim q\vee r)\equiv\sim p\vee(q\to r)\equiv p\to(q\to r)$

۷- ثابت کنید: $p\to(q\to(p\wedge q))\equiv T$

$p\to(q\to(p\wedge q))\equiv\sim p\vee(\sim q\vee(p\wedge q))\equiv\sim p\vee((p\vee\sim q)\wedge(\overset{T}{\sim q\vee q}))$

$\equiv\sim p\vee(p\vee\sim q)\equiv(\overset{T}{\sim p\vee p})\vee\sim q\equiv T\vee\sim q\equiv T$

۸- ثابت کنید: $p\to(q\to r)\equiv(p\to q)\to(p\to r)$

$(p\to q)\to(p\to r)\equiv(\sim p\vee q)\to(\sim p\vee r)\equiv(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\vee r)$

$\equiv[(p\wedge\sim q)\vee\sim p]\vee r\equiv[(\overset{T}{p\vee\sim p})\wedge(\sim p\vee\sim q)]\vee r\equiv(\sim p\vee\sim q)\vee r$

$\equiv\sim p\vee(\sim q\vee r)\equiv p\to(q\to r)$

۱- حاصل عبارت $([(A\cup B)-A']\cup[B\cup(A-B')])$ کدام است؟

۱) A ۲) $A\cap B$ ۳) $A\cup B$ ✓ ۴) $A-B$

$$([(A\cup B)-A']\cup[B\cup(A-B')]) = ([(A\cup B)\cap A]\cup[B\cup(A\cap B)]) = \boxed{A\cup B}$$

۲- A دارای ۱۴ زیرمجموعه سره ناتهی است. B دارای ۸ زیرمجموعه است. مجموعه توانی $C = A\cap(A'-B')'$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶ ✓

$$C = A\cap(A'-B')' = A\cap(A'\cup B) = A \to |P(A)| = 14+2=16 \to |A|=|C|=4 \to |P(C)|=16$$

۳- اگر $A\subseteq B$ آنگاه حاصل $[A\cap(B-C)]-[A\cap B\cap C]$ کدام است؟

۱) $A\cap C$ ۲) $A\cap C'$ ✓ ۳) A ۴) $A-B$

$$[A\cap(B-C)]-[A\cap B\cap C] = (A\cap B\cap C')-(A\cap C) = (A\cap C')-(A\cap C) = (A\cap C')\cap(A'\cup C')$$

$$= \overset{\emptyset}{\cancel{(A\cap C'\cap A)}}\cup(A\cap C'\cap C') = \boxed{A\cap C'}$$

۴- اگر $A=\{2,3,4,5,6\}$ ، $A\cap B=\{2,3\}$ ، $|(A-B)\times(B-A)|=6$ تعداد عضوهای B چندتاست؟

۱) ۳ ۲) ۴ ✓ ۳) ۵ ۴) ۶

$$|(A-B)\times(B-A)|=6 \to |A-B|\cdot|B-A|=6 \quad , \quad |A-B|=|A|-|A\cap B|=5-2=3$$

$$3\times|B-A|=6 \to |B-A|=2 \to |B|-|A\cap B|=2 \to \boxed{|B|=4}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۵ـ اگر $|A|=5$ ، $|B|=6$ ، $|A\cap B|=2$ آنگاه $|(A\cap B')\times(A\cup B')'|=?$

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ✓ ۴) ۱۶

$|A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|=3$

$|(A\cup B')'|=|B\cap A'|=|B-A|=|B|-|A\cap B|=4$

$\longrightarrow |(A\cap B')\times(A\cup B')'|=3\times 4=12$

۶ـ اگر $A=\{x \mid x>1\}$ ، $B=\{x \mid x<-1\}$ آنگاه $A'\cap B'$ کدام است؟

۱) $\{x \mid -1<x<1\}$ ۲) $\{x \mid -1<x\leq 1\}$

۳) $\{x \mid -1\leq x<1\}$ ۴) $\{x \mid -1\leq x\leq 1\}$ ✓

$A'=\{x \mid x\leq 1\}$, $B'=\{x \mid x\geq -1\} \longrightarrow A'\cap B'=\{x \mid -1\leq x\leq 1\}$

۷ـ اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+2x=8\}$ ، $B=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2\leq 4\}$ آنگاه $|(B\times A)-A^2|=?$

$A=\{-4,2\}$ $B=\{1,2\}$

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۶ ۴) ۱۲

$|(B\times A)-A\times A|=|(B-A)\times A|=|B-A||A|=1\times 2=2$

«احتمال»

«پدیده های تصادفی» پدیده ای که قبل از وقوع نتوان با قاطعیت نتیجه آن را تعیین کرد، پدیده تصادفی می نامند.

مانند: پرتاب تاس، پرتاب سکه، تعداد تصادفات در یک چهارراه در بازه زمانی مشخص.

«احتمال» احتمال علم مطالعه پدیده های تصادفی است.

«فضای نمونه» مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه گویند و با S نشان می دهند.

«پیشامد» هر زیرمجموعه از فضای نمونه را پیشامد گویند و با A، B و ... نشان می دهند.

«نکته» اگر فضای نمونه S دارای n عضو باشد، آنگاه S دارای 2^n پیشامد است.

ـ سکه ای را پرتاب می کنیم، فضای نمونه را بنویسید. H: رو T: پشت $S=\{H,T\}$

ـ دو سکه را پرتاب می کنیم، فضای نمونه را بنویسید. $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

ـ سه سکه را باهم پرتاب می کنیم. الف) فضای نمونه ب) پیشامد آنکه حداقل دو سکه رو بیاید. ج) پیشامد آنکه هر سه سکه یکسان بیایند.

الف) $S=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,T),(H,T,H),(T,T,T),$
$(T,T,H),(T,H,H),(T,H,T)\}$

ب) $A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\}$

ج) $B=\{(H,H,H),(T,T,T)\}$

ـ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. الف) فضای نمونه. ب) پیشامد آنکه مجموع اعداد رو شده ۸ باشد.
ج) پیشامد آنکه مجموع اعداد رو شده ۱۱ باشد.

الف) $S = \{\underbrace{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)}_{\text{۳۶ تا}}\}$

ب) $A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

ج) $B = \{(5,6), (6,5)\}$

ـ یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب کرده‌ایم. الف) فضای نمونه. ب) پیشامد آنکه تاس زوج و سکه رو.
ج) پیشامد آنکه تاس زوج یا سکه رو.

الف) $S = \{(1,H), (2,H), (3,H), \ldots, (6,T)\}$

ب) $A = \{(2,H), (4,H), (6,H)\}$

ج) $B = \{(1,H), (2,H), (3,H), (4,H), (5,H), (6,H), (2,T), (4,T), (6,T)\}$

ـ پنج سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه چند عضو دارد؟

$n(S) = 2^5 \times 6^2 = 1152$

ـ تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر بزرگتر از ۴ آمد سه سکه پرتاب می‌کنیم و در غیر اینصورت دو تاس دیگر پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه چند عضو دارد؟

$2 \times 2^3 + 4 \times 6^2 = 160 \longrightarrow n(A) = 160$

ـ دو نفر در طبقه همکف سوار یک آسانسور شده‌اند. اگر ساختمان مربوطه ۵ طبقه ای باشد، فضای نمونه مربوط به پیاده شدن این دو نفر را بنویسید.

فرد اول، فرد دوم

$S = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_5, b_5)\}$

شماره طبقه

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ـ به تصادف از بین ۱۰ جفت کفش، چهار لنگه را برمی‌داریم. پیشامد آنکه فقط بین این ۴ لنگه یک جفت کفش باشد، چند عضو دارد؟

aa / bb / cc / dd / $\boxed{ee}$ / ff / gg / hh / LL / kk

$n(S) = \binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 10 \times \frac{9 \times 8}{2} \times 2 \times 2 = 1440.$

«جبر مجموعه‌ها»

فرض کنید A و B دو پیشامد باشند:

① پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

② پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد رخ دهند.

ـ فرض کنید $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فضای نمونه حاصل از پرتاب یک تاس باشد و $A = \{2, 3, 5, 6\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ اگر نتیجه پرتاب ۳ باشد، آنگاه پیشامد $A \cap B$ رخ داده است.

نکته: اگر نتیجه آزمایش، عضو یک پیشامد باشد، می‌گوئیم آن پیشامد رخ داده است.

③ پیشامد $A - B$ که A رخ دهد امّا B رخ ندهد.

④ پیشامد $A \Delta B$ وقتی رخ می‌دهد که فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد.

⑤ پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

ـ فرض کنید A، B و C پیشامدهایی از فضای نمونه S باشند، برای هریک از عبارتهای زیر یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

الف) B و A رخ دهند امّا C رخ ندهد. $(A \cap B) - C$

ب) حداقل دو پیشامد رخ دهد. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

ج) فقط یک پیشامد رخ دهد. $((A-B)-C)\cup((B-A)-C)\cup((C-A)-B)$

د) حداکثر یک پیشامد رخ دهد. $((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))'$

هـ) حداقل یکی از A یا B رخ دهد اما C رخ ندهد. $(A\cup B)-C$

و) از دو پیشامد A و C حداکثر یکی رخ دهد اما B رخ ندهد. $[(A\cap C)\cup B]'$

ز) هر سه پیشامد رخ دهد. $A\cap B\cap C$

تعریف احتمال: فرض کنید A پیشامدی از فضای نمونه و متناهی S باشد، در اینصورت احتمال وقوع A را با P(A) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$$

- در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۳ مهره زرد وجود دارد.

الف) به تصادف یک مهره برمی‌داریم، احتمال آنکه زرد باشد. $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{5+4+3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

ب) به تصادف یک مهره برمی‌داریم، احتمال آنکه آبی باشد. $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

ج) به تصادف دو مهره برمی‌داریم، احتمال آنکه قرمز باشد. $P(A)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{10}{66}=\frac{5}{33}$

د) به تصادف دو مهره برمی‌داریم، احتمال آنکه همرنگ باشند. $P(A)=\frac{\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{19}{66}$

هـ) به تصادف دو مهره برمی‌داریم، احتمال آنکه یکی آبی و یکی قرمز باشد. $P(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{20}{66}=\frac{10}{33}$

و) به تصادف ۳ مهره برمی‌داریم، احتمال آنکه حداقل دو مهره قرمز باشد.

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{7}{1}+\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{4}{11}$$

ــ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه:

الف) مجموع دو تاس ۵ باشد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

ب) حداقل یکی از دو تاس مضرب ۳ باشد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$